Pr.1(Zbierka A3. str. 171) Ukážte, že klasické Hamiltonove pohybové rovnice s Hamiltoniánom

$$H(\vec{r},\vec{P}) = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi \tag{1}$$

sú ekvivalentné s Newtonovou pohybou rovnicou s Lorentzovou silou

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \tag{2}$$

Postup Hamiltonove pohybové rovnice majú tvar

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \qquad \dot{\vec{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \tag{3}$$

využije sa vyjadrenie pre totálnu časová derivácia v tvare

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\vec{A} \tag{4}$$

a identita

$$\vec{v}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{A}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \left(\vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{A} \tag{5}$$

Pr.2 Napíšte kvantovomechanický Hamiltonián pre bezspinovú časticu v elmag. poli.

Pr.3 Ukážte, že obyčajná Schrodingerova rovnica nie je lokálne kalibračne invariantná, zatiaľ čo Schrodingerova rovnica v elmag. poli je. Lokálna kalibračná transformácia má tvar:

$$\begin{aligned} \psi \to \psi' &= e^{i\alpha(\vec{r},t)}\psi \\ \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \frac{\hbar}{q}\vec{\nabla}\alpha \\ \phi \to \phi' &= \phi - \frac{\hbar}{q}\frac{\partial}{\partial t}\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

Čo sú to kalibračné častice?

Postup: Vypočítajte

$$\begin{aligned} \Delta\psi' &= ..., \quad \frac{\partial\psi'}{\partial t} = ... \\ \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}'\right)\psi' &= e^{i\alpha(\vec{r},t)}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi \end{aligned} \tag{7}$$

a rozmyslite si, že ak platí $D'e^{i\alpha(\vec{r},t)}f = e^{i\alpha(\vec{r},t)}Df$ potom platí

$$D'D'\left(e^{i\alpha(\vec{r},t)}f\right) = D'\left(e^{i\alpha(\vec{r},t)}Df\right) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}DDf \tag{8}$$

kde D', D sú diferenciálne operátory a f je ľubovolná komplexná funkcia. Stačí si uvedomiť, že Df je tiež ľubovolná komplexná funkcia.

Pr.4(Zbierka A1. str. 169) Overte, že sklárny a vektorový potenciál pre homogénne magnetické a elektrické pole môžeme vyjadriť v tvare

$$\phi = -\vec{r}\vec{E} \qquad \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B} \tag{9}$$

Pr.5(Zbierka A2. str. 170) Ukážte, že v slabom homogénnom magnetickom poli(t.j môžeme zanedbať členy úmerné A^2) je hamiltonián bezspinovej nabitej častice daný tvarom

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{q}{2m}\vec{B}\hat{\vec{L}} \tag{10}$$

Postup vyjdeme z Hamiltoniánu

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 \tag{11}$$

Z Pr.4 dosadíme $\vec{A}$ a využijem identitu $(\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} = \vec{B} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)$

Pr.6(A4 zbierka str 172) Nájdite operátor rýchlosti $\hat{\vec{v}}$ bezspinovej častice v elektromagnetickom poli.

Postup Porovnajte dva spôsoby výpočtu. Prvým spôsobom definujeme operátor rýchlosti ako $\hat{\vec{v}} = \frac{\hat{\vec{p}}_{mech}}{m}$. Druhým: $\hat{\vec{v}} = \frac{\partial \hat{\vec{r}}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{\vec{r}}, H]$

Pr.7(A5 zbierka str 174) Aký tvar majú Ehrenfestove vety pre bezspinovú časticu v elmag. poli?

Postup Vyjdeme z rovnice pre časový vývoj operátorov $\dot{\hat{\vec{p}}} = ...$ Pri výpočte potrebujeme vypočítať komutátor $[\hat{v}_i, \hat{v}_j\hat{v}_j] = ...$

Pr.8(Pr.C3 zbierka str 179) Nájdite energetické spektrum nabitej bezspinovej častice v homogénnom magnetickom poli.

Postup Magnetické pole volíme v smere osi z. Potom môžeme zvoliť vektorový potenciál v tvare $A_x = -By, A_y = A_z = 0$. Následne volíme ansatz do bezčasovej Schr. rovnice v tvare $\psi = exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)\right)\phi(y)$.

Nasledujúca trojica príkladov, by nás mala postupne presvedčiť o reálnosti vektorového potenciálu $\vec{A}$.

Pr.9 Solenoidom, s polomerom a preteká prúd I. Ukážte, že vektorový potenciál v Coulombovej kalibrácii $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$ môžeme napísať v tvare

$$\vec{A} = \frac{a^2 B}{2r}\mathbf{e}_\phi \quad pre\, r > a \qquad \vec{A} = \frac{Br}{2}\mathbf{e}_\phi \quad \text{pre r < a} \tag{12}$$

Postup

Využijúc Ampérov zákon, máme B mimo solenoidu nulové, vo vnútri konštantné $B = \mu_0 n I$. Ďalej využijeme Stokesovu vetu $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Odtiaľ už skutočne vidíme (12). Na overenie $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$, potrebujeme vyjadrenie pre nabla operátor v cylindrickych súradniciach. O správnosti výsledku sa možno presvedčiť dosadením do $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, pričom využijeme vyjedrenie rotácie v cylindrických súradniciach.

Pr.10 Ukážte, že v oblasti, kde $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ sa dá Schrodingerova rovnica v elmag. poli

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 + V\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

zjednodušiť na "obyčajnú" Schrodingerovu rovnicu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

kde

$$\psi = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int_a^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r'})d\vec{r'}\right]\psi' \tag{13}$$

Pr.11 Pomocou predošlého príkladu ukážte, že ak postavíme za dvojštrbinový experiment veľmi tenký solenoid, k fázovovému rozdielu prispeje navyše faktor $\delta\alpha = \frac{qB\pi a^2}{\hbar}$. (Bohm-Aharonov efekt)