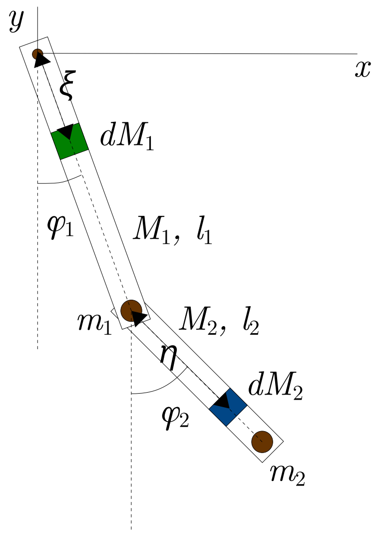
Malé kmity dvojného fyzikálneho kyvadla, teoretický výpočet

Pri výpočte budeme postupovať podľa kuchynského receptu z 10. cvičenia.



$\boxed{\textbf{1.}}$ Kinetickú energiu T dostaneme rutinným spôsobom - zoberieme polohové vektory, obodkujeme ich, nájdeme kvadráty a dosadíme do vzorca.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{1}{2}\int dM_1\dot{\mathbf{r}}_{dM_1}^2 + \frac{1}{2}\int dM_2\dot{\mathbf{r}}_{dM_2}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M_1}{l_1}\int_0^{l_1}\dot{\mathbf{r}}_{dM_1}^2 d\xi + \frac{1}{2}\frac{M_2}{l_2}\int_0^{l_2}\dot{\mathbf{r}}_{dM_2}^2 d\eta \end{aligned}$$

kde sme využili $dM_1 = \rho_1 d\xi = \frac{M_1}{l_1}d\xi$ a podobne pre druhé rameno. Polohové vektory sú

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= l_1(\sin\varphi_1, -\cos\varphi_1) \\ \mathbf{r}_2 &= (l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2, -l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2) \\ \mathbf{r}_{dM_1} &= \xi(\sin\varphi_1, -\cos\varphi_1) \\ \mathbf{r}_{dM_2} &= (l_1\sin\varphi_1 + \eta\sin\varphi_2, -l_1\cos\varphi_1 - \eta\cos\varphi_2) \end{aligned}$$

Po obodkovaní, preintegrovaní a niekoľkých úpravách dostaneme kinetickú energiu v tvare

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{3} + M_2\right)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{M_2}{3}\right)l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Potenciálna energia U bude jednoducho (vždy „mg krát zvislá súradnica ťažiska“)

$$\begin{aligned} U &= -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) - M_1 g\frac{l_1}{2}\cos\varphi_1 - M_2 g\left(l_1\cos\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos\varphi_2\right) \\ &= -\left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{2} + M_2\right)g l_1\cos\varphi_1 - \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)g l_2\cos\varphi_2 \end{aligned}$$

Lagranžián $L = T - U$ nebudeme vypisovať.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Malé kmity sa budú diať v okolí stabilnej rovnovážnej polohy $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Matica kinetickej energie (ozn. T) je

$$\mathrm{T}(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} \left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{3} + M_2\right)l_1^2 & \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) & \left(m_2 + \frac{M_2}{3}\right)l_2^2 \end{pmatrix}$$

preto (konštantná = sú v nej už len čísla!) matica $M \equiv \mathrm{T}(0,0)$ má tvar

$$M = \begin{pmatrix} \left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{3} + M_2\right)l_1^2 & \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)l_1 l_2 \\ \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)l_1 l_2 & \left(m_2 + \frac{M_2}{3}\right)l_2^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

Maticu K získame tak, že rozvinieme U do Taylorovho radu v okolí rovnovážnej polohy ($\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$)

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{2} + M_2\right)g l_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)g l_2\varphi_2^2 + \cdots$$

Člen úmerný $\varphi_1\varphi_2$ tu je nulový, lebo $\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 0$. Takže (konštantná) matica K je

$$K = \begin{pmatrix} \left(m_1 + m_2 + \frac{M_1}{2} + M_2\right)g l_1 & 0 \\ 0 & \left(m_2 + \frac{M_2}{2}\right)g l_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.}$ Lagranžián pre malé kmity je

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot\varphi_1 & \dot\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.}$ Lagrangeove rovnice sú

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6.}$ Dosadenie ansatzu

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cos\omega t \\ k_2 \cos\omega t \end{pmatrix}$$

do rovníc dáva

$$\begin{pmatrix} P - \omega^2 A & -\omega^2 C \\ -\omega^2 C & Q - \omega^2 B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \cos\omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

čo platí pre ľubovoľné t, takže musí platiť

$$\begin{pmatrix} P - \omega^2 A & -\omega^2 C \\ -\omega^2 C & Q - \omega^2 B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{7.}$ Charakteristické frekvencie dostaneme riešením rovnice

$$\det(K - \omega^2 M) = \begin{vmatrix} P - \omega^2 A & -\omega^2 C \\ -\omega^2 C & Q - \omega^2 B \end{vmatrix} = 0$$

Je to kvadratická rovnica pre ω^2. Riešenia sú

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(AQ + BP) \pm \sqrt{(AQ+BP)^2 - 4(AB - C^2)PQ}}{2(AB - C^2)}$$

Spomeňme si, že písmenká $A, \dots, Q$ vlastne označujú funkcie parametrov kyvadla. Našli sme teda charakteristické frekvencie ako komplikované funkcie týchto parametrov, čiže $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(g, l_1, l_2, m_1, m_2, M_1, M_2)$. Periódy módov sa z nich vypočítajú ľahko: $T_{1,2} = \frac{2\pi}{\omega_{1,2}}$. Po dosadení nameraných hodnôt vychádza $T_1 \doteq 1,31\,s$ a $T_2 \doteq 0,61\,s$.

$\boxed{8.}$ Stĺpčeky $\left(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}\right)^T$ a $\left(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}\right)^T$ dostaneme riešením rovníc

$$\begin{pmatrix} P - \omega_{1,2}^2 A & -\omega_{1,2}^2 C \\ -\omega_{1,2}^2 C & Q - \omega_{1,2}^2 B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^{(1,2)} \\ k_2^{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zvlášť pre ω_1 a ω_2. Po trochu otravných úpravách vychádza

$$k_2^{(1,2)} = \frac{(BP - AQ) \mp \sqrt{(AQ+BP)^2 - 4(AB - C^2)PQ}}{2CQ} k_1^{(1,2)}$$

Po dosadení nameraných hodnôt máme stĺpčeky (zavádzame označenie $k_1^{(1,2)} \equiv k$)

$$\begin{pmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1,66 \end{pmatrix} k \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -3,34 \end{pmatrix} k$$

$\boxed{9.}$ Dvojné fyzikálne kyvadlo má teda dva módy.

1. mód: $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,66 \end{pmatrix} k \cos\left(\frac{2\pi}{1,31} t\right)$ **2. mód:** $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,34 \end{pmatrix} k \cos\left(\frac{2\pi}{0,61} t\right)$

V prvom (pomalšom) sú ramená kyvadla vychýlené do tej istej strany a v druhom (rýchlejšom) idú proti sebe.