

Pr.1 Ukážte, že pre sféricky symetrický potenciál $V(r)$, platí

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} V(r) = -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad (1)$$

kde, $\kappa = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, uvažujeme pružný rozptyl

Pr.2 Na základe Pr.1 vypočítajte $f(\theta, \phi)$ pre

a) $V(r) = -V_0$ pre $r \leq a$, $V(r) = 0$ pre $r > a$

$$\text{Výsledok: } f(\theta, \phi) = \frac{2V_0 m}{\hbar^2} \left[\frac{\sin(\kappa a)}{\kappa^3} - \frac{a \cos(\kappa a)}{\kappa^2} \right]$$

b) $V(r) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \equiv A \frac{e^{-\mu r}}{r}$ (Yukawov potenciál)

$$\text{Výsledok: } f(\theta, \phi) = \frac{2Am}{\hbar^2} \frac{1}{\mu^2 + \kappa^2}$$

c) $V(r) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$ (Coulombov potenciál)

Postup: Najprv si premyslite, prečo sa nedá použiť na výpočet vzťah(1). Potom si stačí uvedomiť, že Coulombov potenciál dostaneme ak v Yukawovom položíme $\mu \rightarrow 0$.

Pr.3 Vypočítajte $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ a σ pre rozptyl na

a) Yukawovom potenciáli

$$\text{Výsledok: } \sigma = 4\pi \left(\frac{2Am}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[\mu^2 + 4k^2]^2 \mu^2}$$

(substitúcia pri integrovaní $\sin\theta/2 = t$)

a) Coulombovom potenciáli

$$\text{Výsledok: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1 q_2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \text{-Rutherfordova formula (Využili sme: } E = k^2 \hbar^2 / (2m) \text{)}$$

$$\sigma = \infty$$

Pr.4 Ukážte, že pre sféricky symetrické rozloženie náboja $\rho(r)$, platí

$$F(\vec{k} - \vec{k}') = \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \rho(r) = \frac{4\pi}{\kappa} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(\kappa r) dr \quad (2)$$

a vypočítajte formfaktory pre nasledovné rozloženia náboja¹

a) $\rho(r) = \rho_0$ pre $r \leq a$, $\rho(r) = 0$ pre $r > a$

$$\text{Výsledok: } F(\kappa) = 4\pi \rho_0 \left[\frac{\sin(\kappa a)}{\kappa^3} - \frac{a \cos(\kappa a)}{\kappa^2} \right]$$

b) $\rho(r) = A e^{-\alpha r}$ $\alpha > 0$

$$\text{Výsledok: } F(\kappa) = 8\pi A \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \kappa^2)^2}$$

Pr.5 Nájdite súvis medzi $\left. \frac{dF}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=0}$ a $\langle r^2 \rangle$, pričom opäť predpokladáme sféricky symetrické rozloženie náboja

Postup: Zo vzťahu (2)

$$F(\kappa^2) = \frac{4\pi}{\kappa} \int_0^\infty r \rho(r) \left(\kappa r - \frac{1}{6} (\kappa r)^3 + \dots \right) dr = 4\pi \int_0^\infty r \rho(r) \left(r - \frac{1}{6} \kappa^2 r^3 + \dots \text{vyššie parne mocniny } \kappa \right) dr$$

$$\left. \frac{dF}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=0} = -\frac{2}{3} \pi \int_0^\infty r \rho(r) r^3 dr \equiv -\frac{1}{6} \int d^3\vec{r} r^2 \rho(r) = -\frac{1}{6} \langle r^2 \rangle$$

¹Platí: $\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1$