

# Cvičenie 1.

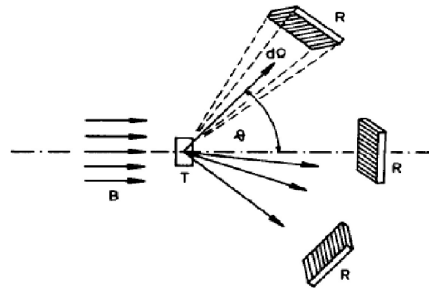
**Príklad 1.1** Elektrónu sme udelili hybnosť

- a) 50 eV/c
- b) 0.5 MeV/c
- c) 500 MeV/c.

Vypočítajte príslušnú kinetickú energiu elektrónu.

*Výsledok a) 2.5 meV b) 207 keV c) 500 MeV Pozor! Pre relativistické energie platí  $T = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$ .*

**Príklad 1.2**



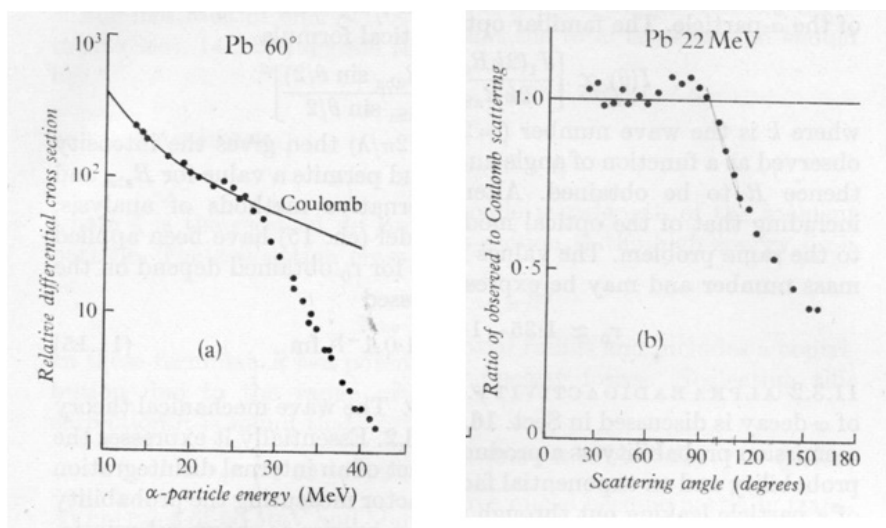
V rozptylovom experimente poznáme: hustotu prúdu dopadajúcich častíc  $j$  za jednotku času, počet častíc v terčiku  $N$ , počet častíc zaregistrovaných určitým detektorom za jednotku času  $dn$  a priestorový uhol pokrytý týmto detektorom  $d\Omega$ . Vysvetlite, čo označujú symboly  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ,  $\sigma$  a  $n$  v nasledovných vzťahoch

$$\begin{aligned} dn &= jN \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ n &= jN\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

**Príklad 1.3** Zdrojom alfa-častíc použitým v Rutherfordovom experimente bolo obohatené rádium umiestnené v tenkostennej sklenenej trubici s polomerom 1-mm. Sila zdroja bola 0.1 Curie, čo predstavuje 3.7 miliárd jadrových rozpadov za sekundu. Alfa častice boli namierené priamo na tenký terč zlata (Pre náš príklad uvažujme počet atómov v terči  $N = 10^{18}$  a že častice alfa boli urýchlené na energiu  $E_\alpha = 20\text{MeV}$ ).

- a) Aká je maximálna zámerná vzdialenosť alfa častice od jadra, aby sa rozptýlila o uhol väčší ako  $1^\circ$ .
- b) Uvažujme uhlové rozlíšenie detektora  $1^\circ$ . Koľko častíc pôvodného zväzku pozorujeme v detektore pre  $\theta = 0$  (t.j. v intervale  $\theta \in (0, 1^\circ)$ ).
- c) Pre akú zámernú vzdialenosť alfa častice od jadra už určite nemožno použiť Rutherfordovu formulu? Nájdite rozptylový uhol k danej zámernej vzdialenosti.
- d) Vysvetlite, prečo pre Rutherfordov rozptyl diferenciálny účinný prierez  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1/\sin^4(\theta/2)$  diverguje pre  $\theta \rightarrow 0$ . Spôsobuje nám to v realite problémy? Bez počítania určite, koľko je účinný prierez  $\sigma$  pre Rutherfordov rozptyl.

*Výsledok a)  $b \approx 660\text{fm}$  b) Pod uhlom väčším ako  $1^\circ$  sa rozptýli  $1.6 \times 10^9$  častíc za sekundu. Počet častíc*



Obr. 1: Závislosť diferenciálneho účinného prierezu pre Rutherfordov experiment na energii alfa častice (obrázok (a)) a uhle rozptylu (obrázok (b)). Ako terč bolo použité olovo  $^{208}_{82}\text{Pb}$

rozptyľujúcich s uholom menším ako  $1^\circ$  je  $(3.7 - 1.6) \times 10^9 \approx 2.1 \times 10^9$  **c)** Kvôli tieneniu jadra elektrónmi, určite nie pre vzárodné vzdialenosti na úrovni  $1\text{Å}$  a vyššie. Tomu zodpovedajú rozptyľové uhly menšie ako  $0.066^\circ$ . **d)** Nespôsobuje, vid'. odpoveď c),  $\sigma \rightarrow \infty$ .

**Príklad 1.4** Ukážte, že pri Rutherfordovom experimente sa alfa častice dostanú najbližšie k jadrú do vzdialenosti

$$d = \frac{b \cos(\theta/2)}{1 - \sin(\theta/2)}. \quad (2)$$

*Postup:* Označme rýchlosť častice alfa v najbližšej vzdialenosti od jadra ako  $v_d$  a jej počítačnú rýchlosť ako  $v$ . Potom platí zákon zachovania momentu hybnosti  $dv_d = bv$  a zákon zachovania energie  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_d^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{d}$ . Riešením daných dvoch rovníc, obdržíme  $d$  priamočiara.

**Príklad 1.5** Z Rutherfordovho experimentu sme obdržali závislosť diferenciálneho účinného prierezu na energii a uhle rozptylu alfa častice - vid'. obr. 1 a 2. Určite z obrázkov polomer jadra  $^{208}\text{Pb}$ .

*Riešenie:* Na obrázku (a) vidíme, že Rutherfordova formula nám platí zhruba pre energie alfa častíc do  $28\text{ MeV}$ . Potom sa už alfa častice dostávajú tak blízko jadra, že začínajú cítiť jadrové sily. Použitím rovnice (2) dostaneme horný limit na  $r \approx 12.6\text{ fm}$ . Z rovnice (2) sa dá vidieť, že pri danej energii sa alfa častica dostane bližšie k jadrú pre veľké uhly. Z obrázku (b) vidíme, že pre  $\theta \approx 100^\circ$ , sa alfa častica dostane tak blízko jadra ( $r \approx 12.5\text{ fm}$ ), že pocíti jadrové sily.

**Príklad 1.6** Z rozptylu elektrónov na jadrách bolo zistené, že rozloženie hustoty náboja v jadre má tvar

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/\delta}} \quad (3)$$

kde  $R = r_0 A^{1/3}$ , pričom  $r_0 = 1.2\text{ fm}$  a  $\delta = 0.5\text{ fm}$ .

a) Ukážte, že inflexný bod rozdelenia je rovný  $R$ .

b) Ukážte, že hrúbka povrchu jadra, t.j. vzdialenosť, pre ktorú poklesne hustota jadra z  $0,9\rho_0$  na  $0,1\rho_0$  je rovná  $t \approx 4.4\delta$ .

c) Dostávame konzistentné výsledky pre polomer jadra olova  $^{208}\text{Pb}$  v porovnaní s Rutherfordovým experimentom?

*Riešenie:* a) Z rovnice  $\frac{d^2}{dr^2}\rho(r) = 0$ . b)  $\ln 9 \approx 2.2$  c) Pre polomer jadra sa uvádza vzťah  $r = 1.2A^{1/3}$  fm. Z toho dostávame  $r(^{208}\text{Pb}) = 7.11$  fm. Pri interpretácii Rutherfordovho experimentu treba vziať do úvahy ešte aj polomer  $\alpha$  častice  $r(\alpha) = 1.9$  fm, 2 krát polovicu hrúbky povrchu jadra  $2 \times 1.1$  fm a ešte dosah jadrových síl, čo je zhruba 1 fm. Spolu dostávame, že pri Rutherfordovho experimente s terčom olova  $^{208}\text{Pb}$  bude  $\alpha$  častica cítiť jadrové sily vo vzdialenosti 12.2 fm od jadra terča, čo je v dobrej zhode s príkladom

**Príklad 1.7** Akú hustotu majú jadrá? Koľko nukleónov na  $\text{fm}^3$  sa nachádza v jadrách?

*Riešenie:* Hmotnosť jadra je úmerná  $A$ , z toho vyplýva, že hustota nezávisí na  $A$ .  $\rho \approx 0.14 \text{ nukleón}/\text{fm}^3$ , alebo  $\rho \approx 2.3 \times 10^{17} \text{ kg}/\text{m}^3$ .

### Príklady na precvičenie

C1.1. Do akej minimálnej vzdialenosti sa priblíži alfa častica o energii 7,7 MeV k jadrú zlata? (30 fm)

C1.2. Alfa častica o kinetickej energii 2 MeV nalieta na jadro olova, ktoré je v klude, so zámernou vzdialenosťou 90 fm. Vypočítajte zmenu hybnosti alfa častice. (92.5 MeV/c)

C1.3. Ukážte, že do uhlu medzi  $60^\circ$  a  $90^\circ$  sa fóliou rozptýli dvakrát toľko častíc ako o uhol  $90^\circ$  a viac.

C1.4. Alfa častica s kineticou energiou  $T = 0,5$  MeV sa rozptýlila pod uhlom  $\theta=90^\circ$  v coulombovskom poli jadra atómu ortuť. Určte minimálnu vzdialenosť, na ktorú sa častica priblížila k jadrú. (563.9 fm)

C1.5. Rovnica (1) platí za predpokladu, že 1 častica z dopadajúcich častíc interaguje práve s jednou časticou v terčiku. Ukážte, že pre Rutherfordov rozptyl je táto podmienka ekvivalentná tvrdeniu  $b \ll \sqrt{\frac{1}{\pi n}}$ . Kde  $n$  je hustota jadriek v terčiku na plochu. Vypočítajte  $\sqrt{\frac{1}{\pi n}}$  pre terč zlata s hrúbkou  $x = 0,3 \mu\text{m}$ .

*Riešenie:* Plocha terča  $A$  musí byť väčšia ako  $N\sigma$ .  $\sqrt{\frac{1}{\pi n}} = 1329$  fm.

# Cvičenie 2.

## Príklad 2.1

Ukážte, že vlnová dĺžka pre neutróny je rovná

$$\frac{\lambda}{2\pi} \approx 4,5/\sqrt{E}, \quad E \text{ v MeV, } \lambda \text{ v fm} \quad (1)$$

Zhruba pre aké energie je vlnová dĺžka väčšia ako rozmer jadra?

Ak je  $\lambda$  omnoho väčšie ako rozmer jadra, aký majú rozptýlené neutróny v rozptylovom experimente na jadre moment hybnosti?

**Príklad 2.2** Aká je elektrostatická energia rovnomerne nabitej gule?

$$\text{Postup: } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q(r)}{r} dQ = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

## Príklad 2.3

a) Zo známych hmotností atómov  $^{15}\text{O}$   $m_O = 15.003065u$  a  $^{15}\text{N}$   $m_N = 15.0001088982u$  vypočítajte rozdiel medzi väzbovými energiami príslušných jadier. (Hmotnosti jadier, ako aj väzbové energie možno nájsť prehľadne na stránke <http://nucleardata.nuclear.lu.se/database/masses/>)

b) Pri uvážení, že rozdiel väzbových energií  $^{15}\text{O}$  a  $^{15}\text{N}$  je daný len Coulombovou energiou, vypočítajte polomery daných jadier.

$$\text{Výsledok: } \Delta B = 3.5368 \approx \Delta E_C = \frac{3}{5} \frac{(2Z-1)}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}} \Rightarrow r_0 = 1.484 \text{ fm}$$

## Príklad 2.4

V jednoduchom **Fermiho modeli jadra** aproximujeme jadro ako sústavu voľných nukleónov viazaných v troj-rozmernej pravouhlej potenciálovej jame s objemom  $V = R^3$ , kde  $R$  je polomer jadra. Vo vnútri jamy je potenciál nulový a na povrchu rovný hodnote  $V_0$ . Pre zjednodušenie výpočtu sa v tomto modeli používajú hodnoty pre jednotlivé energie nukleónov  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ , t.j. energie z takzvanej nekonečnej potenciálovej jamy  $V_0 \rightarrow \infty$ .

a) Aký počet nukleónov sa nachádza v energetickom intervale  $(E, dE)$ .

b) Akú najvyššiu energiu má nukleón v základnom stave (t.j. aká je Fermiho energia sústavy)?

c) Vyčísľte Fermiho energiu sústavy. Ak uvážime, že separačná energia nukleónov je zhruba 8 MeV, čo môžeme povedať o hĺbke potenciálovej jamy, t.j. akú typickú hodnotu má  $V_0$ ?

d) Nájdite celkovú kinetickú energiu nukleónov.

e) Rozvinte výraz pre celkovú kinetickú energiu do druhého rádu v parametri  $(Z - N)/A$ .

f) Aká je väzbová energia na jeden nukleón, pre jadrá so  $Z = N$ ?

*Postup:* a) Vnútri gule s polomerom  $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$  je  $N_E = 2 \times \frac{4}{3} \pi n^3$  stavov. Berieme do úvahy len kladné  $n$ , teda  $1/8$  gule. Vyjadrieme  $n$  pomocou energie a zderivujeme podľa  $E$ . Dostávame tak počet stavov v energetickom intervale  $(E, E + dE)$ :  $dN_E = \frac{\sqrt{2m^3} L^3}{\pi^2 \hbar^3 \pi^2} \sqrt{E} dE$

b)  $E_f = \frac{1}{2m} (3\pi^2 \hbar^3 \rho)^{2/3}$ , kde  $\rho = N_E/L^3$

c)  $\rho \approx 0.14/2$ , pretože berieme zvlášť protóny a zvlášť neutróny. Potom máme  $E_f \approx 33.6 \text{ MeV}$ . Typická hĺbka jamy je zhruba  $V_0 \approx 33.5 + 8 \approx 40 \text{ MeV}$ .

d) Využije sa, že protóny a neutróny majú separátne potenciálové jamy. A použijeme  $\rho = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A}$ .  $E = \int_0^{E_f} E dN_E = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} A \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}}$ .

$$e) E \approx \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \left(A + \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A}\right)$$

f)  $\frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \approx 20.6 \text{ MeV}$ , potom väzbová energia na jeden nukleón je  $40 - 20.6 \approx 19.5 \text{ MeV}$ .

# Cvičenie 3.

**Príklad 3.1** Kvapkový model jadra uvažuje väzbovú energiu ako

$$B = a_V A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{a_p}{2A^{1/2}} ((-1)^Z + (-1)^N), \quad (1)$$

kde  $a_V = 15.56$  MeV,  $a_s = 17.23$  MeV,  $a_c = 0.697$  MeV,  $a_A = 23.285$  MeV a  $a_p = 12$  MeV,

a) Porovnajete hodnotu  $a_V$  s hodnotou vypočítanou v príklade 2.4 f). Pôvod ktorých členov kvapkového modelu nám umožňuje vysvetliť jednoduchý Fermiho model?

b) Aká je elektrostatická energia rovnomernej nabitej gule? Na základe výpočtu z minulých cvičení odhadnite hodnotu  $a_c$ .

c) Na základe kvapkového modelu vypočítajte  $Z$  ako funkciu  $A$ , pre stabilné jadrá. Aký je pomer  $N/Z$  pre ľahké jadrá a aký pre ťažké?

*Postup:* a) Z príkladu 2.4 f) máme hodnotu väzbovej energie na jeden nukleón 19.5 MeV, ktorá je porovnateľná s hodnotou  $a_V$ , avšak pri stotožnení týchto členov treba byť opatrný, lebo majú rôzny pôvod. Fermiho model nezávislých častíc nám však vysvetľuje pôvod asymetrického člena, hoci koeficient  $5/9 \times 20.6 = 11.4$  MeV z Fermiho modelu sa značne odlišuje od hodnoty  $a_A$ .

$$b) U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q(r)}{r} dQ = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}, \quad a_c = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \approx 0.72$$

$$c) m = Zm_H + (A - Z)m_N - B, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial Z}\right)_{A=\text{konšt.}} = 0. \text{ Zanedbať } m_N - m_H \approx 0: \frac{N}{Z} = 1 + \frac{a_c}{2a_A} A^{2/3}$$

**Príklad 3.2** Neutrónová hviezda je najmenšou a najhustejšou pozorovanou hviezdou vo vesmíre. Vznikla ako dôsledok gravitačného kolapsu po výbuchu supernovy. Neutrónová hviezda je zložená takmer výlučne z neutrónov, takže je môžeme považovať za najväčšie jadro vo vesmíre.

a) Je zrejmé, že v prípade neutrónovej hviezdy musíme, na rozdiel od obyčajných jadier, vziať do úvahy gravitačné pôsobenie medzi časticami. Ako vyzerá člen zodpovedný za gravitačné pôsobenie, ktorý treba dopísať do kvapkového modelu? Aké bude mať znamienko?

b) Z kvapkového modelu určite minimálny polomer (v km) a hmotnosť neutrónovej hviezdy (v hmotnosti slnka  $m_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg). Porovnajete tieto výsledky s nameranými hodnotami.

*Postup:*  $B_G = +\frac{3}{5} \frac{\kappa}{r_0} \frac{M^2}{A^{1/3}} = 6.18 \times 10^{-37} A^{5/3} \text{ MeV}$ . V kvapkovom modeli zanedbáme párovací a povrchový člen a položíme celkovú väzbovú energiu  $B = 0$ . Dostaneme  $r = 4 \text{ km}$  a  $m = 0.04 M_{\text{slnko}}$

## Príklady na precvičenie

C3.1. Vypočítajte väzbovú energiu neutrónu a alfa častice v jadre  ${}^{21}_{10}\text{Ne}$ . (Väzbová energia pre neutrón  $B=6.7$  MeV; pre alfa časticu  $B=7.348$  MeV)

C3.2. Väzbová energia  ${}^{35}_{17}\text{Cl}$  je 298 MeV. Nájdite jeho hmotnosť v u. Pri akej teplote bude stredná kinetická energia atómov v plynnom chlóre rovná väzbovej energii jadra  ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ ? (Hmotnosť  ${}^{35}_{17}\text{Cl}$  je 34.968853 u;  $T \approx 10^{12}$  K)

C3.3. Nájdite strednú väzbovú energiu na jeden nukleón v  ${}^{16}_8\text{O}$ .

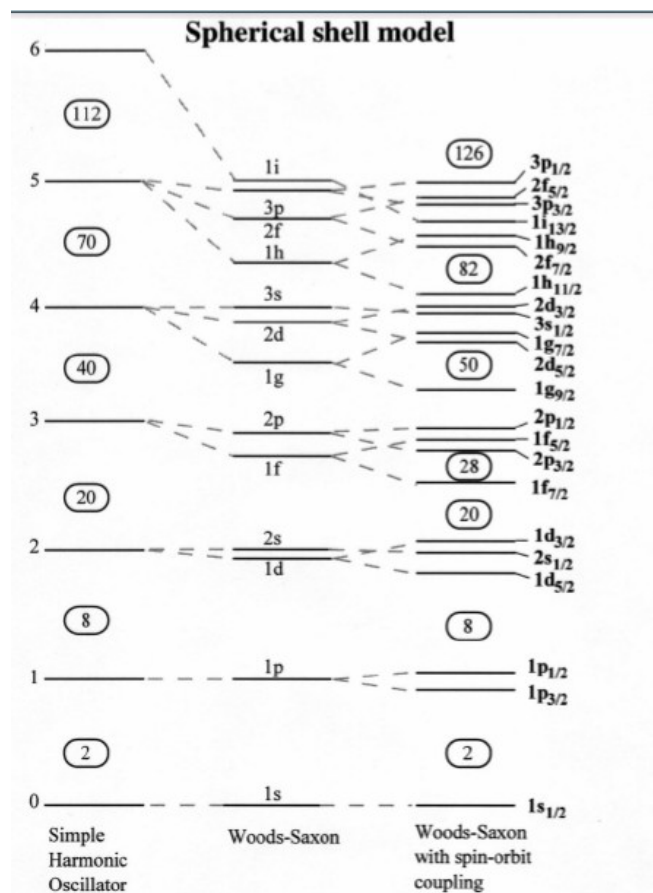
a) Pomocou kvapkového modelu.

b) Pomocou známych hmotností  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^1_1\text{H}$  a neutrónu.

Výsledky porovnajete.

(Kvapkový model  $B/A = 7.8$  MeV; pomocou hmotností  $B/A = 7.976$  MeV)

# Cvičenie 4.



## Príklad 4.1 Objasnenie shell modelu

- Ako by sme v princípe vypočítali energetické hladiny nakreslené na obrázku?
- Ako vyzerajú potenciály pre trojrozmerný harmonický oscilátor a Woods-Saxon potenciál? Čo bolo motiváciou zavedenia takýchto potenciálov.
- Energie pre harmonický oscilátor sú od seba vzdialené ekvidistantne. Čomu je rovná vzdialenosť medzi dvoma hladinami?
- Na základe obrázku zistíte, aká je degenerácia hladín pre jednoduchý harmonický oscilátor.
- V prvom stĺpci na obrázku je stav s číslom 3 rozštiepený v druhom stĺpci na stavy 2p a 1f. Čo znamenajú tieto čísla v prvom a druhom stĺpci?
- Aké magické čísla predpovedá model s potenciálom harmonického oscilátora a model s Wood-Saxonovským potenciálom?
- Až vďaka pridaniu takzvanej spin-orbitálnej interakcie dostávame v spektre pozorovné magické čísla. Pri uvážení, že spin-orbitálna reakcia má tvar  $V_{LS}(r) = -v(r)\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}/\hbar^2$ . Ukážte, že hladina s  $p_{3/2}$  leží nižšie ako hladina s  $p_{1/2}$  (Pre jednoduchosť uvažujeme potenciál nezávislý od  $r$ , teda  $v(r) = v_0$ ) newline  
 a)  $H\psi = E\psi$ ; b) tvar W.S. korešponduje s experimentálnym rozložením hustoty náboja v jadre, H.O. sa v istej

časti podobá na  $W.S.$  a navyše  $H.O.$  vieme riešiť analyticky a vlnové funkcie  $W.S.$  vyjadrujeme pomocou vlnových funkcií  $H.O.$ ; c)  $\Delta E = \hbar\omega$  d) Pre hladiny je degenerácia postupne 2, 6, 12, 20 e) V prvom čísle je  $N$  stavy harmonického oscilátora, jednotlivým stavom prislúcha energia  $E_N = \hbar\omega(N + \frac{3}{2})$ . V druhom stĺpci udáva číslo 1 energeticky najnižší stav s daným momentom hybnosti, číslo 2 druhý najnižší energetický stav pre daný moment hybnosti atď. f) 2,8,20,40 atď g) Využijeme  $-v_0 \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} / \hbar^2 \Psi_{jls} = -v_0(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))/2 \Psi_{jls}$ , potom  $E_{p_{3/2}} - E_{p_{1/2}} = -\frac{3}{2}v_0$ .

**Príklad 4.2** Pomocou shell modelu stanovte spin a paritu základného stavu nasledujúcich jadier. (Spin a paritu nepárno-párnych jadier určuje nespárovaný nukleón.) Porovnajzte vaše predpovede s experimentálnymi hodnotami získanými napr. na stránke <http://www.nndc.bnl.gov/chart/>  
 ${}^3_2\text{He}$ ,  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  ${}^{17}_9\text{F}$ ,  ${}^{21}_{10}\text{Ne}$ ,  ${}^{27}_{13}\text{Al}$ ,  ${}^{33}_{16}\text{S}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$

Výsledok:  ${}^3_2\text{He}(\frac{1}{2}^+)$ ,  ${}^9_4\text{Be}(\frac{3}{2}^-)$ ,  ${}^{15}_7\text{N}(\frac{1}{2}^-)$ ,  ${}^{17}_9\text{F}(\frac{5}{2}^+)$ ,  ${}^{21}_{10}\text{Ne}(\frac{5}{2}^+)$ ,  ${}^{27}_{13}\text{Al}(\frac{5}{2}^+)$ ,  ${}^{33}_{16}\text{S}(\frac{3}{2}^+)$ ,  ${}^{12}_6\text{C}(0^+)$  s experimentom nesedí len  ${}^{21}_{10}\text{Ne}$ , pre ktorý je zmerané  $\frac{3}{2}^+$ .

**Príklad 4.3** Experimentálne hodnoty celkového momentu hybnosti daných nepárno-nepárnych jadier sú nasledovné:  ${}^{16}_7\text{N} - 2^-$ ,  ${}^{12}_5\text{B} - 1^+$ ,  ${}^{34}_{15}\text{P} - 1^+$ ,  ${}^{28}_{13}\text{Al} - 3^+$ . Pre každé z jadier napíšte:

- Ako je orientovaný spin nespárovaného neutrónu voči jeho uhlovému momentu?
- Ako je orientovaný spin nespárovaného protónu voči jeho uhlovému momentu?
- Ako je orientovaný celkový moment hybnosti protónu voči celkovému momentu hybnosti neutrónu?

Na základe a), b),c) odpovedzte ako sú voči sebe orientované spiny neutrónu a protónu a z tohto poznatku odvoďte celkový moment hybnosti jadier  ${}^{26}_{11}\text{Na}$  a  ${}^{28}_{11}\text{Na}$ .

*Poučenie: spiny nespárovaných nukleónov sú orientované paralelne. Z tohto poznatku plynie pre spiny:  ${}^{26}_{11}\text{Na}(3^+)$ ,  ${}^{28}_{11}\text{Na}(1^+)$ .*

*Poučenie: spiny nespárovaných nukleónov sú orientované paralelne. Z tohto poznatku plynie pre spiny:  ${}^{26}_{11}\text{Na}(3^+)$ ,  ${}^{28}_{11}\text{Na}(1^+)$ .*

**Príklad 4.4** V prípade nepárno-nepárnych jadier určujeme moment hybnosti pomocou tzv. Nordheimových pravidiel

a) **Silné Nordheimove pravidlo**

Ak má jeden z dvoch nespárovaných nukleónov  $l$  a  $s$  paralelné a druhý antiparalelné, t.j.  $j_p = l_p + 1/2$ ,  $j_n = l_n - 1/2$ , má jadro celkový moment hybnosti  $I = |j_p - j_n|$

b) **Slabé Nordheimove pravidlo**

Ak majú oba nespárované nukleóny  $l$  a  $s$  paralelné alebo oba antiparalelné, tak moment hybnosti jadra nadobúda jednu z možných hodnôt  $I = j_p + j_n, j_p + j_n - 1, \dots, |j_p - j_n|$ . (Toto pravidlo sa vyskytuje v literatúre s mnohými obmenami.)

Vypočítajte spin a paritu nasledovných jadier a porovnajzte hodnoty s experimentálnymi údajmi  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  ${}^{34}_{17}\text{Cl}$ ,  ${}^{42}_{19}\text{K}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$ .

Výsledok:  ${}^{14}_7\text{N}(1^+, 0^+)$ ,  ${}^{34}_{17}\text{Cl}(3^+, 2^+, 1^+, 0^+)$ ,  ${}^{42}_{19}\text{K}(2^-)$ ,  ${}^{10}_5\text{B}(3^+, 2^+, 1^+, 0^+)$ ,  ${}^{64}_{29}\text{Cu}(1^+)$ . Experimentálne hodnoty sú zvýraznené tmavým.



# Cvičenie 5.

**Príklad 5.1** Spomeňte si, že vzťah medzi magnetickým dipólovým momentom nabitej častice  $\mu_z$  a momentom hybnosti  $L_z$  je daný

$$\mu_z = \frac{e}{2m} L_z. \quad (1)$$

Keďže  $L_z = \hbar m_l$ , kde  $m_l = l, l-1, \dots, \dots, -l$ , definujeme pozorovateľný magnetický moment  $\mu$  tak, že zodpovedá najväčšej hodnote  $m_l = l$ . Potom máme

$$\mu = g_l \mu_N l, \quad \text{s} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m} \quad \text{a} \quad g_l = 1 \quad (2)$$

pre elektrón bolo zistené, že magnetický dipólový moment, ktorý elektrón získa vďaka spinu je

$$\mu = g_s \mu_N s, \quad \text{kde} \quad g_s \approx 2. \quad (3)$$

Pre protón máme namerané hodnoty  $g_l = 1$  a  $g_s = 5.58569$  a pre neutrón  $g_l = 0$  (pretože je nenabitý) a  $g_s = -3.8260837$ .<sup>1</sup>

Pre nepárno-párne jadro určuje magnetický moment jadra nespárovaný nukleón. Výpočet dáva

$$\begin{aligned} j = l + 1/2 & \quad \mu = [g_l(j - 1/2) + g_s/2] \mu_N \\ j = l - 1/2 & \quad \mu = \left[ g_l \frac{j(j + 3/2)}{(j + 1)} - \frac{j}{2} \frac{1}{j + 1} g_s \right] \mu_N \end{aligned} \quad (4)$$

Vypočítajte magnetické momenty nasledovných jadier a hodnoty porovnajte s experimentálnymi (danými v zátvorkách):

${}^3_1\text{H}$  (2,98  $\mu_N$ ),  ${}^3_2\text{He}$  (-2,13  $\mu_N$ ),  ${}^{15}_7\text{N}$  (-0,283  $\mu_N$ ),  ${}^{17}_8\text{O}$  (-1,89  $\mu_N$ ),  ${}^{21}_{10}\text{Ne}$  (-0,66  $\mu_N$ )

*Výsledok*  ${}^3_1\text{H}$  (2,79  $\mu_N$ ),  ${}^3_2\text{He}$  (-1,91  $\mu_N$ ),  ${}^{15}_7\text{N}$  (-0,264  $\mu_N$ ),  ${}^{17}_8\text{O}$  (-1,91  $\mu_N$ ),  ${}^{21}_{10}\text{Ne}$  (-1,91  $\mu_N$ )

## Príklad 5.2

Vypočítajte:

- separačnú energiu protónu a neutrónu jadra  ${}^{15}_7\text{N}$ .
- separačnú energiu protónu jadra  ${}^{11}_7\text{N}$ .
- separačnú energiu neutrónu jadra  ${}^{24}_7\text{N}$ .
- separačnú energiu dvoch neutrónov a dvoch protónov jadra  ${}^{15}_7\text{N}$ .
- Ako sú definované tzv. "drip line"? Prečo existuje zopár jadier aj za týmito čiarami.

*Výsledok:* a)  $S_p = 10.2\text{MeV}$ ,  $S_n = 10.8\text{MeV}$  b)  $S_p = -1.9\text{MeV}$  c)  $S_n = -1.2 \pm 0.9\text{MeV}$  d)  $S_{2p} = 31\text{MeV}$ ,  $S_{2n} = 21.4\text{MeV}$

## Príklad 5.3

- Ukážte, že pre strednú dobu života nestabilného jadra platí  $\tau = 1/\lambda$ .
- Aký je vzťah medzi polčasom rozpadu a strednou dobou života nestabilného jadra?

*Postupa* a)  $\tau = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt$ , b)  $t_{1/2} = \ln 2 \tau$ .

<sup>1</sup>To, že  $g_s$  je pre protón rôzny od 2 a pre neutrón rôzny od nuly, patrí pravdepodobne k prvým dôkazom toho, že protón a neutrón nie sú základnými bodovými časticami.

### Príklad 5.4

Majme tri rádioaktívne zdroje, každý s aktivitou  $1 \mu\text{Ci}$  v čase  $t=0$ . Ich polčasy rozpadu sú: i) 1s, ii) 1h a iii) 1 deň.

a) Koľko rádioaktívnych jadier obsahuje zdroj v čase  $t = 0$ ?

b) Koľko jadier sa rozpadne v každom zdroji v časovom intervale  $t \in \langle 0, 1s \rangle$ ?

c) Koľko jadier sa rozpadne v každom zdroji v časovom intervale  $t \in \langle 0, 1h \rangle$ ?

d) Na základe b) a c) si všimnite, že meranie počtu rozpadnutých jadier  $\Delta N$  za čas  $\Delta t$  nám dá aktivitu  $A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ , práve vtedy keď  $\Delta t \ll t_{1/2}$ . Vysvetlite, prečo to tak je (Rozviňte výraz  $\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t)$  pomocou parametra  $\Delta t$ ).

*Výsledok:* a) i) 53 391.1, ii)  $1.922 \times 10^8$ , iii)  $4.613 \times 10^9$ , b) i) 26 691.6, ii) 36 996.4, iii) 36 999.9 c) i) 53 391.1, ii)  $9.6 \times 10^7$ , iii)  $1.31 \times 10^8$

**Príklad 5.5** Uvažujme rozpadový reťazec  $^{139}\text{Cs} \rightarrow ^{139}\text{Ba} \rightarrow ^{139}\text{La}$ . Na začiatku máme čistú vzorku  $^{139}\text{Cs}$  s aktivitou  $1\text{mCi}$ . Polčasy rozpadu sú: 9,5 min pre  $^{139}\text{Cs}$ ; 82,9 min pre  $^{139}\text{Ba}$  ( $^{139}\text{La}$  je stabilný). Aká je maximálna aktivita  $^{139}\text{Ba}$  a v akom čase ju dosahuje?

*Postup:* Aktivita  $^{139}\text{Cs}$  je  $A_1 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$ , aktivitu  $^{139}\text{Ba}$  dostaneme riešením rovnice  $dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt$ , hľadáme riešenie v tvare:  $N_2(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$ . Pre aktivitu potom dostávame:  
 $A_2 = \lambda_2 N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ . V čase  $t=33.54\text{s}$  dostávame maximum aktivity  $A_2 = 0.0865 A_1(t=0)$

### Príklady na precvičenie

C.V.1 Nájdiť relativistický vzťah pre de Broglého vlnu elektrónu alebo protónu, ak urýchľovacie napätie je  $U$ .  
( $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(qU)^2 + 2m_0 c^2 qU}}$ )

C.V.2 Nikel-62 má najväčšiu väzbovú energiu na jeden nukleón zo všetkých izotopov. Vypočítajte  $B/A$  v MeV pre toto jadro. (8,79 MeV)

C.V.3 Olovo-208 je stabilný izotop, ktorý je relatívne zriedkavý, kvôli jeho veľkej hmotnosti. Vypočítajte pre toto jadro a) hmotnostný úbytok (mass defect), b) väzbovú energiu a c) väzbovú energiu na jeden nukleón, výsledky vyjadrite v MeV. (a) -21,763 MeV, b) 1636,445 MeV, c) 7,87 MeV)

C.V.4 Aký je rozdiel v hmotnosti vypočítanej pomocou Weizsackerovej formuly a experimentálnymi hodnotami pre jadrá  $^{208}\text{Rn}$ ,  $^{210}\text{Rn}$ ,  $^{212}\text{Rn}$ ,  $^{214}\text{Rn}$ ,  $^{216}\text{Rn}$ . Vidíme tam shell efekt?

(Weizsackerova formula:  $m = Zm_H + Nm_N - B/c^2$ , kde  $B$  je väzbová energia z kvapkového modelu (vid'. príklad 2.2). Rozdiel medzi hmotnosťou z Weizsackerovej formuly a experimentálnymi hodnotami je nasledovný 2,9MeV, 3,9MeV, 5MeV, 5.8MeV, 3.87MeV, 2.25MeV. Teda naozaj, pre jadro s magickou vrstvou 126 pre neutróny  $^{212}\text{Rn}$ , je rozdiel medzi experimentom a kvapkovým modelom najväčší. Kvapkový model neobsahuje tzv. vrstvé (shell) efekty.)

# Cvičenie 6.

**Príklad 6.1** Na základe riešenia Schrodingerovej rovnice dokážte, že pravdepodobnosť prechodu častice cez pravouhlú bariéru výšky  $V_0$  (pre energiu častice platí  $E < V_0$ ) je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \alpha a}{4E(V_0 - E)}}, \quad \text{kde } \alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}. \quad (1)$$

**Príklad 6.2** Ukážte, že pre prechod ľubovoľnou potenciálovou bariérou dostávame

$$T \approx e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)} dx}. \quad (2)$$

## Príklad 6.3

Pomocou vzťahu z príkladu 6.1 odvodte  $t_{1/2}$  pre  $\alpha$  - rozpadajúce sa jadrá

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_0 f} e^{2(K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Zr})} \quad (3)$$

kde  $t_{1/2}$  je polčas  $\alpha$  - rozpadu jadra,  $\lambda_0$  je pravdepodobnosť vzniku  $\alpha$  - častice,  $f$  je počet nárazov  $\alpha$  - častice na bariéru za sekundu a  $r$  je polomer pôvodného jadra. Čomu sa rovnajú konštanty  $K_1$  a  $K_2$ ? Vyčíslite ich.

*Postup:* Počítame integrál  $I = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_r^{r_2} \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r'} - E\right)} dr'$ , použijeme substitúciu  $r' = r_2 \sin^2 u$  a využijeme, že typicky  $r \ll r_2$ , potom máme  $I \approx \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{rr_2}\right)$ , dosadíme za  $r_2$  zo vzťahu  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2}$ , potom  $I = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Zr}$ , kde  $K_1 = \frac{\sqrt{2m}c^2\pi}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) = 1.98\sqrt{MeV}$  a  $K_2 = \frac{4\sqrt{m}c^2}{\hbar c} \sqrt{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)} = 1.486 fm^{-1/2}$ .

## Príklad 6.4

Pomocou vzťahu z príkladu 6.3 vypočítajte  $T_{1/2}$  pre  $\alpha$  - rozpady

$${}_{90}^{220}\text{Th}(t_{1/2} = 10^{-5} s), Q_\alpha = 8.95;$$

$${}_{90}^{224}\text{Th}(t_{1/2} = 1.04 s), Q_\alpha = 7.31;$$

$${}_{90}^{232}\text{Th}(t_{1/2} = 4.4 \times 10^{17} s), Q_\alpha = 4.08;$$

porovnajte s experimentálnymi hodnotami danými v zátvorkách. Pri výpočte využite nasledujúce aproximácie

$$E \approx Q_\alpha, \lambda_0 \approx 1, f \approx v/(r_0 A^{1/3}), \text{ kde } v = \sqrt{\frac{2(Q+V_0)}{m}}, V_0 \approx 35 MeV.$$

*Výsledok (pri použití  $r = 1.2A^{1/3} fm$ ):*  ${}_{90}^{220}\text{Th}(t_{1/2} = 10^{-4} s)$ ,  ${}_{90}^{224}\text{Th}(t_{1/2} = 22.9 s)$ ,  ${}_{90}^{232}\text{Th}(t_{1/2} = 1.4 \times 10^{20} s)$

## Príklad 6.5

Pomocou vzťahu z príkladu 6.1 odvodte Geieger-Nuttalovo pravidlo (zákon), ktoré sa dá matematicky zapísať ako

$$\log_{10} T_{1/2} = a(Z) + \frac{b(Z)}{\sqrt{E}} \quad (4)$$

Čomu je rovné  $b(Z)$ ?

Postup: Zlogaritmujte rovnicu (3)  $b(Z) = 2K_1Z / \ln 10$

**Príklad 6.6**

V rozpade  $^{228}\text{Th} \rightarrow ^{224}\text{Ra} + \alpha$  majú emitované  $\alpha$  - častice najvyššiu energiu 5,423 MeV a druhú najvyššiu energiu 5,341 MeV.

a) Vypočítajte Q hodnotu z nameranej energie  $\alpha$ -častice.

b) Vypočítajte energiu 1. excitovaného stavu  $^{224}\text{Ra}$ .

*Výsledok:*  $Q = 5.52\text{MeV}$ ,  $E_{1ex} = 83,5\text{KeV}$

# Cvičenie 7.

## Príklad 7.1

Zo zákona zachovania energie a hybnosti odvod'te vzťah medzi kinetickou energiou  $\alpha$ -častice a  $Q$  hodnotou.

$$\text{Výsledok: } T_\alpha = \frac{Q}{1+m_\alpha/m_{X'}}$$

## Príklad 7.2

Pre prípad  $\alpha$ -rozpadu  ${}^{173}_{78}\text{Pt}$

a) vypočítajte kinetickú energiu  $\alpha$ -rozpadu pomocou vzťahov

i)  $T_\alpha = \frac{Q}{1+m_\alpha/m_{X'}}$

ii)  $T_\alpha \approx Q m_{X'}/m_X$

iii)  $T_\alpha \approx Q (1 - 4/A)$ , kde  $A$  je nukleónové číslo dcérskeho jadra

b) Koľko percent kinetickej energie odnáša  $\alpha$ -častica a koľko dcérske jadro?

c) Akú typickú energiu má spätný ráz dcérskeho jadra? Môže mať tento spätný ráz negatívny vplyv na biologické materiály?

*Výsledok: a) i) 6.20595 MeV, ii) 6.20571 MeV, iii) 6.2026 MeV b) pre  $A \in (100, 300)$  máme zo vzťahu iii)  $T_\alpha \in (0, 96Q, 0, 987Q)$ , takže dcérske jadro odnáša typicky okolo 2%  $Q$ -hodnoty. c) Pre typické  $Q$  hodnoty 5 MeV je typická energia dcérskeho jadra 100 keV, čiže môže rozbiť molekuly, a teda môže mať negatívny dopad na biologické materiály.*

## Príklad 7.3

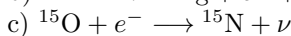
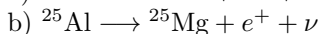
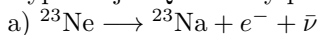
a) Vypočítajte  $Q$ -hodnotu rozpadu  ${}^{220}\text{Th} \rightarrow {}^{208}\text{Po} + {}^{12}\text{C}$ .

b) Vypočítajte polčas tohto rozpadu. Pri výpočte využite modifikované vzťahy z príkladov 6.1 a 6.2. (Akú hodnotu bude mať  $k_1$  a  $k_2$ ?)

$$\text{Výsledok } Q = 32.1385 \text{ MeV}, k_1 = 10.28 \text{ MeV}^{1/2}, k_2 = 4.425 \text{ fm}^{-1/2}, T_{1/2} = 1.2 \times 10^{14} \text{ s}$$

## Príklad 7.4

Vypočítajte  $Q$ -hodnoty pre nasledujúce rozpady



$$\text{Výsledok: a) } 4.38 \text{ MeV}, \text{ b) } 3.26 \text{ MeV} \text{ c) } 2.75 \text{ MeV}$$

## Príklad 7.5

Ukážte, že pre  $\beta^+$  rozpad zrkadlových jadier platí

$$Q = \Delta E_C - m_e c^2 - (m_N - m_P) c^2. \quad (1)$$

Ďalej ukážte, že  $Q$  hodnota  $\beta^+$  rozpadu zrkadlových jadier závisí lineárne na  $A^{2/3}$ . Zo zmeraného sklonu priamky sa dá určiť  $r_0$ . (Tento príklad demonštruje nezávislosť jadrových síl na náboji.)

*Postup: Rozdiel väzbových energií pre zrkadlové jadrá je daný len Coulombovou interakciou  $\Delta E_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2Z-1)}{r_0 A^{1/3}}$ , v nami uvažovanom prípade pre zrkadlové jadrá platí  $A = 2Z - 1$ , potom dostávame  $Q = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^{2/3}}{r_0} - 1.8 \text{ MeV}$*