Pr.1 Clebsch-Gordanov koeficient $C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ je definovaný ako[1]

$$|jm\rangle = \sum_{m_1m_2} C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2} |j_1m_1\rangle |j_2m_2\rangle \tag{1}$$

a) Vysvetlite, čo je to Clebsch-Gordanov koeficient.
b) Čo označuje symbol j a ako súvisí s J?
b) Aké sú možné hodnoty j, m pre dané j_1, m_1, j_2, m_2?

Pr.2 Využijúc rovnicu (1), čomu je rovný koeficient $K(j, m, j_1, m_1, j_2, m_2)$ v nasledovnej rovnosti:

$$|j_1m_1\rangle |j_2m_2\rangle = \sum_{jm} K(j, m, j_1, m_1, j_2, m_2) |jm\rangle \qquad ? \tag{2}$$

Pr.3 Systém tvoria dve častice so spinom $s = 1/2$ - každá s uhlovým momentom hybnosti $L = 0$.

a)Aké celkové momenty hybnosti J a ich priemety m môžeme namerať na takomto systéme?
b)Ako vyzerajú stavy pre dané j, m?

Pomôcka: $J_- |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |jm-1\rangle$

Pr.4a Uvažujme časticu so spinom $s = 1/2$ orbitálnym momentom hybnosti $L = \sqrt{2}\hbar$.

a)Aký celkový moment hybnosti J a jeho priemet J_z môžeme namerať na tejto častici?
b)Ako vyzerajú stavy pre dané j, m?

Pr.4b Systém tvoria dve častice. Jedna má $j_1 = \frac{9}{2}, m_1 = \frac{7}{2}$ druhá $j_2 = \frac{11}{2}, m_2 = \frac{1}{2}$. S akou pravdepodobnosťou nájdem celkový moment hybnosti $J = \hbar\sqrt{30}$ a $J_z = 4\hbar$

Pr.5 Ukážte, že maticový element $\langle \beta, j, m | \gamma, j, m\rangle$ je nezávislý od m, kde β, γ sú kvantové čísla nezávislé od j, m.

Veta: Ireducibilným tenzorovým operátorom nazývame sústavu $2k + 1$ operátorov $\hat{T}^k_q$, spĺňajúcu nasledovné rovnosti

$$\begin{aligned}\left[\hat{J}_Z, \hat{T}^k_q\right] &= q\hat{T}^k_q \\ \left[\hat{J}_\pm, \hat{T}^k_q\right] &= \hbar\sqrt{(k \pm q + 1)(k \mp q)}\hat{T}^k_{q\pm1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Dôsledok: Ak je niečo ireducibilným tenzorom $\hat{T}^k_q$, môžeme s ním zaobchádzať ako so stavom s $j = k$ a $m = q$, preto môžeme napríklad písať

$$\begin{aligned}|\alpha jm\rangle &= \sum_{m'q} C^{jm}_{kqj'm'} T^k_q |\gamma j'm'\rangle\,, \\ T^k_q |\gamma j'm'\rangle &= \sum_{jm} C^{jm}_{kqj'm'} |\alpha jm\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

Pr.6 Ukážte, že sférické funkcie Y_{lm} sú ireducibilné tenzorové operátory.

Pr.7:**Wigner-Eckartova veta**; Dokážte, že platí

$$\langle \beta j'm'| \hat{T}^k_q |\alpha jm\rangle = C^{j'm'}_{kqjm} \left\langle \beta j' \left\| \hat{T}^k \right\| \alpha j \right\rangle, \tag{5}$$

[1]Niekedy býva stav $|jm\rangle$ označovaný ako $|j, m, j_1, j_2\rangle$, aby bolo zrejmejšie, že stav s celkovým momentom hybnosti $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ a celkovým priemetom m vznikol zložením dvoch podsústav s momentami hybnosti $\hbar\sqrt{j_1(j_1+1)}$ a $\hbar\sqrt{j_2(j_2+1)}$.

kde $\hat{T}^k_q$ je sférický tenzor, $\left\langle \beta j' \left\| \hat{T}^k \right\| \alpha j \right\rangle$ je redukovaný maticový element nezávislý od priemetov momentov hybnosti.

Postup: Využijeme dôsledok "tenzorovosti operátoru". Z príkladu číslo 5 vidíme, že maticový element $\langle \beta j' m' | \gamma, j, m\rangle$ nezávisí od priemetov momentu hybnosti.

Pr.8 Vypočítajte:

a)$\langle 20| \, Y_{10} \, |10\rangle$

b) $\langle 2 \, \| Y_1 \| \, 1\rangle$

c) Pomocou výsledku v b) vypočítajte $\langle 2m| \, Y_{10} \, |1m'\rangle$ a $\langle 2m| \, Y_{11} \, |1m'\rangle$ pre všetky možné m, m'.

Pr.9 Maticový element dipólového operátora sme definovali ako $\vec{d} = q \, \langle \psi_a | \, \vec{r} \, | \psi_b \rangle$

a)Vyjadrite x, y, z pomocou Y_{10}, Y_{11}, Y_{1-1}

b) Na základe a) a Wigner-Eckartovej vety objasnite výberové pravidlá uvádzané v príklade číslo 8 zo sady o nestacionárnej poruchovej teórii.

c) Pomocou Wigner-Eckartovej vety ukážte, aké sú nasledovné pomery pre pravdepodobnosti spontánnych prechodov

$$\frac{P(|300\rangle \to |211\rangle)}{P(|300\rangle \to |210\rangle)}, \quad \frac{P(|300\rangle \to |21-1\rangle)}{P(|300\rangle \to |210\rangle)}, \quad \frac{P(|300\rangle \to |211\rangle)}{P(|300\rangle \to |21-1\rangle)}. \tag{6}$$

Potrebné Clebsch-Gordanove koeficienty nájdite v príslušnej literatúre, alebo si ich vypočítajte.