

# Cvičenie z Teórie elektromagnetického poľa

## 1. cvičenie (13.2.2012)

### Úvod

#### Info o cvičiacom

*Meno:* Lukáš Tomek  
*Katedra:* Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky  
*Oddelenie:* Oddelenie didaktiky fyziky  
*Miestnosť:* F1 148  
*Mail:* tomek@fmph.uniba.sk  
*Stránka:* <http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~tomek/>

#### Hodnotenie

Práca za semester predstavuje 20 % z celkového hodnotenia predmetu. Skúška je za 8 bodov a práca počas semestra za 2 body. Body sa počas semestra získavajú vypracovaním niekoľkých (zhruba štyroch) dlhších domácich úloh.

#### Základné vzťahy elektrodynamiky vo vákuu

##### Vzorce z prednášky

$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$	Coulombov zákon + princíp superpozície
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	Faradayov zákon elmag indukcie
$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$	neexistencia magnetických nábojov (monopólov)
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	Ampérov zákon + Maxwellov posuvný prúd
$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$	materiálové vzťahy vo vákuu
$\partial_t\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$	rovnica kontinuity

#### Príklady

Väčšina príkladov je zo skript, ktoré nájdete na stránke Martina Mojžiša (bude sa uvádzať len číslo príkladu v tvare (kapitola.podkapitola.príklad), niekedy však budeme počítať len jeho časť). Ďalšie príklady budú z iných kníh alebo tzv. vymyslené a ich zadania budú explicitne vypísané.

- (I.1.1), (I.1.2), (I.1.4)

## 2. cvičenie (20.2.2012)

#### Základné vzťahy elektrodynamiky v látkach

##### Vzorce z prednášky

$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$	Ohmov zákon
$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$	exponenciálny pokles hustoty náboja v kovoch

#### Príklady

- (I.1.3), (I.2.1) a), b), c) + výpočet exponenciálneho útlmu elmag vln v kovoch

#### Ďalšie odporúčané príklady

Neopovinná domáca úloha, neodovzdáva sa. Služi len na zopakovanie si jednoduchých výpočtov z Elektromagnetizmu.

- (I.2.2)

### 3. cvičenie (27.2.2012)

#### Zákony zachovania pre elektromagnetické pole

##### Vzorce z prednášky

$$\begin{aligned}\partial_t u + \operatorname{div} \mathbf{S} &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \\ u &= \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

zákon zachovania energie  
hustota energie elmag poľa  
hustota toku energie elmag poľa  
hustota výkonu Lorentzovej sily (rýchlosť zmeny hustoty energie pohybujúcich sa nábojov)  
zákon zachovania hybnosti  
hustota hybnosti elmag poľa  
zložky tenzora hustoty toku hybnosti elmag poľa  
hustota Lorentzovej sily

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{T} &= -\mathbf{f} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{D} \times \mathbf{B} \\ T_{ij} &= u\delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j \\ \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

##### Príklady

- (I.3.1), (I.3.2), (I.3.4) a), (I.3.3) a)

### Doplňkové cvičenie (27.2.2012)

#### Odraz a lom rovinnej elektromagnetickej vlny

Odvodenie zákona odrazu, (Snellovho) zákona lomu a Fresnelových vzťahov pre koeficient odrazu a prechodu (pomery dopadajúcej a odrazenej, resp. dopadajúcej a prejdenej energie) z hraničných podmienok pre elmag polia. (Podľa kapitoly 9.3 z knihy D. Griffiths - Introduction to Electrodynamics.)

##### Vzorce z prednášky

Hraničné podmienky

$$\begin{aligned}D_2^\perp - D_1^\perp &= \eta \\ E_1^\parallel &= E_2^\parallel \\ B_1^\perp &= B_2^\perp \\ H_2^\parallel - H_1^\parallel &= k^\perp\end{aligned}$$

##### Príklady

- (I.2.3)

### 4. cvičenie (5.3.2012)

#### Zákony zachovania pre elektromagnetické pole

##### Vzorce z prednášky

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{l} + \operatorname{div} \mathbf{M} &= -\mathbf{r} \times \mathbf{f} \\ \mathbf{l} &= \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ M_{il} &= \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{f}\end{aligned}$$

zákon zachovania momentu hybnosti  
hustota momentu hybnosti elmag poľa  
zložky tenzora hustoty toku momentu hybnosti elmag poľa  
hustota momentu Lorentzovej sily

##### Príklady

- Odkiaľ vidno, že pri jednosmernom prúde je  $\mathbf{j}$  konštantné v priereze vodiča?
- Odvodenie vzťahu  $F_i = -\oint_S T_{ij} dS_j$  pre celkovú silu pôsobiacu na náboje uzavreté plochou  $S$ .
- Podobne vzťah  $N_i = -\oint_S M_{ij} dS_j$  pre celkový moment sily pôsobiaci na náboje uzavreté plochou  $S$ .
- (I.3.3) b), (I.3.4) b)

## Elektromagnetické potenciály

### Vzorce z prednášky

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \partial_t \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad \text{elmag polia cez elmag potenciály}$$

### Príklady

- (I.4.1) b)

### Domáca úloha

Táto domáca úloha sa odovzdáva a je za 5 bodov (z celkových 20, ktoré sa nakonci preškalujú na 2). Nie je to (výpočtovo) nič ťažké, ide hlavne o precvičenie nových pojmov. Úloha sa odovzdáva na začiatku budúceho cvičenia (12.3.).

- (I.3.3) c)

Aké musí byť  $B$ , aby zadané polia  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  spĺňali Maxwellove rovnice? Vo výpočtoch pracujte s týmto špecifikovaným  $B$ . Overte, že platia všetky tri zákony zachovania (energie, hybnosti, momentu hybnosti).

### Ďalšie odporúčané príklady

Nepovinná domáca úloha - neodovzdáva sa.

- (I.4.1) a), c)
- Preveriť zákon zachovania energie v príklade (I.3.4) a) vo vodiči aj mimo neho.

## 5. cvičenie (12.3.2012)

### Elektromagnetické potenciály

#### Vzorce z prednášky

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \partial_t \mathbf{A} & \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} & \text{elmag polia cez elmag potenciály} \\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi - \partial_t \Lambda & \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \Lambda & \text{kalibračné transformácie} \end{array}$$

### Príklady

- (I.4.2) a), b), d), (I.4.3) a), b)

### Poissonova rovnica a jednoznačnosť jej riešenia

#### Vzorce z prednášky

$$\begin{array}{ll} \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} & \varphi(\mathbf{r})|_S = f(\mathbf{r}) \\ \int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{dS} & \text{Dirichletova úloha pre Poissonovu rovnicu} \\ & \text{Greenova identita} \end{array}$$

### Príklady

- (II.1.1)

## 6. cvičenie (19.3.2012)

### Poissonova rovnica a jednoznačnosť jej riešenia

#### Vzorce z prednášky

$$\begin{array}{ll} \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} & \varphi(\mathbf{r})|_S = f(\mathbf{r}) \\ Q_i = C_{ij} V_j & \text{Dirichletova úloha pre Poissonovu rovnicu} \\ & \text{náboj na } i\text{-tom vodiči závisí lineárne od potenciálov} \\ & \text{na všetkých vodičoch} \end{array}$$

### Príklady

- (II.1.2), (II.1.3)

## Domáca úloha

Táto domáca úloha sa odovzdáva a je za 5 bodov. Úloha sa odovzdáva na začiatku cvičenia, ktoré bude 2.4.

- (II.1.4) d)

Riešte zvlášť pre umiestnenie náboja  $q$  vonku ( $l > R$ ) a zvlášť vnútri ( $l < R$ ). V oboch prípadoch napíšte:

- $\varphi_{in}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r})$  vnútri izolovanej sféry a plošnú hustotu náboja  $\sigma_{in}$  na vnútornom povrchu sféry.
- $\varphi_{out}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r})$  vonku a plošnú hustotu náboja  $\sigma_{out}$  na vonkajšom povrchu sféry.
- Celkovú silu  $\mathbf{F}_q$ , ktorou pôsobí sféra na náboj  $q$ .

V prípade  $l > R$  overte integráciou plošnej hustoty, že celkový náboj na sfére je naozaj  $Q$ . Silu  $\mathbf{F}_q$  nepočítajte integráciou, stačí jednoduchším spôsobom. V úlohe použite výsledky príkladu (II.1.3).

*Návod pre  $l < R$ :* Potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  napíšte tak, aby spĺňal okrajovú podmienku  $\varphi(\mathbf{r})|_S = V$  s neznámou hodnotou  $V$ . Nakoniec toto  $V$  špecifikujte tak, aby celkový náboj na sfére bol  $Q$ .

## 7. cvičenie (26.3.2012)

### Poissonova rovnica a jednoznačnosť jej riešenia

#### Metóda imaginárnych nábojov (kuchynský recept):

*Úloha:* Nájsť elektrické pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  konkrétneho rozloženia nábojov v priestore ohraničenom uzavretou *vodivou* plochou, na ktorej je zadaná hodnota potenciálu  $\varphi(\mathbf{r})|_S = V$ .

Namiesto pôvodnej úlohy riešime *novú úlohu*:

- *Mimo* uvažovaný priestor umiestnime imaginárne náboje tak, aby sme spolu so zadaným rozložením náboja dosiahli  $\varphi(\mathbf{r})|_S = V$ .
- Riešenie novej úlohy = Coulombov zákon + princíp superpozície.

Veta o jednoznačnosti (riešenia Dirichletovej úlohy pre Poissonovu rovnicu)  $\Rightarrow$  riešenie pôvodnej úlohy je v pôvodnom ohraničenom priestore totožné s riešením novej úlohy.

#### Príklady

- (II.1.4) a)

#### Ďalšie odporúčané príklady

Nasledujúce príklady (podobné tomu z cvičenia a domácej úlohy) odporúčam mať aspoň rozmyslené (najneskôr pred skúškou).

- (II.1.4) b), c)

Koho to zaujíma, môže si pozrieť ešte jeden veľmi vtipný príklad - sféra v homogénnom elektrickom poli, ktorý sa dá riešiť pomocou imaginárnych nábojov.

- (II.1.5)

V knihe *D.Griffiths - Introduction to electrodynamics* sú ďalšie príklady na použitie metódy imaginárnych nábojov.

- Problem 3.10 a 3.11

## 8. cvičenie (2.4.2012)

### Riešenie Poissonovej rovnice metódou separácie premenných

#### Vzorce z prednášky

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} & \varphi(\mathbf{r})|_S &= f(\mathbf{r}) \\ \varphi &= \varphi_P + \varphi_L \\ \Delta\varphi_P &= -\frac{\rho}{\varepsilon} & \varphi(\mathbf{r})|_S &= 0 \\ \Delta\varphi_L &= 0 & \varphi(\mathbf{r})|_S &= f(\mathbf{r}) \\ \varphi_L &= X(x)Y(y) \\ \varphi_L(x, y) &= \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{L_x} \sinh \frac{n\pi y}{L_y} \\ a_n &= \frac{1}{\sinh \frac{n\pi L_y}{L_x}} \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L_x} dx \\ \Delta\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n & \varphi_n|_S &= 0 & \lambda_n < 0 \\ f(\mathbf{r}) &= \sum_n c_n \varphi_n(\mathbf{r}) & \int \varphi_m^* \varphi_n d^3r &= \delta_{mn} \\ \sum_n c_n \varphi_n(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon} \\ c_n &= -\frac{1}{\varepsilon} \int \varphi_n^*(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r \\ \varphi_P(\mathbf{r}) &= \sum_n c_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(\mathbf{r}) \\ \varphi_P(x, y) &= \sum_{m,n} c_{mn} \frac{1}{\lambda_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \\ \lambda_{mn} &= -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \\ c_{mn} &= \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} c_n(x) \sin \frac{m\pi x}{L_x} dx \\ c_n(x) &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} \rho(x, y) \sin \frac{n\pi y}{L_y} dy \end{aligned}$$

Dirichletova úloha pre Poissonovu rovnicu  
rozdelenie riešenia  
Poissonova rovnica s nulovými okr. podm. (OP)  
Laplaceova rovnica so zadanými OP  
Separácia premenných v obdĺžnikovej oblasti  
riešenie pre OP: všade 0, len  $\varphi(x, L_y) = f(x)$   
koeficienty Fourierovno radu  
 $\varphi_n$  je vlastná funkcia laplaciánu s vlastnou hodnotou  $\lambda_n$   
vlastné funkcie tvoria úplný a ortonormálny systém  
rozvoj pravej strany Poisson. rovnice do vl. funkcií  $\Delta$   
koeficienty rozvoja do vlastných funkcií  
riešenie Poissonovej rovnice s nulovými OP  
riešenie pre obdĺžnikovú oblasť  
vlastné hodnoty  
koeficienty Fourierovno radu

#### Príklady

- (II.2.1)

#### Domáca úloha

Úloha sa odovzdáva na začiatku cvičenia 16.4.

##### Príklad 1

Nájdite potenciál  $\varphi(x, y)$  vo vnútri obdĺžnika  $\Omega = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$ , ak sú na hranici  $\partial\Omega$  zadané Dirichletove okrajové podmienky (OP)

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x, L_y) = V \frac{x}{L_x} \quad \varphi(0, y) = 0 \quad \varphi(L_x, y) = V \left(1 + \sin \frac{\pi y}{L_y}\right)$$

a vnútri obdĺžnika hustota náboja

$$\rho(x, y) = \rho_0 \frac{y}{L_y}$$

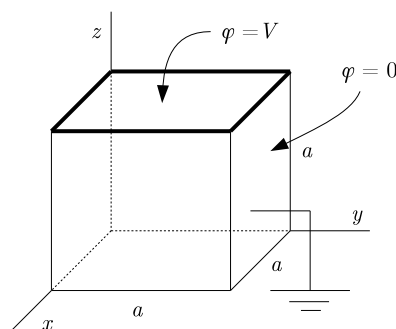
*Návod:* Riešenie hľadať ako superpozíciu  $\varphi = \varphi_L + \varphi_P$ , pričom  $\varphi_L$  spĺňa Laplaceovu rovnicu so zadanými OP a  $\varphi_P$  spĺňa Poissonovu rovnicu s nulovými OP. Časť  $\varphi_L$  hľadať ako superpozíciu  $\varphi_L = \varphi_0 + \varphi_1$ , pričom  $\varphi_0$  požadovať v tvare  $\varphi_0 = A + Bx + Cy + Dxy$  (spĺňa Laplaceovu rovnicu) a určiť  $A, B, C, D$  tak, aby sa zabezpečilo, že pre  $\varphi_1$  zostane OP  $\varphi_1|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} - \varphi_0|_{\partial\Omega}$ , ktorá má nuly v rohoch (viď. prednáška).

##### Príklad 2

(Problem 3.15 z Griffithsa) Nájdite potenciál  $\varphi(x, y, z)$  vo vnútri prázdnej ( $\rho = 0$ ) kovovej krabice v tvare kocky (hrana  $a$ ), ktorej 5 stien je uzemnených a vrchný poklop je od nich odizolovaný a pripojený na potenciál  $V$ .

*Návod:* Okrajové podmienky sú nespojité a nenuly v rohoch sa nedajú vybaviť trikcom analogickým  $\varphi_0$  z prvého príkladu. Fourier si s tým však poradí. Metódou separácie premenných sa dopracujte ku vzťahu

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \sinh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi z}{a}$$



Je to len špeciálny prípad ( $L_x = L_y = a$ ) vzorca, čo ste si mali sami odvodiť na prednáške (v skriptách je na str. 49). Treba už len nájsť koeficienty  $c_{mn}$  Fourierovho radu tak, aby platilo  $\varphi(x, y, a) = V$ . Vyjde to tak, že  $c_{mn} \neq 0$  len pre  $m, n$  nepárne. Nemusíte to zapisovať cez nejaké „ $2k + 1$ “, aby vzorec nevyzeral príliš zložito. Stačí, ak pod znak sumy napíšete  $m, n = 1, 3, 5, \dots$

*Nepovinný dodatok pre fajšmekrov:* Máme  $\varphi$ , takže vieme vypočítať  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  a z neho (z hraničných podmienok pre elmag. polia)  $\sigma$  na jednotlivých stenách krabice. Lenže na výpočet  $\mathbf{E}$  treba derivovať  $\varphi$ , ktoré je nekonečným funkcionálnym radom. Na to, aby sme boli oprávnení derivovať ho člen po člene, musia byť splnené isté podmienky (viď. Matematika 3). Problém je v tom, že v krabici tie 3 derivované rady nekonvergujú rovnomerne. Nemám to úplne domyslené (a budem rád, ak to niekto domyslí), ale pravdepodobne konvergujú rovnomerne len na akejkolvek časti krabice, ktorá sa nedotýka vrchnáku a preto  $\mathbf{E}$  vieme vyrátať všade, len nie na vrchnáku a tým pádom nevieme touto metódou vypočítať  $\sigma$  na vrchnáku (na uzemnených stenách by nemal byť problém). Celý problém pravdepodobne vzniká na základe nespojitosti OP.

## 9. cvičenie (16.4.2012)

### Riešenie Poissonovej rovnice metódou separácie premenných

#### Príklady

- (II.2.4) a)

### Riešenie Poissonovej rovnice metódou Greenovej funkcie

#### Vzorce z prednášky

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$	definičná vlastnosť Diracovej $\delta$ -funkcie
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$	$\delta$ -funkcia s posunutým argumentom
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{ a }f(0) \quad a \neq 0$	$\delta$ -funkcia s argumentom násobeným konštantou
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_n \frac{1}{ g'(x_n) }f(x_n) \quad g(x_n) = 0$	$\delta$ -funkcia s argumentom $g(x) =$ slušná funkcia
$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \sin \frac{x}{\varepsilon}$	Dirichletova reprezentácia $\delta$ -funkcie
$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K e^{ikx} dk$	Fourierova reprezentácia $\delta$ -funkcie
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$	3-rozmerná $\delta$ -funkcia v kartézskych súradniciach
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r')\delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi')$	3-rozmerná $\delta$ -funkcia vo sférických súradniciach
$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') _S = 0$	definícia Greenovej funkcie
$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r' + \oint_S f(\mathbf{r}')\partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')dS'$	magic rule (riešenie úlohy $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi _S = f$ )

#### Príklady

- (II.3.1), (II.3.2), (II.3.3)

#### Ďalšie odporúčané príklady

- (II.2.4) b) - Osožné cvičenie, laplacián vo sférických súradniciach. Je fajn si to raz za život vypočítať. Výsledok sa bude používať v kvantovej mechanike.

*Návod:* Napísať si vzťahy  $r(x, y, z), \vartheta(x, y, z), \varphi(x, y, z)$  a počítať  $\Delta f(r, \vartheta, \varphi) \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)f(r, \vartheta, \varphi)$  ako derivácie zloženej funkcie podobne, ako sme to robili na cviku v cylindrických súradniciach. Výsledok je:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- (II.3.4) - ešte jeden príklad na magic rule

## 10. cvičenie (23.4.2012)

### Riešenie Poissonovej rovnice metódou Greenovej funkcie

#### Vzorce z prednášky

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum \varphi_n^*(\mathbf{r}') \varphi_n(\mathbf{r})$$

reprez.  $\delta$ -funkcie cez úplný systém ortonorm. f-cí

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(\mathbf{r}') \varphi_n^*(\mathbf{r})$$

Greenova funkcia pre Poisson. rovniciu cez vlastné f-cie  $\Delta$

#### Príklady

- (II.3.5)

### Vlny v jednom rozmere

#### Vzorce z prednášky

$$\partial_x^2 u(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, t) = 0$$

vlnová rovnica v jednom rozmere

$$u(x, 0) = f(x) \quad \partial_t u(x, 0) = h(x)$$

počiatočné podmienky

Fourierovo riešenie pre pevné konce

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + c'_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \omega_n = k_n v$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx \quad c'_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

#### Príklady

- **Brnknutie na gitare.** Farba tónu, ktorý vydáva struna, sa mení podľa toho, v akej vzdialenosti od kraja do nej brnkne. Kvantitatívne vysvetlite tento jav.
- (III.1.3)

#### Ďalšie odporúčané príklady

- (III.1.2) a) - ešte jeden príklad na Fourierovo riešenie na strune (komu sa mánilo brnknutie na gitare)

## 11. cvičenie (30.4.2012)

### Vlny v jednom rozmere

#### Vzorce z prednášky

$$\partial_x^2 u(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, t) = 0$$

vlnová rovnica v jednom rozmere

$$u(x, 0) = f(x) \quad \partial_t u(x, 0) = g(x)$$

počiatočné podmienky

D'Alembertovo riešenie

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+vt) + f(x-vt)] + \frac{1}{2} [H(x+vt) - H(x-vt)] \quad H(x) = \frac{1}{v} \int_0^x h(x') dx'$$

Fourierovo riešenie na priamke

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [c(k) \sin kx \cos \omega t + c'(k) \sin kx \sin \omega t + \bar{c}(k) \cos kx \cos \omega t + \bar{c}'(k) \cos kx \sin \omega t] dk \quad \omega = kv$$

$$c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx \quad c'(k) = \frac{1}{\omega(k)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin kx dx$$

$$\bar{c}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx \quad \bar{c}'(k) = \frac{1}{\omega(k)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos kx dx$$

#### Príklady

- (III.1.1), (III.1.2) b), (III.1.4)

## 12. cvičenie (7.5.2012)

### Vlny v troch rozmeroch

#### Príklady

- Krátky úvod do akustiky
- (III.2.1) a) Panova flauta

#### Domáca úloha

Úloha sa odovzdáva na začiatku cvičenia 14.5.

#### Píšťala koncovka

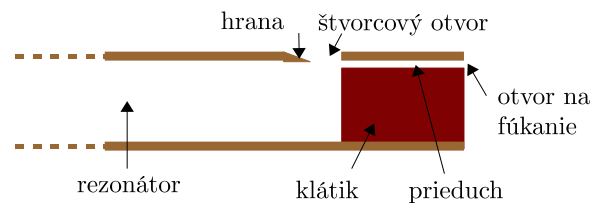
Píšťala koncovka (anglicky overtone flute) je dlhá valcová píšťala bez dierok (hmatových otvorov). Rôzne tóny sa vyludzujú zmenou intenzity fúkania a zakrývaním/odokrývaním spodného konca píšťaly (odtiaľ názov koncovka). Veľmi jemné fúknutie hrá základný tón, silnejšie fúknutia tvoria vyššie harmonické tóny. Na stránke <http://www.youtube.com/watch?v=EAJu5g5BMoU> si môžete vypočuť, ako znie.

Ďalšie ukážky a informácie nájdete napríklad na <http://ii.fmph.uniba.sk/~takac/fujara/koncovka.html>

Koncovka sa správa ako píšťala s dvoma otvorenými koncami (jeden je ten dolný a druhý je na začiatku - „štvorcový otvor“ na obrázku vedľa).

Uvažujme zjednodušený model: hranatú píšťalu s hranami  $L_x, L_y, L_z$ . Otvorené konce sú  $z = 0$  a  $z = L_z$ . Vašou úlohou je:

1. Napísať okrajové podmienky pre akustický tlak  $\hat{p}$ .
2. Metódou separácie premenných nájsť módy v reči akustického tlaku  $\hat{p}$  a vlastné frekvencie  $\omega_{lmn}$ .
3. Pre rozmery  $L_x = L_y = 1,5 \text{ cm}$ ;  $L_z = 65 \text{ cm}$  a rýchlosť zvuku  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$ :
  - (a) Nájsť najnižšiu frekvenciu, od ktorej v spektre začínajú neharmonické prímеси od nenulových  $l, m$ .
  - (b) Nájsť prvých 9 frekvencií (v Hertzoch) a im zodpovedajúcich tónov<sup>1</sup> v prípade, že koniec je odokrytý.
  - (c) Nájsť prvých 9 frekvencií a im zodpovedajúcich tónov v prípade, že koniec je zakrytý prstom (stačí zobrať vzorec z cvika a dosadiť).
  - (d) Urobiť z toho prehľadnú tabuľku a uvidieť v nej, ako sa na koncovke hrá. (Keď chcem hrať nejakú melódiu, tak z dolných frekvencií veľa muziky nenarobím. Tóny začínajú byť dostatočne nahusto až vo vyššej časti spektra.)



Obr. 1: Hlava koncovky.

## 13. cvičenie (14.5.2012)

### Vlny v troch rozmeroch

#### Príklady

- (III.2.1) komentár ku b)
- Dodatok ku látkam s pamäťou.
- **Bubnová blana.** Nájdite módy a vlastné frekvencie kruhovej membrány. Vlnovú rovnicu v dvoch rozmeroch riešte separáciou premenných v polárnych súradniciach. Je spektrum blany harmonické? Čo sa zmení v prípade tlmejnej blany (tlmenie úmerné rýchlosti)?

<sup>1</sup>Frekvencie hudobných tónov nájdete na [http://en.wikipedia.org/wiki/Frequencies\\_of\\_notes](http://en.wikipedia.org/wiki/Frequencies_of_notes). Použite názvy zo stĺpčeka „Scientific name“.