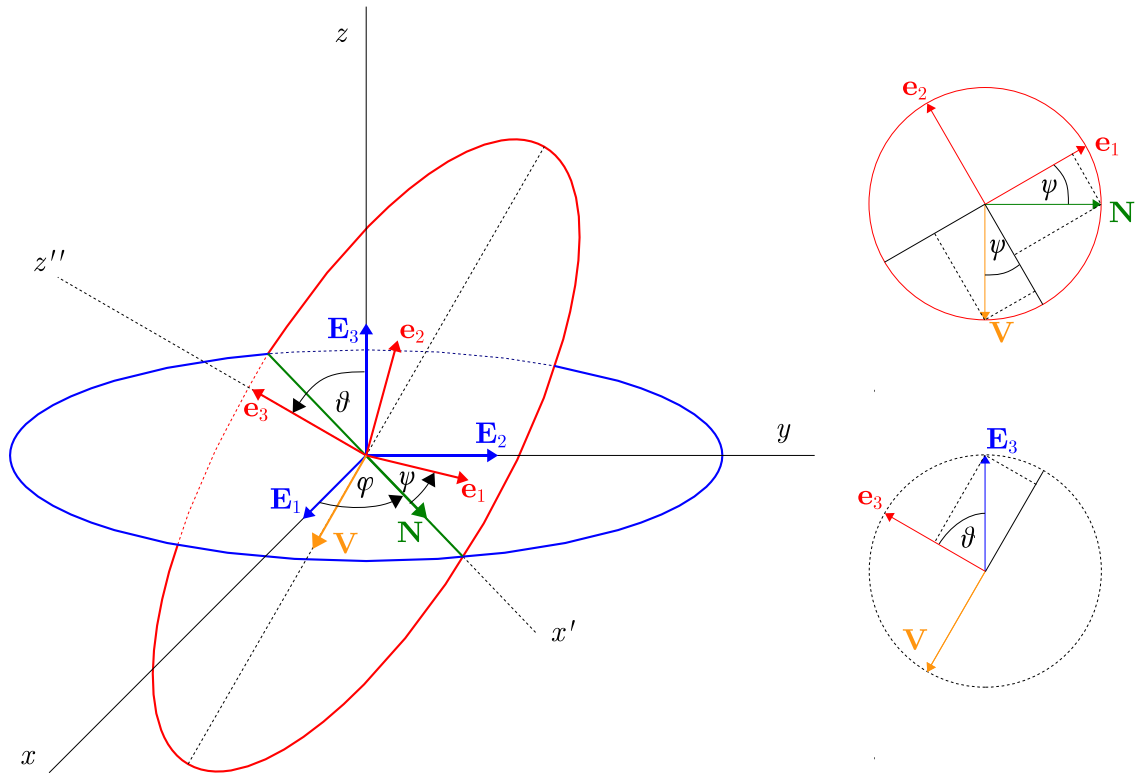


Eulerove kinematické rovnice

Eulerove uhly opisujú ľubovoľné natočenie telesa v prestore. Zoberieme pôvodne natočené teleso (modrá) a postupujeme takto:

1. Otočíme ho okolo osi z (okolo vektora \mathbf{E}_3) o uhol φ .
2. Otočíme ho okolo osi x' (okolo vektora \mathbf{N}) o uhol ϑ .
3. Otočíme ho okolo osi z'' (okolo vektora \mathbf{e}_3) o uhol ψ .

Touto procedúrou sme dostali ľubovoľne otočené teleso (červená).



Eulerove kinematické rovnice hovoria o tom, aký je vzťah medzi zložkami vektora uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ v dvoch bázach - $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a $(\mathbf{E}_3, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3)$. Rozloženie do bázy znamená skladanie otáčaní voči týmto osiam. Takže¹

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &\stackrel{1.}{=} \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \\ &\stackrel{2.}{=} \dot{\varphi} \mathbf{E}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{N} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Aby sme našli vzťah medzi zložkami, vyjadríme vektory \mathbf{E}_3 a \mathbf{N} cez $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Na to si treba nakresliť dva obrázky - situáciu v rovine danej vektormi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a v rovine danej vektormi $\mathbf{E}_3, \mathbf{e}_3$. Z prvého odhalíme \mathbf{N} a pomocný vektor \mathbf{V} , z druhého \mathbf{E}_3 . Takže máme

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{V} &= -\sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_3 &= \cos \vartheta \mathbf{e}_3 - \sin \vartheta \mathbf{V} = \cos \vartheta \mathbf{e}_3 + \sin \vartheta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Dosadíme to do vzťahu pre $\boldsymbol{\omega}$.

$$\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi} [\cos \vartheta \mathbf{e}_3 + \sin \vartheta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2)] + \dot{\vartheta} (\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2) + \dot{\psi} \mathbf{e}_3$$

Porovnáme, čo je pri \mathbf{e}_1 (podobne $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) vľavo a vpravo a dostávame Eulerove kinematické rovnice

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

¹Všetky vektory na obrázkoch majú dĺžku jedna.