Vzorce z Teoretickej mechaniky

0 Vektorová algebra a analýza

δ_{ij}	Kroneckerov symbol
ε_{ijk}	Levi-Civitov symbol
$\delta_{ij}a_j = a_i$	užitočné pozorovanie 1
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$	Davis-cupová identita
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i$	skalárny súčin
$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\varepsilon_{ijk}a_j b_k)\mathbf{e}_i \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$	vektorový súčin
$A_{ij}S_{ij} = 0 \quad \text{kde} \quad A_{ij} = -A_{ji} \text{ a } S_{ij} = S_{ji}$	užitočné pozorovanie 2
$\mathrm{grad}\, f \equiv \nabla f \quad \text{resp.} \quad (\mathrm{grad}\, f)_i = \partial_i f$	gradient
$\mathrm{div}\mathbf{A} = \partial_i A_i$	divergencia
$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} \quad \text{resp.} \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$	rotácia
$\triangle f = \partial_i\partial_i f$	laplacián

1 Sústava (neviazaných) hmotných bodov

$\mathbf{F}$ je potenciálové pole $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$	nut. a postač. podmienka na potenciálovosť $\mathbf{F}$
$U(\mathbf{r}) := -\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \qquad \mathbf{F} = -\nabla U$	U je potenciálna enegria pre $\mathbf{F}$

2 Väzby

$\dot{\bar{p}} = \bar{F} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(r)}$	Newtonove rovnice
$\delta\bar{r}, \quad \phi_\alpha(\bar{r}) = 0$	virtuálne posunutie, holonómne väzby
$\bar{F}^{(r)}\cdot\delta\bar{r} = 0$	virtuálne posunutia sú kolmé na reakciu väzieb

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\alpha = 0 \\ \delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0 \\ (\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)})\cdot\delta\bar{r} = 0 \end{array}\right\} \text{D'Alambertov-Lagrangeov princíp} \qquad \left.\begin{array}{l} \phi_\alpha = 0 \\ \delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0 \\ \bar{F}^{(a)}\cdot\delta\bar{r} = 0 \end{array}\right\} \text{princíp virtuálnych prác}$$

$q^a \leftrightarrow (q^1,\ldots,q^n)$	zovšeobecnené súradnice
$\bar{r}(q) \equiv \bar{r}(q^1,\ldots,q^n)$	parametrizácia konfiguračného priestoru
$\delta\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a}\delta q^a$	virtuálne posunutie v reči zovšeob. súr.
$Q_a := \bar{F}^{(a)}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a}$	a-ta zovšeobecnená sila

Princíp virtuálnych prác v reči zovšeobecnených súradníc:

$\phi_\alpha = 0$	platí automaticky
$\delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0$	platí automaticky
$\bar{F}^{(a)}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} = 0$	treba naozaj počítať

3 Lagrangeove rovnice

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1,\ldots,n$	Lagrangeove rovnice
$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q}) - U(q,t)$	lagranžián
$T = \frac{1}{2}T_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b \qquad T_{ab} = \sum_k m_k \frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q^a}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q^b}$	kinetická energia
L nezávisí od $q^a \quad\Rightarrow\quad p_a(q,\dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a} = \text{konšt.}$	zákon zachovania a-tej zovšeobecnenej hybnosti
L nezávisí od $t \quad\Rightarrow\quad E(q,\dot{q}) := \dot{q}^a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a} - L = \text{konšt.}$	zákon zachovania energie
$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}^a}$	$U(q,\dot{q},t)$ je zovšeobecnená potenciálna energia
$\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))$	Lorentzova sila
$U(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = e(\phi(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t))$	zovšeobecnená pot. energia pre Lorentzovu silu
$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$	ako sa počítajú polia $\mathbf{E},\mathbf{B}$ z potenciálov $\phi,\mathbf{A}$

4 Variačný počet

$\mathcal{S}[y] := \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y, y', x)\, dx$	funkcionál premennej y
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$	Eulerova diferenciálna rovnica
$\mathcal{L}$ nezávisí od $y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť y
$\mathcal{L}$ nezávisí od $x \quad \Rightarrow \quad y'\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť x

5 Hamiltonove rovnice

$H(q,p,t) = p_a \dot{q}^a(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$	hamiltonián
$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$	Hamiltonove rovnice
$L = \frac{1}{2}T_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b - U(q,t) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}(T^{-1})^{ab}p_a p_b + U$	hamiltonián pre lagranžián uvedenej štruktúry
$\phi_t : \quad (q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t))$	fázový tok
Zachováva sa fázový objem $\quad \mathrm{vol}D(t) := \int_{D(t)} dq\, dp$	Liouvillova veta
$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial g}{\partial p_a}\frac{\partial f}{\partial q^a}$	Poissonove zátvorky

Vlastnosti Poissonových zátvoriek:

$\{f_1 + \lambda f_2, g\} = \{f_1, g\} + \lambda\{f_2, g\}$	
$\{f, g_1 + \lambda g_2\} = \{f, g_1\} + \lambda\{f, g_2\}$	bilinearita
$\{f,g\} = -\{g,f\}$	antisymetria
$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$	Jacobiho identita
$\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$	Leibnizovo pravidlo

6 Informácie o pohybe získateľné bez riešenia (pohybových) rovníc

Fázový portrét (pre 1 stupeň voľnosti) sú krivky $E = \text{konšt.}$ v rovine qp (vo fázovom priestore).

Škálovanie je preškálovanie premenných a parametrov lagranžiánu tak, že $L \mapsto \lambda L$.

Rozmerová analýza je nástroj na hľadanie a kontrolovanie vzťahov medzi fyzikálnymi veličinami použitím ich jednotiek (rozmerov).

7 Problém dvoch telies

$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r) \qquad r = \lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert$	L pre problém 2 telies v premenných $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$	relatívny vektor a ťažisko
$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$	celková a redukovaná hmotnosť
$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$	L pre problém 2 telies v premenných $\mathbf{R}, \mathbf{r}$

Pohyb ťažiska je nezaujímavý a $\mathbf{L} = \textbf{konšt.}$ dáva pohyb v rovine s lagranžiánom:

$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$	výsledný lagranžián pre problém 2 telies

Zákony zachovania:

$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E$	zákon zachovania energie
$\mu r^2\dot{\varphi} = p_\varphi \equiv \mathfrak{M}$	zákon zachovania momentu hybnosti

Riešenie pre $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$:

$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$	riešnie = kužeľosečky (v polárnych súr.)
$p \equiv \frac{\mathfrak{M}^2}{\mu\alpha}\,, \qquad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2E\mathfrak{M}^2}{\mu\alpha^2}}$	vzdial. prieseč. s osou y od nuly, excentricita
$0 \le e < 1\,, \qquad e = 1\,, \qquad e > 1$	elipsa, parabola, hyperbola

8 Malé kmity

Kuchynský recept na malé kmity

1. Napísať T, U a z toho $L = T - U$ pre daný systém.
2. Určiť stabilnú rovnovážnu polohu $q_0 \equiv (q_0^1, \dots q_0^n)$.
3. Nájsť matice
$$M_{ab} \equiv T_{ab}(q_0) \qquad \text{a} \qquad K_{ab} \equiv \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}\right|_{q_0}$$
4. Napísať L pre malé kmity
$$L = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{x}_a \dot{x}_b - \frac{1}{2} K_{ab} x_a x_b \qquad\qquad x_a = q^a - q_0^a$$
5. Napísať Lagrangeove rovnice $M_{ab}\ddot{x}_b + K_{ab} x_b = 0$.
6. Dosadenie ansatzu
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \cos \omega t$$
do Lagrangeových rovníc dáva
$$\begin{pmatrix} & & \\ & K - \omega^2 M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \cos \omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
čo platí pre ľubovoľné t. Pre $t = 0$ dostávame sústavu lineárnych algebraických rovníc
$$\begin{pmatrix} & & \\ & K - \omega^2 M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$
7. Sústava (1) má nenulové riešenie $\Leftrightarrow$ matica $(K - \omega^2 M)$ je singulárna, čiže
$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \qquad \text{z čoho dostaneme charakteristické frekvencie} \qquad \omega_1, \dots, \omega_n$$
8. Dosadíme ω_a do rovníc (1) a nájdeme pre každé ω_a stĺpček $\left(k_1^{(a)}, \dots, k_n^{(a)}\right)^T$.
9. Módy sú
$$\textbf{1. mód:} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{(1)} \\ \vdots \\ k_n^{(1)} \end{pmatrix} \cos \omega_1 t \qquad \dots \qquad \textbf{n. mód:} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{(n)} \\ \vdots \\ k_n^{(n)} \end{pmatrix} \cos \omega_n t$$

9 Pohybové rovnice v neinerciálnej vzťažnej sústave

$\mathbf{R}(t)$	poloh. vektor počiatku neinerc. voči inerc. súst.
$\mathbf{r}(t)$	polohový vektor voči neinerc. sústave
$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}(t)$	polohový vektor voči inerc. sústave
$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}, t)$	Newtonove rovnice v inerc. sústave
$m\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, t) - m\ddot{\mathbf{R}} \qquad \text{kde} \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{F}(\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}, t)$	Newtonove rovnice v neinerc. sústave
$\mathbf{e}_i$	báza stojaca v inerc. sústave
$\mathbf{e}_\alpha(t)$	báza stojaca v neinerc. sústave
$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i = x_\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(t)$	polohový vektor $\mathbf{r}$ v rozložený podľa báz
$\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$	vektor $\mathbf{b}$ sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$
$\dot{\mathbf{e}}_\alpha = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\alpha(t)$	neinerc. sa otáča uhl. rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}(t)$ voči inerc.
$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_\alpha \mathbf{e}_\alpha) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$	druhá der. $\mathbf{r}$ vzhľadom na (točiacu sa) bázu $\mathbf{e}_\alpha$
$\mathbf{v} \equiv \dot{x}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \qquad \mathbf{a} \equiv \ddot{x}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$	rýchlosť a zrýchlenie vzhľadom na neinerc. súst.

Newtonove rovnice v neinerciálnej sústave majú celkovo tvar:
$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\mathcal{F}} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Odstreď}}$$

10 Mechanika tuhého telesa

$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \equiv \frac{1}{2} I(\omega,\omega)$	rotačná kin. en. tuhého telesa (voči ťažisku)
$L_i = I_{ij}\omega_j$	i-ta zložka momentu hybnosti
$I_{ij} := \int\limits_V \rho\, dV (\mathbf{r}^2\delta_{ij} - x_i x_j)$	tenzor zotrvačnosti
$I(\mathbf{n},\mathbf{n}) \equiv I_{ij} n_i n_j = \int\limits_V \rho\, dV (\underbrace{\mathbf{r}^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})^2}_{\mathbf{r}_\perp^2})$	moment zotrvačnosti voči osi danej vektorom $\mathbf{n}$
Eulerove kinematické rovnice:	Eulerove dynamické rovnice:
$\omega_1 = \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi$	$I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1$
$\omega_2 = \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi$	$I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = N_2$
$\omega_3 = \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi$	$I_3\dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3$

11 Mechanika spojitého prostredia (kontinua)

$\mathbf{F}_{obj} = \int\limits_V \mathbf{f}_{obj} dV$	kde $\mathbf{f}_{obj}$ - hustota obj. sily	celková objemová sila
$(d\mathbf{f}_{pl})_i = \sigma_{ij} dS_j$	kde $\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)$ - tenzor napätia	i-ta zložka plošnej sily pôsobiacej na plôšku $d\mathbf{S}$
$(\mathbf{F}_{pl})_i = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} dS_j$		i-ta zložka celkovej plošnej sily
$f_i + \partial_j\sigma_{ij} = \rho a_i$	kde $f_i \equiv (\mathbf{f}_{obj})_i$ $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ - zrýchl.	všeobecná pohybová rovnica pre kontinuum

Tekutiny (kinematika $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ - rýchlostné pole):

$\mathbf{a} = \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$	zrýchlenie pre tekutiny
$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$	σ_{ij} pre ideálnu tekutinu
$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$	σ_{ij} pre viskóznu tekutinu
$\rho\,(\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g}$	Eulerova rovnica
$\rho\,(\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \eta\,(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \triangle\mathbf{v})$	Navierova-Stokesova rovnica
$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$	rovnica kontinuity
$\partial_t\mathbf{v} = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$	stacionárne prúdenie, nevírové prúdenie
$\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z = \text{konšt.}$	Bernoulliho rovnica

Pružné kontinuum (kinematika $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ - pole posunutí):

$\mathbf{a} = \partial_t^2\mathbf{u}$	zrýchlenie pre pružné kontinuum
$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$	tenzor deformácie
$\vartheta \equiv \varepsilon_{ii} = \partial_i u_i \equiv \mathrm{div}\mathbf{u}$	objemová dilatácia
$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$	Hookov zákon
$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$	Hookov zákon pre izotrop. homog. kontinuum
$\rho\,\partial_t^2\mathbf{u} = \mathbf{f} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\triangle\mathbf{u}$	Lamého rovnica