

# Foucaultovo kyvadlo

Teoretická fyzika okolo nás

Lukáš Tomek

Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Študijný odbor: 4.1.1 Fyzika

BRATISLAVA, 2009

# 1 Úvod

*Foucaultovo kyvadlo* bolo navrhnuté ako experiment, ktorý potvrdzuje rotáciu Zeme okolo svojej osi. V roku 1851, keď Léon Foucault zostrojil kyvadlo, už bolo známe, že Zem sa točí, ale Foucaultovo kyvadlo bolo prvým *dynamickým* dôkazom rotácie. V tom čase Foucaultov principiálne jednoduchý experiment vyvolal veľký rozruch.

Foucaultovo zariadenie v Pantheóne v Paríži (na obrázku vpravo) pozostávalo z 28 kg závažia zaveseného na 67 metrov dlhom drôte. Kyvadlo sa mohlo voľne kývať v ktorejkoľvek zvislej rovine. Smer, v ktorom sa kyvadlo kýve, sa *stáča* kvôli rotácii Zeme. Pozorované *stáčanie roviny kyvov* bolo  $11^\circ$  za hodinu a dookola sa rovina kyvov otočila za 32,7 hodín.



V tejto práci budeme (s istými priblíženiami) skúmať efekt stáčania roviny kyvov a nájdeme aj približnú trajektóriu Foucaultovho kyvadla.

## 2 Sféricke kyvadlo v priblížení malých kmitov

Foucaultovo kyvadlo (zatiaľ na nepohybujúcej sa Zemi) je vo veľmi dobrom priblížení *sféric-kým kyvadlom* - hmotným bodom s hmotnosťou  $m$  zaveseným na nekonečne ľahkej šnúrke dĺžky  $l$ . Z dôvodov, ktoré objasníme neskôr, budeme pracovať v *kartézskych súradniciach*  $(x, y, z)$ . Pomocou *Lagrangeovho formalizmu* získame pohybové rovnice pre pohyb kyvadla.

Polohový vektor závažia je

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2})$$

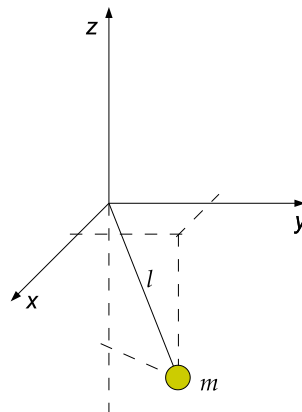
kde  $z$  sme vyjadrili s použitím pytagorovej vety.

Derivovaním podľa času dostávame okamžitú rýchlosť kyvadla

$$\dot{\mathbf{r}} = \left( \dot{x}, \dot{y}, \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} \right)$$

*Kinetická energia* má tvar

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right) \quad (1)$$



Potenciálna energia pre homogénne gravitačné pole je

$$U = mgz = -mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

Nulovú hodnotu potenciálnej energie si zvolíme v minime  $U$  (teda v stabilnej rovnovážnej polohe  $x = y = 0, z = -l$ ).<sup>1</sup> Potom

$$U = mg \left( l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \right) \quad (2)$$

Lagrangián sférického kyvadla má teda podobu

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right) - mg \left( l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \right)$$

Pre *malé kmity* v okolí rovnovážnej polohy (resp. minima potenciálnej energie) môžeme lagrangián rozvinúť.  $T$  a  $U$  rozvinieme do *Taylorovho radu* a zoberieme vždy prvý zaujímavý člen.

V *zovšeobecnených súradniciach* ( $q^1, \dots, q^n$ ) má všeobecne kinetická energia tvar

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \begin{pmatrix} & & \\ & T_{ab}(q) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{pmatrix}$$

kde  $T_{ab}(q)$  je symetrická matica (kladne definitná kvadratická forma), ktorej prvky sú

$$T_{ab}(q) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b}$$

Túto maticu rozvineme v okolí rovnovážnej polohy  $q_0$

$$T_{ab}(q) = T_{ab}(q_0) + \left. \frac{\partial T_{ab}}{\partial q^c} \right|_{q_0} (q^c - q_0^c) + \dots$$

Prvý zaujímavý člen je hneď prvý člen rozvoja, konštantná matica  $T_{ab}(q_0)$ .<sup>2</sup> Vo formuli pre  $T(q, \dot{q})$  treba len dosadiť  $q_0$  za  $q$ . V prípade sférického kyvadla pre kinetickú energiu v okolí rovnovážnej polohy  $x = 0, y = 0$  zo vzťahu (1) máme

$$T_0 = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

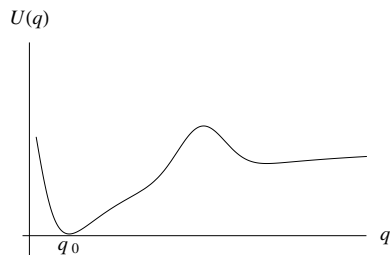
Potenciálnu energiu  $U(q)$  rozvíjame podobne v okolí  $q_0$

$$U(q) = U(q_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q^a} \right|_{q_0} (q^a - q_0^a) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b} \right|_{q_0} (q^a - q_0^a)(q^b - q_0^b) + \dots$$

<sup>1</sup>Takúto voľnosť máme vďaka tomu, že fyzikálne sa prejaví gradient potenciálu a na ten konštanta nemá vplyv.

<sup>2</sup>V poslednom vzťahu a aj v nasledujúcich používame Einsteinovu sumačnú konvenciu (cez opakujúci sa index sčítavame).

Prvý člen môžeme zvoliť ako chceme, teda aj rovný nule (tak sme aj urobili pre sférické kyvadlo). Druhý je automaticky rovný nule, je to prvá derivácia v minime potenciálnej energie. Zaujímavý je až tretí člen rozvoja. Všeobecne si to môžeme predstaviť ako na obrázku vedľa. Máme nejaký “kriboľaký” potenciál  $U(q)$  a v okolí minima ho aproximujeme parabolou (resp. kladne definitnou kvadratickou formou). Keď poderivujeme vzťah (2), dostaneme približný tvar  $U$  v okolí minima



$$U_0 = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x-0)^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(y-0)^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2)$$

Lagrangián malých kmitov je

$$L_0 = T_0 - U_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2)$$

Lagrangeove rovnice (všeobecne)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L_0}{\partial q^a} = 0$$

pre náš problém vychádzajú

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{g}{l}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{g}{l}y &= 0 \end{aligned}$$

Sú to aj pohybové rovnice *izotropného rovinného oscilátora* s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

V priblížení malých kmitov sa teda sférické kyvadlo správa ako oscilátor v rovine  $xy$  s pohybovou rovnicou

$$m\ddot{\mathbf{R}} + m\omega^2\mathbf{R} = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y) \quad (3)$$

**Poznámka** (o voľbe súradníc)

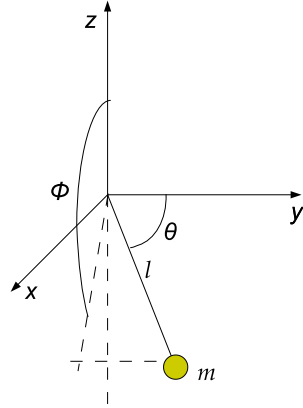
Hovoríme o sférickom kyvadle a slušného človeka ako prvé napadne použiť *sférické súradnice*  $(r, \vartheta, \varphi)$ . Lagrangian by sme našli v tvare

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - mgl(1 + \cos\vartheta)$$

Ak sa pokúsime urobiť rozvoj v okolí minima potenciálnej energie ( $\theta = \pi$ ), narazíme na problém. Približný lagrangian výjde

$$L_0 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}mgl\vartheta^2$$

Z lagrangiánu sa úplne stratila súradnica  $\varphi$  a teda nám chýba jedna pohybová rovnica pre  $\varphi$ . Problém je zhruba taký, že v rovnovážnej polohe  $\vartheta = \pi$  súradnica  $\vartheta$  “končí”. Ak by sme pootočili sférické súradnice tak, aby  $\vartheta$  nekončila v rovnovážnej polohe (obrázok), problémy nenastanú. Bežné sférické súradnice sú teda v rovnovážnej polohe *defektné* a nie sú vhodné na opis malých kmitov. Podobný problém sa vyskytne aj v *cylindrických súradniciach*.

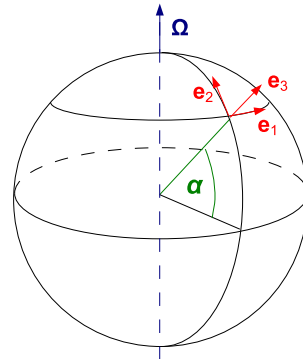


### 3 Pohybové rovnice pre Foucaultovo kyvadlo

Na točiacej sa Zemi bude na kyvadlo pôsobiť aj *Coriolisova sila*

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

kde  $\boldsymbol{\Omega}$  je vektor uhlovej rýchlosti rotácie Zeme. Na Zemi si zavedieme *lokálne* súradnicové osi tak, že  $x$  smeruje na východ,  $y$  na sever a  $z$  zvisle nahor. Jednotkové vektory v smere týchto osí označme  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Uhlovú rýchlosť  $\boldsymbol{\Omega}$  vyjadríme v lokálne zavedenej báze



$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos \alpha \mathbf{e}_2 + \Omega \sin \alpha \mathbf{e}_3$$

kde  $\alpha$  je zemepisná šírka. Vypočítajme vektorový súčin vystupujúci v Coriolisovej sile

$$\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \Omega[(\cos \alpha \dot{z} - \sin \alpha \dot{y})\mathbf{e}_1 + \sin \alpha \dot{x}\mathbf{e}_2 - \cos \alpha \dot{x}\mathbf{e}_3]$$

V priblížení malých kmitov  $\dot{z} = 0$  a zaujímajú nás len zložky sily v rovine  $xy$

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})_{xy} = \Omega(-\sin \alpha \dot{y}\mathbf{e}_1 + \sin \alpha \dot{x}\mathbf{e}_2)$$

To teraz dosadíme do pohybovej rovnice (3) a máme

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{R}} + m\omega^2\mathbf{R} &= -2m(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})_{xy} \\ \ddot{\mathbf{R}} + \omega^2\mathbf{R} &= 2\Omega(\sin \alpha \dot{y}\mathbf{e}_1 - \sin \alpha \dot{x}\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Získavame pohybové rovnice pre Foucaultovo kyvadlo

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 2\Omega \sin \alpha \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= -2\Omega \sin \alpha \dot{x} \end{aligned} \quad (4)$$

## 4 Riešenie rovníc

V rovniciach (4) prejdeme k *bezrozmerným premenným*. Zavedieme

$$\xi \equiv \frac{x}{l} \quad \eta \equiv \frac{y}{l} \quad \tau \equiv \frac{t}{t_0} \equiv \omega t \quad (5)$$

Súradnice sme predelili typickou škálou dĺžok (dĺžka kyvadla  $l$ ) a čas sme predelili typickou škálou času (perióda kmitov kyvadla až na faktor  $2\pi$ ). Rovnice prejdú na

$$\begin{aligned} \xi'' + \xi &= 2\frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha \eta' \\ \eta'' + \eta &= -2\frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha \xi' \end{aligned} \quad (6)$$

Čiarky označujú derivácie podľa  $\tau$ . Na pravej strane vystupujú prvé derivácie s *malým* bezrozmerným parametrom

$$\varepsilon = 2\frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha$$

ktorého absolútnu hodnotu môžeme odhadnúť

$$|\varepsilon| = \left| 2\frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha \right| \leq 2\frac{\Omega}{\omega} = 2\frac{\Omega}{\sqrt{g/l}} = \frac{2 \cdot 2\pi}{24 \cdot 60^2 \sqrt{9.8/67}} \approx 10^{-4}$$

Parameter rádu  $10^{-4}$  je naozaj malý, čo nás oprávňuje v ďalšom robiť isté priblíženia (za  $l$  sme položili  $67 \text{ m}$ , čo je dĺžka Foucaultovho kyvadla v Paríži spomínaná v úvode textu). Ak druhú rovnicu v (6) vynásobíme imaginárnou jednotkou a rovnice spočítame, dostaneme

$$(\xi + i\eta)'' + (\xi + i\eta) = \varepsilon(-i\xi + \eta)' \quad (7)$$

Ak zavedieme

$$\rho \equiv \xi + i\eta$$

teda jednoducho “zakódujeme” polohu v reálnej rovine určenú súradnicami  $(\xi, \eta)$  do bodu v komplexnej rovine určenú komplexným číslom  $\rho$ , rovnica (7) prejde na

$$\begin{aligned} \rho'' + \rho &= -i\varepsilon\rho' \\ \rho'' + i\varepsilon\rho' + \rho &= 0 \end{aligned}$$

Je to homogénna lineárna ODR s konštantnými koeficientami. Riešenie hľadáme v tvare

$$\rho(\tau) = Ce^{\lambda\tau}$$

kde  $C$  môže byť aj komplexné číslo. Parameter  $\lambda$  vychádza

$$\lambda = \frac{-i\varepsilon \pm \sqrt{-\varepsilon^2 - 4}}{2} \approx -i\frac{\varepsilon}{2} \pm i$$

Využili sme, že  $\varepsilon$  je malé. Približné riešenie je<sup>3</sup>

$$\rho(\tau) = e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau} (C_1 e^{i\tau} + C_2 e^{-i\tau}) \quad (8)$$

Pre  $\varepsilon = 0$  je exponenta pred zátvorkou rovná jednej a dostávame riešenie bez Coriolisovej sily. Pre malé  $\tau$  máme práve tento tvar riešenia. Označme ho  $\rho_0(\tau)$ . Naše riešenie (8) má tvar

$$\rho(\tau) = e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau} \rho_0(\tau)$$

Z teórie funkcií komplexnej premennej vieme, že násobenie komplexného čísla výrazom typu  $e^{i\varphi}$  mení jeho fázu, kým veľkosť zostáva rovnaká.

$$\rho(\tau) = e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau} |\rho_0(\tau)| e^{i \arg[\rho_0(\tau)]} = |\rho_0(\tau)| e^{i(\arg[\rho_0(\tau)] - \frac{\varepsilon}{2}\tau)}$$

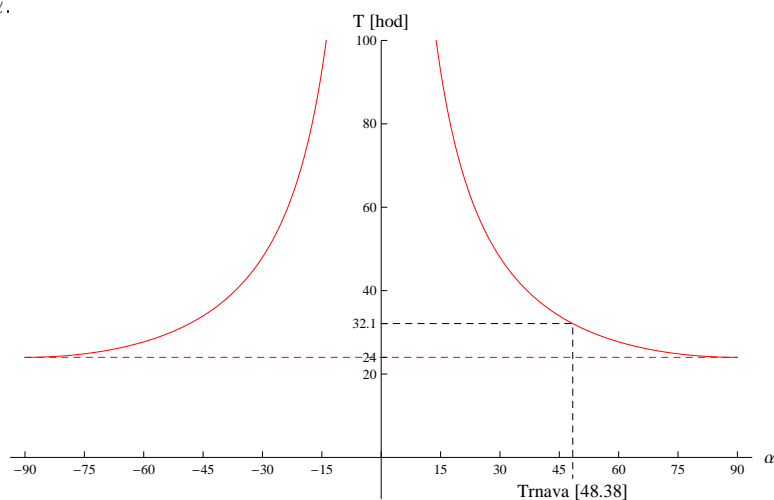
Kmitanie  $\rho_0(\tau)$  sa bude s časom otáčať. Exponenta pred zátvorkou je teda zodpovedná za stáčanie roviny kmitov. Ak  $\varepsilon > 0$ , čo znamená  $\alpha > 0$  (na severnej pologuli), stáčanie bude v smere hodinových ručičiek. Ak  $\varepsilon < 0$  (na južnej pologuli), rovina kmitov sa bude stáčať opačne. O uhol  $2\pi$  sa rovina otočí za čas

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{|\varepsilon|/2}$$

Prejdeme späť k pôvodným premenným a máme

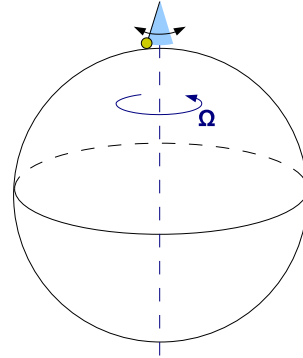
$$\begin{aligned} \omega T &= \frac{2\pi\omega}{\Omega |\sin \alpha|} & \Omega &= \frac{2\pi}{1 \text{ deň}} \\ T &= \frac{1 \text{ deň}}{|\sin \alpha|} \end{aligned}$$

To je čas, za ktorý sa rovina kmitov otočí o  $360^\circ$  v závislosti od zemepisnej šírky  $\alpha$ .



<sup>3</sup>V tomto riešení sú zahrnuté aj všeobecné prípady, keď kyvadlo nekmitá v jednej rovine, ale môže napríklad krúžiť okolo rovnovážnej plochy.

Na póloch ( $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ ) sa rovina kmitov otočí dookola presne raz za deň. Je to intuitívne jasné, keď si predstavíme, že sa na Zem pozeráme z pohľadu *inerciálneho pozorovateľa* (na obrázku vedľa). Vzhľadom naňho kyvadlo kmitá stále v jednej rovine a Zem sa točí pod kyvadlom. Na rovníku sa rovina kmitov nestáča. To je zrejmé, ak si uvedomíme, že Coriolisova sila na rovníku v rovine  $xy$  nepôsobí. V Paríži ( $\alpha = 48,86^\circ$ ) to vychádza približne 31,9 hod, čo je dobrá zhoda s periódou spomínanou v úvode článku (32,7 hod).



Prepíšme si vzťah (8) cez sínusy a kosínusy.

$$\begin{aligned}\rho(\tau) &= \left( \cos \frac{\varepsilon}{2}\tau - i \sin \frac{\varepsilon}{2}\tau \right) [(C_1 + C_2) \cos \tau + i(C_1 - C_2) \sin \tau] = \\ &= \left[ (C_1 + C_2) \cos \frac{\varepsilon}{2}\tau \cos \tau + (C_1 - C_2) \sin \frac{\varepsilon}{2}\tau \sin \tau \right] + \\ &\quad + i \left[ -(C_1 + C_2) \sin \frac{\varepsilon}{2}\tau \cos \tau + (C_1 - C_2) \cos \frac{\varepsilon}{2}\tau \sin \tau \right]\end{aligned}$$

Pre jednoduchosť si zvolíme *počiatočnú podmienku* tak, že kyvadlo pustíme zo severu s nulovou počiatočnou rýchlosťou

$$\rho(0) = 0 + i\eta_0 \quad \rho'(0) = 0 + 0i$$

Trochu sa potrápime a nakoniec nám po aplikovaní týchto podmienok a pár úpravách výjde

$$\rho(\tau) = \underbrace{\eta_0 \left( \sin \frac{\varepsilon}{2}\tau \cos \tau - \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}\tau \sin \tau \right)}_{\xi(\tau)} + i \underbrace{\eta_0 \left( \cos \frac{\varepsilon}{2}\tau \cos \tau + \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2}\tau \sin \tau \right)}_{\eta(\tau)}$$

Takto sme našli závislosť bezrozmerných súradníc  $\xi, \eta$  od "času"  $\tau$ .<sup>4</sup> Jednoduchá kontrola výsledku: pre  $\varepsilon = 0$  máme

$$\rho(\tau) = 0 + i \eta_0 \cos \tau$$

čo sú kmity stále v jednej rovine.

<sup>4</sup>**Poznámka** (o poruchovej metóde)

Rovnaký výsledok (ale v tvare radu v mocninách  $\varepsilon$ ) by sme dostali, keby sme riešili systém (6) poruchovou metódou. Napísali by sme si

$$\begin{aligned}\xi(\tau) &= \xi_0(\tau) + \varepsilon\xi_1(\tau) + \dots \\ \eta(\tau) &= \eta_0(\tau) + \varepsilon\eta_1(\tau) + \dots\end{aligned}$$

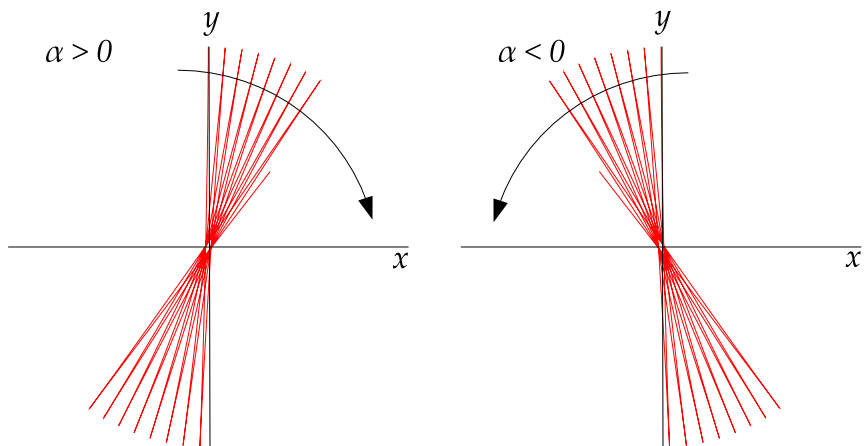
dosadili do rovíc (6), porovnali koeficienty pri rovnakých mocninách  $\varepsilon$  a vyriešili postupne rovnice pre  $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \dots$ .



Keď sa podľa definičných vzťahov (5) vrátíme k rozmerným premenným, dostaneme konečne

$$\begin{aligned} x(t) &= y_0 \sin(\sin \alpha \Omega t) \cos \omega t - y_0 \frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha \cos(\sin \alpha \Omega t) \sin \omega t \\ y(t) &= y_0 \cos(\sin \alpha \Omega t) \cos \omega t + y_0 \frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha \cos(\sin \alpha \Omega t) \sin \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

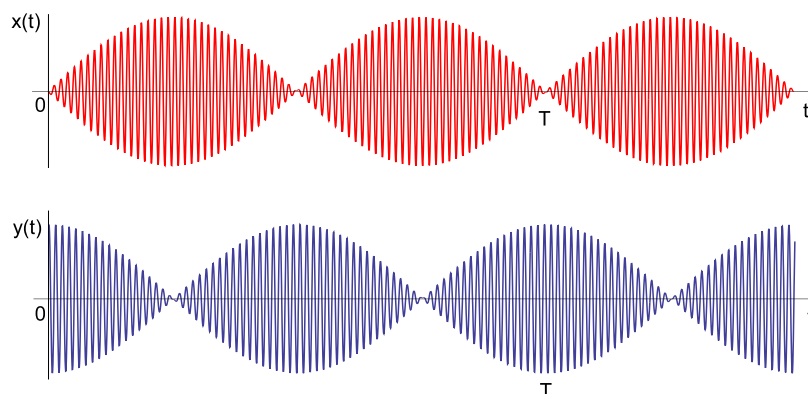
Označili sme  $y_0 \equiv y(0) \equiv \eta_0 l$ . Takto sme našli približnú trajektóriu Foucaultovho kyvadla. Výsledok je zakreslený v nasledujúcom obrázku.<sup>5</sup>



Na severnej pologuli ( $\alpha > 0$ ) sa rovina kmitov stáča v smere hodinových ručičiek, na južnej pologuli ( $\alpha < 0$ ) opačne.

#### **Poznámka** (modulácia)

Vo vzťahoch (9) je dominantný *prvý člen*. Výrazy tohto typu “sínus s malou frekvenciou krát sínus s veľkou frekvenciou” sa vo fyzike vyskytujú na viacerých miestach a poznáme ich pod názvom *modulácia*. Tu sa dá modulácia vidieť v tom, že kmitanie sa bude postupne “prelievať” z osi  $y$  na os  $x$  a opačne.



*Druhý člen* vo vzťahoch (9) je malou korekciou, lebo je násobený malým parametrom  $\frac{\Omega}{\omega}$ .

<sup>5</sup>Efekt stáčania roviny kmitov je prehnaný, aby bolo kvalitatívne vidieť, čo sa deje.