Pr.1 Ako znie zovšeobecnený Pauliho princíp?

i)Dve neinteragujúce častice obsadzujú energetické hladiny s kvantovými číslami a a b. Napíšte vlnovú funkciu pomocou jednočasticových vlnových funkcií

a) častice sú rozlíšiteľné.
b) častice sú nerozlíšiteľné bozóny.
c) častice sú nerozlíšiteľné fermióny.

ii)Tri neinteragujúce častice obsadzujú energetické hladiny s nasledovnými kvantovými číslami: dve sú v stave a a jedna v stave b. Napíšte vlnovú funkciu pomocou jednočasticových vlnových funkcií

a) častice sú rozlíšiteľné.
b) častice sú nerozlíšiteľné bozóny.
c) častice sú nerozlíšiteľné fermióny.

Pr.2 Napíšte vlnovú funkciu pre n neinteragujúcich častíc pomocou jednočasticových vlnových funkcií
a) častice sú rozlíšiteľné.
b) častice sú nerozlíšiteľné bozóny.
c) častice sú nerozlíšiteľné fermióny.

Pr.3 Uvažujme dve neinteragujúce častice na úsečke(ignorujme pre tento príklad spin). Aká je energia základného a excitovaného stavu sústavy?
a) častice sú rozlíšiteľné.
b) častice sú nerozlíšiteľné bozóny.
c) častice sú nerozlíšiteľné fermióny

Pr.4 Uvažujme dve častice v jednom rozmere; jednu v stave a a druhú v stave b.
Vypočítajte $<(x_1-x_2)^2>=<x_1^2>+<x_2^2>-2<x_2x_1>$ ak
a) častice sú rozlíšiteľné.
b) častice sú nerozlíšiteľné bozóny.[1]
c) častice sú nerozlíšiteľné fermióny(so symetrickou spinovou vlnovou funkciou).
V ktorom prípade sú častice bližšie k sebe a kedy naopak ďalej od seba?
Výsledok vyjadrite pomocou nasledovných veličín

$$<x^2>_n=\int x^2|\psi_n(x)|^2dx, \qquad <x>_n=\int x|\psi_n(x)|^2dx, \qquad <x>_{mn}=\int x\psi_m^*(x)\psi_n(x)dx \tag{1}$$

Pr.5 Uvažujme atóm Hélia. Zanedbajme spin-spinovú a spin-orbitálnu interakciu a pre začiatok tiež vzájomnú interakciu medzi dvoma elektrónmi.

a) Aký tvar može mať vlnová funkcia takejto dvojelektrónovej sústavy(uvažujme aj spin)? Aká je energia takejto sústavy?

b) Zapnime interakciu medzi dvoma elektrónnmi. Ako sa zmenia energie takejto sústavy?(Využime poruchovú teóriu, hoci jej použitie nie je opravnené - lebo energia medzi dvoma elektrónmi nie je malá v porovnaní s energiou elektrónov v poli jadra - poskytuje nám základnú informáciu o štruktúre energetických hladín atómu He.)[2]

Pr.6 Mnohočasticovú vlnovú funkciu môžeme zapísať v reprezentácii pomocou obsadzovacích čísel ako

$$|n_1,n_2,...\rangle\,, \tag{2}$$

Zaveďme kreačné a anihilačné bozónové operátory ako

$$a_i^\dagger\,|n_1,n_2,...,n_i,...\rangle=\sqrt{n_i+1}\,|n_1,n_2,...,n_i+1,...\rangle\,, \tag{3}$$
$$a_i\,|n_1,n_2,...,n_i,...\rangle=\sqrt{n_i}\,|n_1,n_2,...,n_i-1,...\rangle\,, \tag{4}$$
$$|n_1,n_2,...,n_i,...\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_1!}}(a_1^\dagger)^{n_1}\frac{1}{\sqrt{n_2!}}(a_2^\dagger)^{n_2}...\frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}...\,|0,0,...,0,...\rangle\,, \tag{5}$$

[1] Alebo nerozlíšiteľné fermióny s antisymetrickou spinovou vlnovou funkciou
[2] Pre detaily viď. ZU kapitola 15.4 a Griffiths kap. 5.2

a)Z rovnice (**??**) odvoďte (5).

b)Na základe rovníc (3),(4) ukážte, že bozónové kreačné a anihilačné operátory spĺňajú nasledovné komutačné vzťahy

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = 0, \qquad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \tag{6}$$

Pr.7 Jednočasticový operátor môžeme zapísať vo formalizme vlnových funkcií ako

$$f = \sum_\rho f(\vec{x}_\rho) \tag{7}$$

Vo Fockovom priestore mé jednočasticový operátor tvar

$$f = \sum_{ij} f_{ij} a_i^\dagger a_j, \qquad \text{kde} \qquad f_{ij} = \int \psi_i^*(\vec{x}) f(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) d\vec{x} \tag{8}$$

Vypočítajte strednú hodnotu operátora f v stave $|2,1,0,0,0...\rangle$ vo formalizme vlnových funkcií a vo formalizme Fokovho priestoru, a tým sa presvedčte, že oba formalizmy dávajú rovnaké výsledky.

Pr.8 Dvojčasticový operátor môžeme zapísať vo formalizme vlnových funkcií ako

$$V = \frac{1}{2} \sum{}' V(\vec{x}_\rho, \vec{x}_\sigma). \tag{9}$$

Vo Fockovom priestore mé dvojčasticový operátor tvar

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k, \qquad \text{kde} \qquad V_{ijkl} = \int \psi_i^*(\vec{x_\rho}) \psi_j^*(\vec{x_\sigma}) V(\vec{x}_\rho, \vec{x}_\sigma) \psi_k(\vec{x}_\rho) \psi_l(\vec{x}_\sigma) d\vec{x}_\sigma d\vec{x}_\rho \tag{10}$$

Vypočítajte strednú hodnotu operátora V v stave $|2,1,0,0,0...\rangle$ vo formalizme vlnových funkcií a vo formalizme Fockovho priestoru, a tým sa presvedčte, že oba formalizmy dávajú rovnaké výsledky.

Pr.9 Vo formalizme Fockovho priestoru vypočítajte

$$\langle 1100 | V | 0011 \rangle \tag{11}$$

a) pre bozóny.

b) pre fermióny.