Cvičenie z Teoretickej mechaniky

1. cvičenie (17.9.2012)

Úvod

Info o cvičiacom

Meno:	Lukáš Tomek
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Miestnosť:	F1 148
Mail:	tomek@fmph.uniba.sk
Stránka:	`http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~tomek/`

Hodnotenie

Spôsob A: treba získať minimálne 15 bodov z 25 možných. Body sa získavajú (krátkymi, 5-15 min.) písomkami, ktoré sú na začiatku každého cvičenia (okrem prvého). Písomky testujú robenie domácich úloh. Počet bodov, ktoré sa dajú získať za jednu písomku, je 0 až 2. Snahou bude pripraviť písomky tak, aby ich bez väčších problémov urobil človek, ktorý si poriadne urobil a rozmyslel domáce úlohy. Z prvého cvičenia je povinná domáca úloha za 1 bod, ktorá sa odovzdáva. (Teda maximálny možný zisk je podrobne: $1 + 12 \times 2 = 25$ bodov.)
Neúčasť na písomke = za každú, počnúc treťou, 2 body dole.
Spôsob B: pozri Feckovu stránku.

Vektorová algebra a analýza

Vzorce z prednášky

δ_{ij}	Kroneckerov symbol
ε_{ijk}	Levi-Civitov symbol
$\delta_{ij} a_j = a_i$	užitočné pozorovanie
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$	Davis-cupová identita
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	skalárny súčin
$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$	vektorový súčin bázových vektorov

Príklady

Niektoré príklady sú zo 40-stranového textu z Feckovej stránky (bude sa uvádzať len číslo príkladu, niekedy však budeme počítať len jeho časť). Ďalšie príklady budú tzv. vymyslené a tie budú explicitne vypísané.

- (0.3), (0.4), (0.6), (0.5), (0.11)

Domáca úloha

Táto domáca úloha je povinná a je možnosť za ňu získať najviac 1 bod.

1. Príklad (0.6), druhá časť.
2. Overiť, že platí
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \triangle\mathbf{E}$$
Toto sa vyskytlo v Elektromagnetizme pri odvodzovaní vlnovej rovnice vo váku.
3. Príklad (0.12), prvá časť.

2. cvičenie (24.9.2012)

Písomka

1. Vypočítať

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

2. Overiť, že platí

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}$$

kde $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú funkcie $\mathbf{r}$.

Vektorová algebra a analýza + Sústava (neviazaných) hmotných bodov

Vzorce z prednášky

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$	Davis-cupová identita
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i$	skalárny súčin
$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\varepsilon_{ijk}a_j b_k)\mathbf{e}_i$ resp. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$	vektorový súčin
$A_{ij}S_{ij} = 0$ kde $A_{ij} = -A_{ji}$ a $S_{ij} = S_{ji}$	užitočné pozorovanie
$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$ resp. $(\operatorname{grad} f)_i = \partial_i f$	gradient
$\operatorname{div}\mathbf{A} = \partial_i A_i$	divergencia
$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A}$ resp. $(\operatorname{rot}\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$	rotácia
$\triangle f = \partial_i\partial_i f$	laplacián
$\mathbf{F}$ je potenciálové pole $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$	nut. a postač. podmienka na potenciálovosť $\mathbf{F}$
$U(\mathbf{r}) := -\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'$ $\mathbf{F} = -\nabla U$	U je potenciálna enegria pre $\mathbf{F}$

Príklady

- Vypočítať

$$\operatorname{div}((\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r})$$

  kde $\mathbf{p}$ je *konštantný* vektor.

- Vypočítať

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

  kde $\mathbf{p}$ je *konštantný* vektor. Toto sa vyskytlo v Elektromagnetizme pri výpočte el. poľa dipólu.

- Overiť, že platí

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{j}) = \operatorname{grad} f\times\mathbf{j} + f\operatorname{rot}\mathbf{j}$$

  kde $f = f(r)$ a $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Tento prepis bol potrebný v Elektromagnetizme pri zavádzaní vektorového magnetického potenciálu $\mathbf{A}$ (tam bolo $f = \frac{1}{r}$).

- (0.13), (0.14), (1.9), (1.12)

Domáca úloha

- Vypočítať

$$\operatorname{rot}[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}]$$

  kde $\mathbf{k}$ je *konštantný* vektor.

- (0.15), (0.16)

- (1.11) – Overiť, že pole je potenciálové a potenciálnu energiu skúsiť hľadať dvoma spôsobmi: 1. použitím vzorca pre potenciálnu energiu, 2. dosadením do výsledku z (0.13).

3. cvičenie (1.10.2012)

Písomka

1. Vypočítať

$$\mathrm{div}\left(e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{r}\right)$$

2. Overiť potenciálovosť poľa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -kr^2\mathbf{r}$ a nájsť jeho potenciálnu energiu $U(\mathbf{r})$.

Väzby

Vzorce z prednášky

$\dot{\bar{p}} = \bar{F} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(r)}$	Newtonove rovnice
$\delta\bar{r}, \quad \phi_\alpha(\bar{r}) = 0$	virtuálne posunutie, holonómne väzby
$\bar{F}^{(r)} \cdot \delta\bar{r} = 0$	virtuálne posunutia sú kolmé na reakciu väzieb

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\alpha = 0 \\ \delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0 \\ (\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)})\cdot\delta\bar{r} = 0 \end{array}\right\} \text{D'Alambertov-Lagrangeov princíp} \qquad \left.\begin{array}{l} \phi_\alpha = 0 \\ \delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0 \\ \bar{F}^{(a)}\cdot\delta\bar{r} = 0 \end{array}\right\} \text{princíp virtuálnych prác}$$

$q^a \leftrightarrow (q^1, \ldots, q^n)$	zovšeobecnené súradnice
$\bar{r}(q) \equiv \bar{r}(q^1, \ldots, q^n)$	parametrizácia konfiguračného priestoru
$\delta\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a}\delta q^a$	virtuálne posunutie v reči zovšeob. súr.

Princíp virtuálnych prác v reči zovšeobecnených súradníc:

$\phi_\alpha = 0$	platí automaticky
$\delta\bar{r}\cdot\bar{\nabla}\phi_\alpha = 0$	platí automaticky
$\bar{F}^{(a)}\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} = 0$	treba naozaj počítať

Príklady

- (1.1)
- (2.1) *i*), (2.2) *i*), (2.3) *i*) kartézskych súradniciach aj v zovšeobecnených súradniciach
- (2.5)

Domáca úloha

- Napísať väzby pre páku (z príkladu (2.5)).
- (2.1) *iii*), (2.2) *iii*), (2.3) *iii*) skúsiť sa potrápiť v kartézskych súradniciach, po chvíli uznať, že to nestojí za to a vypočítať v zovšeobecnených súradniciach
- (1.2)

Ďalšie odporúčané príklady

V tejto časti budú bývať príklady, ktoré nie sú nevyhnutné na prežitie na cviku, ale odporúčajú sa ambicióznejším študentom na prehĺbenie alebo (drobné) rozšírenie vedomostí.

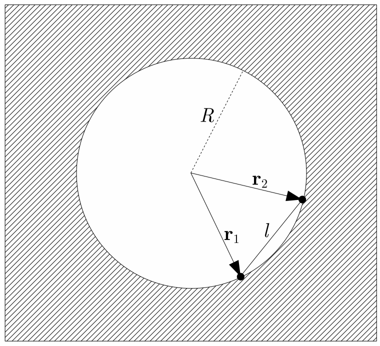
- (1.4) – hľadanie loxodrómy, cesty starých moreplavcov (ďalšie zaujímavé info vo Wikipédii)
- (0.17), (0.18) – príklady na výpočet komplikovanejších plošných integrálov
- (1.14), (2.6)

4. cvičenie (8.10.2012)

Písomka

Palička vo zvislom kruhu.

- Napísať väzby $\phi_\alpha = 0$.
- Zaviesť zovšeobecnené súrdnice $\bar{r}(q) = (...)$.
- Určiť rozmer konfiguračného priestoru dim$M$.



Obr. 1: Obrázok ku písomke.

Lagrangeove rovnice

Vzorce z prednášky

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$	Lagrangeove rovnice
$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, t)$	lagranžián
$T = \frac{1}{2} T_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b \qquad T_{ab} = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b}$	kinetická energia
L nezávisí od $q^a \quad \Rightarrow \quad p_a(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} =$ konšt.	zákon zachovania a-tej zovšeobecnenej hybnosti
L nezávisí od $t \quad \Rightarrow \quad E(q, \dot{q}) := \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L =$ konšt.	zákon zachovania energie

Príklady

- (3a.4), (3a.5),
- Rovinné matematické kyvadlo na pružinke. Napísať L.
- (3a.8)

Domáca úloha

- Rovinné matematické kyvadlo na pružinke. Napísať T, U, L (skúsiť spôsobmi 1) aj 2), ktoré boli uvedené na cvičení) a Lagrangeove rovnice.
- (3a.1), (3a.6), (3a.7), (3a.9), (3a.12)

Ďalšie odporúčané príklady

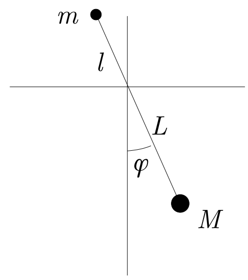
- (2.4) – ešte na D'Alambertov-Lagrangeov princíp

5. cvičenie (15.10.2012)

Písomka

Trochu zložitejšie matematické kyvadlo.

- Napísať T, U, L.
- Napísať Lagrangeove rovnice.
- Nájsť zákony zachovania.



Obr. 2: Obrázok ku písomke.

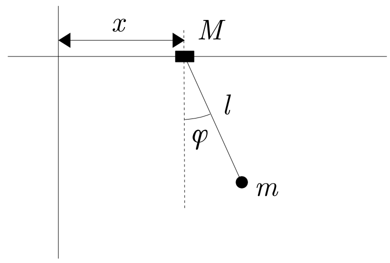
Lagrangeove rovnice

Vzorce z prednášky

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$	Lagrangeove rovnice
$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, t)$	lagranžián
L nezávisí od $q^a \quad \Rightarrow \quad p_a(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \text{konšt.}$	zákon zachovania a-tej zovšeobecnenej hybnosti
L nezávisí od $t \quad \Rightarrow \quad E(q, \dot{q}) := \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L = \text{konšt.}$	zákon zachovania energie
$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^a}$	$U(q, \dot{q}, t)$ je zovšeobecnená potenciálna energia
$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$	Lorentzova sila
$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e(\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$	zovšeobecnená pot. energia pre Lorentzovu silu
$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$	ako sa počítajú polia $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ z potenciálov $\phi, \mathbf{A}$

Príklady

- Rovinné matematické kyvadlo na namastenom drôte. Napísať T, U, L v súradniciach x, φ. Napísať Lagrangeove rovnice. Nájsť zákony zachovania. Prepísať lagranžián do súradníc (ξ, φ), kde ξ je vodorovná súradnica ťažiska systému, a uvidieť, že tieto súradnice neinteragujú. Napísať v týchto súradniciach zákony zachovania.
- Laranžián explicitne závislý od času. Rovinné matematické kyvadlo na namastenom drôte so zadaným pohybom závesu $x(t) \equiv A(t) = A_0 \sin \omega t$.
- (3b.4)



Obr. 3: Rovinné mat. kyv. na namastenom drôte.

Domáca úloha

- (3b.6), (3b.7), robiť postupom z cvičenia, nie dosadzovaním do všeobecných vzťahov z (3b.5)
- (3a.11), (3a.10)

Ďalšie odporúčané príklady

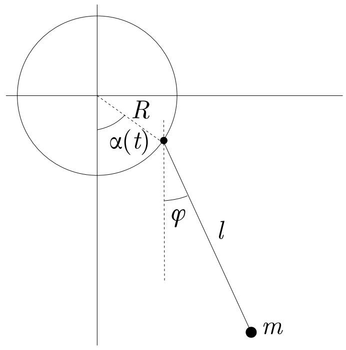
- (3a.13), nezabudnúť započítať momenty zotrvačnosti valcov (vystúpia v kinetickej energii)
- (3b.5)

6. cvičenie (22.10.2012)

Písomka

Rovinné matematické so závesom pohybujúcim sa (zadaným spôsobom $\alpha = \alpha(t)$) po zvislej kružnici.

- Napísať T, U, L.
- Napísať Lagrangeove rovnice.
- Nájsť zákony zachovania.



Obr. 4: Obrázok ku písomke.

Lagrangeove rovnice

Vzorce z prednášky

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$	Lagrangeove rovnice
$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, t)$	lagranžián
L nezávisí od $q^a \quad \Rightarrow \quad p_a(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \text{konšt.}$	zákon zachovania a-tej zovšeobecnenej hybnosti
L nezávisí od $t \quad \Rightarrow \quad E(q, \dot{q}) := \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L = \text{konšt.}$	zákon zachovania energie
$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^a}$	$U(q, \dot{q}, t)$ je zovšeobecnená potenciálna energia

Príklady

- (3b.4) + ansatz v cylindrických súradniciach: $(r(t), \varphi(t), z(t)) = (r_0, \varphi(t), z(t))$
- (3b.1), (3b.3), (3c.1), (3c.2)

Variačný počet

Vzorce z prednášky

$\mathcal{S}[y] := \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y, y', x)\, dx$	funkcionál premennej y
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$	Eulerova diferenciálna rovnica
$\mathcal{L}$ nezávisí od $y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť y
$\mathcal{L}$ nezávisí od $x \quad \Rightarrow \quad y'\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť x

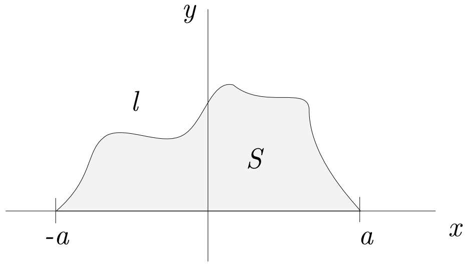
Príklady

- (4.4)

Domáca úloha

Príklady z variačného počtu.

- (4.3)
- Problém kráľovnej Dido. Nájsť tvar krivky v rovine xy fixnej dĺžky l ohraničujúcej maximálnu plochu S.



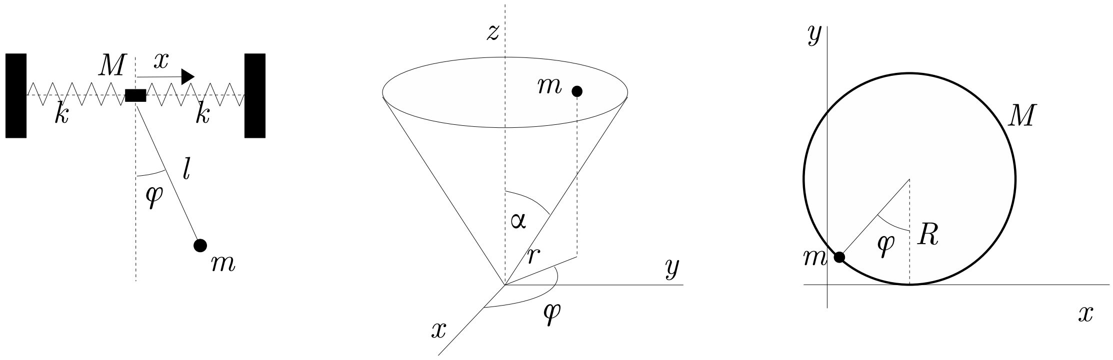
Obr. 5: Problém kráľovnej Dido.

Príklady na Lagrangeove rovnice. Napísať T, U, L, Lagrangeove rovnice a zákony zachovania pre systémy na obrázkoch.

- **Hmotný bod na kuželi.** Hmotný bod sa pohybuje na kuželi. Použiť súradnice r, φ. Nájsť riešenie, ktoré je krúžením v konštantnej výške, použiť ansatz $(r(t), \varphi(t)) = (r_0, \varphi_0 + \omega t)$.
- **Kyvadlo na vodorovných pružinkách.** Pružiny tuhosti k sú upevnené na závažie s hmotnosťou M, ktoré sa môže hýbať len vodorovne. Na M je zavesené kyvadlo s hmotnosťou m. Použiť súradnice x, φ.
- **Koleso so závažím.** Homogénna kružnica s hmotnosťou M s pevne uchyteným závažím s hmotnosťou m na svojom obvode sa kotúľa bez prešmykovania po rovnej ceste. Zovšeobecnená súradnica φ.

Ďalšie odporúčané príklady

- (3b.8), (3b.14)
- (4.6), (4.8)
- Skúsiť si rozmyslieť (4.10).



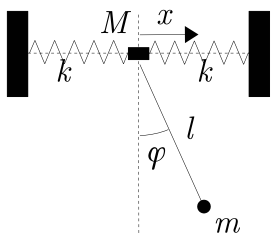
Obr. 6: Kyvadlo na vodorovných pružinkách, Hmotný bod na kuželi a Koleso so závažím.

7. cvičenie (29.10.2012)

Písomka

Kyvadlo na vodorovných pružinkách.

- Napísať T, U, L. Použiť súradnice x, φ.
- Vyšetriť interakciu stupňov voľnosti.
- Napísať Lagrangeove rovnice.
- Nájsť zákony zachovania.



Obr. 7: Obrázok ku písomke.

Variačný počet

Vzorce z prednášky

$\mathcal{S}[y] := \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y, y', x)\, dx$	funkcionál premennej y
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$	Eulerova diferenciálna rovnica
$\mathcal{L}$ nezávisí od $y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť y
$\mathcal{L}$ nezávisí od $x \quad \Rightarrow \quad y'\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = \text{konšt.}$	prvý integrál Eulerovej d. r. za cykličnosť x

Príklady

- (4.5)
- Mydlová blana (katenoid). Vypočítať tvar mydlovej blany, ktorá sa naťahuje na dve súosové kružnice.

Hamiltonove rovnice

Vzorce z prednášky

$H(q, p, t) = p_a \dot{q}^a(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$	hamiltonián
$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$	Hamiltonove rovnice
$L = \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q, t) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}(T^{-1})^{ab} p_a p_b + U$	hamiltonián pre lagranžián uvedenej štruktúry

Príklady

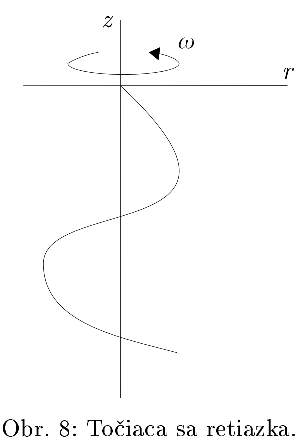
- (5.3) pre situáciu z príkladu (3a.6)
- (5.3) pre závažia na vodorovnom namastenom drôte spojené pružinkou

Domáca úloha

- Prepočítať hamiltoniány z cvičenia druhým spôsobom (prvý príklad cez inverznú maticu a druhý vyjadrením rýchlostí cez hybnosti).
- (5.3) pre situácie z príkladov (3a.7), (3a.4) (tu stačí hamiltonián) a z príkladu *Hmotný bod na kuželi* z predchádzajúcej domácej úlohy. Kto si to chce precvičiť ešte viac, môže zobrať ľubovoľný z „lagranžovských“ príkladov, čo sa počítali a skúsiť urobiť to isté s ním.

Ďalšie odporúčané príklady

- Tomu, koho zaujala úloha o mydlovej blane, odporúčam prečítať si veľmi zrozumiteľný text na túto tému - M. Fecko: Bubliny, kvapky a krivosti (`http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/referaty/bubliny_kvapky_krivosti.pdf`). Ďalšie zaujímavé čítanie je napríklad na stránke `http://math.berkeley.edu/~hutching/pub/bubbles.html`.
- Skúsiť sformulovať v reči variačného počtu problém hľadania tvaru na jednom konci uchytenej točiacej sa retiazky.
- (5.6)



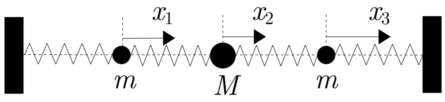
Obr. 8: Točiaca sa retiazka.

8. cvičenie (5.11.2012)

Písomka

Tri závažia na pružinách rovnakej tuhosti k.

- Napísať T, U, L. Použiť súradnice x_1, x_2, x_3.
- Napísať hamiltonián $H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$.
- Napísať Hamiltonove rovnice.



Obr. 9: Obrázok ku písomke.

Hamiltonove rovnice

Vzorce z prednášky

$H(q,p,t) = p_a \dot{q}^a(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$	hamiltonián
$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$	Hamiltonove rovnice
$L = \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q,t) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}(T^{-1})^{ab} p_a p_b + U$	hamiltonián pre lagranžián uvedenej štruktúry
$\phi_t: \quad (q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t))$	fázový tok
Zachováva sa fázový objem $\mathrm{vol} D(t) := \int\limits_{D(t)} dq\, dp$	Liouvillova veta
$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial g}{\partial p_a} \frac{\partial f}{\partial q^a}$	Poissonove zátvorky

Vlastnosti Poissonových zátvoriek:

$\{f_1 + \lambda f_2, g\} = \{f_1, g\} + \lambda \{f_2, g\}$	
$\{f, g_1 + \lambda g_2\} = \{f, g_1\} + \lambda \{f, g_2\}$	bilinearita
$\{f, g\} = -\{g, f\}$	antisymetria
$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$	Jacobiho identita

Príklady

- (5.2), (5.4)
- (5.7) *iv*), (5.11), (5.12) *iii*)
- (5.13)

Domáca úloha

- (5.9), (5.10)
- (5.12) *iii*) – zvyšné príklady, čo sa na cviku nerátali. $\{L_i, L_j\}$ – vyrátať, rozpísať si aj výsledok uvedený v texte a uvidieť, že je to to isté.
- (5.12) *iv*), využiť (5.7) *iv*) a výsledky z (5.12) *i*) – *iii*). Na precvičenie skúsiť vyrátať $\{L_i, \mathbf{r}^2\}$ a $\{L_i, \mathbf{p}^2\}$ aj priamym výpočtom (nevyužiť (5.12) *iii*), ale rozpísať $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$).

9. cvičenie (12.11.2012)

Písomka

Vypočítať Poissonovu zátvorku $\{L_i, \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\}$, kde $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$.

Informácie o pohybe získateľné bez riešenia (pohybových) rovníc

Definície z prednášky

Fázový portrét (pre 1 stupeň voľnosti) sú krivky $E =$ konšt. v rovine qp (vo fázovom priestore).

Škálovanie je preškálovanie premenných a parametrov lagranžiánu tak, že $L \mapsto \lambda L$.

Rozmerová analýza je nástroj na hľadanie a kontrolovanie vzťahov medzi fyzikálnymi veličinami použitím ich jednotiek (rozmerov).

Príklady

- (6.3), (6.4), (6.10), (6.12)

Problém dvoch telies

Vzorce z prednášky

$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r)$	$r = \lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert$	L pre problém 2 telies v premenných $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$		relatívny vektor a ťažisko
$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$		celková a redukovaná hmotnosť
$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$		L pre problém 2 telies v premenných $\mathbf{R}, \mathbf{r}$

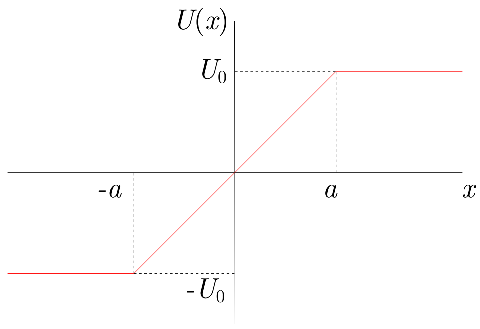
Pohyb ťažiska je nezaujímavý a $\mathbf{L} =$ **konšt.** dáva pohyb v rovine s lagranžiánom:
$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$

Príklady

- (7.5)

Domáca úloha

- Nakresliť fázový portrét pre časticu s hmotnosťou m pohybujúcu sa po priamke v potenciálovom poli s potenciálom $U(x)$ na obrázku.
- (6.11)
- (6.14) i) Hľadať vzorec pre periódu v tvare $T = \lambda R^a \rho^b \kappa^c$ rozmerovou analýzou. ii) Napr. z Newtonových rovníc pre pohyb telesa v gravitačnom poli.



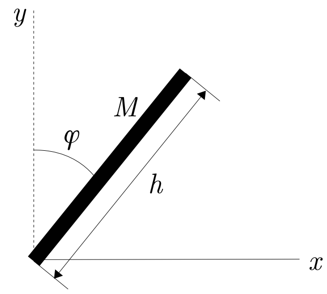
Obr. 10: Obrázok ku domácej úlohe.

Ďalšie odporúčané príklady

- Dobre si premyslieť (6.7)
- (7.6), (7.7), (7.9)

10. cvičenie (19.11.2012)

Písomka



Obr. 11: Obrázok ku písomke.

Odhadnúť dobu pádu 90 m vysokého komína TESLA Vráble pomocou škálovania (napr. z doby pádu ceruzky z vratkej rovnovážnej polohy na lavicu).

- Napísať L.
- Preškálovať potrebné premenné a parametre v L.
- Urobiť odhad doby pádu.

Malé kmity

Kuchynský recept na malé kmity (podľa prednášky)

1. Napísať T, U a z toho $L = T - U$ pre daný systém.
2. Určiť stabilnú rovnovážnu polohu $q_0 \equiv (q_0^1, \dots q_0^n)$.
3. Nájsť matice
$$M_{ab} \equiv T_{ab}(q_0) \qquad \text{a} \qquad K_{ab} \equiv \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}\right|_{q_0}$$
4. Napísať L pre malé kmity
$$L = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{x}_a \dot{x}_b - \frac{1}{2} K_{ab} x_a x_b \qquad\qquad x_a = q^a - q_0^a$$
5. Napísať Lagrangeove rovnice $M_{ab}\ddot{x}_b + K_{ab} x_b = 0$.
6. Dosadenie ansatzu
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \cos\omega t$$
do Lagrangeových rovníc dáva
$$\begin{pmatrix} & & \\ & K - \omega^2 M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \cos\omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
čo platí pre ľubovoľné t. Pre $t = 0$ dostávame sústavu lineárnych algebraických rovníc
$$\begin{pmatrix} & & \\ & K - \omega^2 M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$
7. Sústava (1) má nenulové riešenie $\Leftrightarrow$ matica $(K - \omega^2 M)$ je singulárna, čiže
$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \qquad \text{z čoho dostaneme charakteristické frekvencie} \qquad \omega_1, \dots, \omega_n$$
8. Dosadíme ω_a do rovníc (1) a nájdeme pre každé ω_a stĺpček $\left(k_1^{(a)}, \dots, k_n^{(a)}\right)^T$.
9. Módy sú
$$\textbf{1. mód:} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{(1)} \\ \vdots \\ k_n^{(1)} \end{pmatrix} \cos\omega_1 t \qquad \dots \qquad \textbf{n. mód:} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{(n)} \\ \vdots \\ k_n^{(n)} \end{pmatrix} \cos\omega_n t$$

Príklady

- Vyriešiť malé kmity pre sústavu s lagranžiánom $L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - xy\right)$
- Nájsť charakteristické frekvencie a módy dvojného fyzikálneho kyvadla. Výsledok experimentálne overiť.

Domáca úloha

- (8.1) pre (3a.7), (3a.10). Pre (3a.7) navyše nájsť charakteristickú frekvenciu a pre (3a.10) nájsť charakteristické frekvencie a módy v prípade $n = 3$.
- (8.4), odzačiatku pre $n = 2$. Nie je jednoduché vyjadriť U v zovšeobecnených súradniciach φ_1, φ_2. Jednoduchšie je uhádnuť, ako vyjde Taylorov rozvoj $U(\varphi_1, \varphi_2)$.

Ďalšie odporúčané príklady

- Nájsť charakteristické frekvencie pre *Kyvadlo na vodorovných pružinkách* z domácej úlohy zo 6. cvičenia. Vo výsledku urobiť limitu $M \gg m$ a fyzikálne odôvodniť charakteristické frekvencie tohto špeciálneho prípadu.

11. cvičenie (26.11.2012)

Písomka

Malé kmity guličky vo vani tvaru $z(x, y) = \frac{h}{2} \exp\left(\frac{x^2+4y^2}{d^2}\right)$. Lagranžián vychádza

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{h}{d^2}\exp\left(\frac{x^2+4y^2}{d^2}\right)(x\dot{x}+4y\dot{y})\right)^2\right] - \frac{1}{2}mgh\exp\left(\frac{x^2+4y^2}{d^2}\right)$$

- Napísať matice M a K vchádzajúce do lagranžiánu pre malé kmity.
- Určiť frekvencie ω_1 a ω_2 malých kmitov.

Malé kmity

Vzorce z prednášky

Viď. kuchynský recept z predchádzajúceho cvičenia.

Príklady

- (8.6), (8.3)

Pohybové rovnice v neinerciálnej vzťažnej sústave

Vzorce z prednášky

$\mathbf{R}(t)$	poloh. vektor počiatku neinerc. súst. voči inerc. súst.
$\mathbf{r}(t)$	polohový vektor voči neinerc. sústave
$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}(t)$	polohový vektor voči inerc. sústave
$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}, t)$	Newtonove rovnice v inerc. sústave
$m\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, t) - m\ddot{\mathbf{R}}$ kde $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)+\mathbf{r}, t)$	Newtonove rovnice v neinerc. sústave
$\mathbf{e}_i$	báza stojaca v inerc. sústave
$\mathbf{e}_\alpha(t)$	báza stojaca v neinerc. sústave
$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i = x_\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(t)$	polohový vektor $\mathbf{r}$ v rozložený podľa báz
$\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$	vektor $\mathbf{b}$ sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$
$\dot{\mathbf{e}}_\alpha = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\alpha(t)$	neinerc. sa otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}(t)$ voči inerc.
$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$	druhá derivácia $\mathbf{r}$ vzhľadom na (točiacu sa) bázu $\mathbf{e}_\alpha$
$\mathbf{v} \equiv \dot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha \quad \mathbf{a} \equiv \ddot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha$	rýchlosť a zrýchlenie vzhľadom na neinerciálnu sústavu

Newtonove rovnice v neinerciálnej sústave majú celkovo tvar:

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\mathcal{F}} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Odstreď}}$$

Príklady

- (9.10)

Domáca úloha

- Poriadne si rozmysieť všetky sily v neinerciálnej sústave. Na príkladoch zo života si rozmyslieť, ktorá je ktorá a ktorým smerom pôsobí. Porozprávať sa o tom so spolužiakmi.

Rozmyslieť si odpovede na otázky:

- Hneď ako vlak zabrzdí, trhne cestujúcich dozadu (proti bývalému smeru pohybu vlaku). Prečo?
- Ako treba vyskakovať z (pomaly) idúceho vlaku, aby sme minimalizovali riziko zranenia? (Radšej neoverujte experimentálne.)
- Prečo sú u nás pravé brehy veľkých riek viac podomleté, než ľavé?

Ďalšie odporúčané príklady

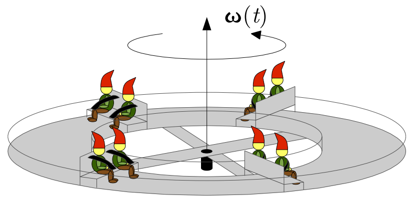
- Vypočítať frekvenciu malých kmitov systému *Koleso so závažím* z domácej úlohy zo 6. cvičenia. Zamyslieť sa nad limitami $M \gg m$, $M \ll m$.

12. cvičenie (3.12.2012)

Písomka

Aké sily cítim, keď sedím na roztáčajúcom sa kolotoči a ktorým smerom pôsobia? Pomôcť si Newtonovými rovnicami v neinerciálnej sústave

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\mathcal{F}} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{Odstreď}}$$



Obr. 12: Obrázok ku písomke.

Mechanika tuhého telesa

Vzorce z prednášky

$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j \equiv \frac{1}{2}I(\omega,\omega)$	rotačná kinetická energia tuhého telesa (voči ťažisku)
$L_i = I_{ij}\omega_j$	i-ta zložka momentu hybnosti
$I_{ij} := \int\limits_V \rho dV(\mathbf{r}^2\delta_{ij} - x_i x_j)$	tenzor zotrvačnosti
$I(\mathbf{n},\mathbf{n}) \equiv I_{ij}n_i n_j = \int\limits_V \rho dV(\underbrace{\mathbf{r}^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})^2}_{\mathbf{r}_\perp^2})$	moment zotrvačnosti voči osi danej vektorom $\mathbf{n}$

Príklady

- (10.2) *iii*) a *iv*)
- Ťažký symetrický zotrvačník. Riešenie v kvadratúrach. Ansatz: regulárna precesia. Špeciálny prípad $g = 0$ (voľný zotrvačník). Experimentálne overenie výsledku pre lietajúci tanier.

Domáca úloha

- (10.2) *i*) a *ii*)
- Vypočítať tenzor (celý) zotrvačnosti valca s polomerom R, výškou h a s hmotnosťou M.
- Vypočítať $I_{33} \equiv I_{zz}$ tenzora zotrvačnosti (plného) rotačného paraboloidu daného rovnicou $z(r) = \frac{1}{R}r^2$ s polomerom R a hmotnosťou M.

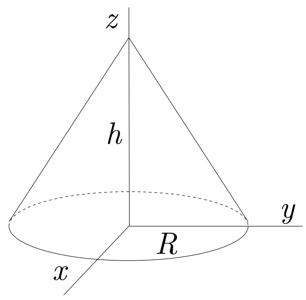
Ďalšie odporúčané príklady

- (9.1) Je to príklad na zovšeobecnenú potenciálnu energiu (závislú od rýchlosti, inú než Lorentzovu).

13. cvičenie (10.12.2011)

Písomka

Nájsť zložku $I_{33} \equiv I_{zz}$ tenzora zotrvačnosti vianočného stromčeka z Tesca tvaru kužeľa s polomerom základne R, výškou h a s hmotnosťou M. Výsledok vyjadriť cez R, h, M.



Obr. 13: Obrázok ku písomke.

Mechanika spojitého prostredia (kontinua)

Vzorce z prednášky

$\rho\,(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g}$	Eulerova rovnica
$\rho\,(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \eta\,(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \triangle\mathbf{v})$	Navierova-Stokesova rovnica
$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$	rovnica kontinuity
$\partial_t \mathbf{v} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$	stacionárne prúdenie, nevírové prúdenie
$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$	tenzor deformácie
$\vartheta \equiv \varepsilon_{ii} = \partial_i u_i \equiv \mathrm{div}\mathbf{u}$	objemová dilatácia

Príklady

- (11.6) *ii*)
- (11.9), (0.19)
- (11.13)

Domáca úloha

- Užiť si sviatky.
- Poriadne sa pripraviť na skúšku.

Ďalšie odporúčané príklady

- Zapojiť sa do Študentskej ankety FMFI.
- Prečítať si článok Mariána Fecka z .týždňa (13. júla 2009) o tečení vody `http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/referaty/Voda_tyzden.jpg`