Príklady z VTR

I. Metrický tenzor

I.1 Sféra

$\boxed{\text{I.1.1}}$ *Sféra v kolmej projekcii.* Zavedenie súradníc na zakrivenej ploche si môžeme predstaviť ako projekciu plochy na rovinu. Nájdite metriku jednotkovej sféry v projekcii, pri ktorej sa body sféry premietajú na rovinu po kolmici. Využite polárne súradnice. $[\frac{dr\otimes dr}{1-r^2} + r^2 d\phi\otimes d\phi]$ Pozn.: mierka na mapách sa zvykne vysvetľovať vetou „jeden centimeter na sa rovná toľko a toľko centimetrov v skutočnosti“, čo nie je presné. Výsledok príkladu sa dá použiť na presnejšiu formuláciu. (Nie úplne presnú, lebo Zem nie je ideálna guľa.) Ako?

$\boxed{\text{I.1.2}}$ *Sféra v stereografickej projekcii.* Stereografická projekcia je projekcia sféry z pevne zvoleného bodu („severného pólu“) na rovinu dotyčnicovú k sfére v protiľahlom bode („južnom póle“). Nájdite metriku jednotkovej sféry v tejto projekcii. $[\frac{dr\otimes dr + r^2 d\phi\otimes d\phi}{(1+r^2/4)^2}]$

$\boxed{\text{I.1.3}}$ *Sféra v Mercatorovej projekcii.* Mercatorova projekcia je projekcia sféry, pri ktorej sa „vypriamujú“ krivky zvané loxodrómy, ktoré zvierajú konštantný uhol s poludníkmi. Nájdite metriku jednotkovej sféry v tejto projekcii. $[\frac{dx\otimes dx + dy\otimes dy}{\cosh^2 y}]$

$\boxed{\text{I.1.4}}$ *Izotropné súradnice na sfére.* Izotropné súradnice na ploche sú súradnice, v ktorých má metrika tvar $\Omega^2\,(dx^2+dy^2)$, resp. $\Omega^2\,(dr^2 dr + r^2 d\phi^2)$. (Prečo sa tak volajú?) Na rotačne invariantných plochách sa dajú zaviesť izotropné súradnice s uhlom ϕ rovnakým ako pri kolmej projekcii a s $\Omega = \Omega(r)$. Ukážte, že na sfére sú jedinými súradnicami vyhovujúcimi tejto definícii tie, ktoré dostaneme stereografickou projekciou na rovinu posunutú do ľubovoľného bodu na spojnici pólov (samozrejme okrem severného pólu).

$\boxed{\text{I.1.5*}}$ *Izometrie sféry.* Sféra má SO(3) symetriu s 3 Killingovými vektormi, zodpovedajúcimi rotáciami okolo 3 navzájom kolmých osí. Overte toto tvrdenie riešením Killingových rovníc v súradniciach (r,ϕ), získaných kolmou projekciou.

$[\xi^r = A\cos(\phi-\phi_0)\sqrt{1-r^2},\ \xi^r = \frac{A}{r}\sin(\phi-\phi_0)\sqrt{1-r^2} + B]$

I.2 Iné zaujímavé plochy

$\boxed{\text{I.2.1}}$ *Traktrixová plocha.* Traktrixa je krivka, ktorej vzdialenosť od danej priamky (asymptoty), meraná po dotyčnici, sa všade rovná danej dĺžke (parametru traktrixy). Nájdite metriku plochy, ktorá vznikne rotáciou traktrixy s parametrom 1 okolo jej asymptoty. [$\frac{dr\otimes dr}{r^2} + r^2 d\phi\otimes d\phi$ alebo $d\chi\otimes d\chi + e^{2\chi}d\phi\otimes d\phi$]

$\boxed{\text{I.2.2}}$ *Lobačevského rovina.* Lobačevského rovina s polomerom krivosti a je hyperboloid $x^2+y^2-z^2=-a^2$, $z>0$, v pseudoeuklidovskom priestore s metrikou $dx^2+dy^2-dz^2$. Nájdite metriku Lobačevského roviny s polomerom krivosti 1. [$\frac{dr\otimes dr}{1+r^2} + r^2 d\phi\otimes d\phi$ alebo $d\chi\otimes d\chi + \sinh^2\chi d\phi\otimes d\phi$]

$\boxed{\text{I.2.3}}$ *Priestor rýchlostí v ŠTR.* Majme 2D priestor rýchlosti so vzdialenosťou blízkych bodov definovanou ako relatívna rýchlosť počítaná podľa relativistického vzorca. Ukážte, že tento priestor je Lobačevského rovina.

$\boxed{\text{I.2.4}}$ *Einsteinov-Rosenov most.* Čierna diera s gravitačným polomerom 1 má v ekvatoriálnej rovine metriku $\frac{dr^2}{1-1/r} + r^2 d\phi^2$. Pri $r=1$ je horizont (povrch čiernej diery). Vnorte ekvatoriálnu rovinu nad horizontom do 3D euklidovského priestoru [$z=\sqrt{r-1}$] a presvedčte sa, že vnorená plocha sa dá na horizonte hladko spojiť so zrkadlovo symetrickou plochou. Cez horizont sa teda dá prejsť do iného vesmíru. (Pravda, potrebovali by sme na to nadsvetelnú rýchlosť.) Most medzi dvoma vesmírmi, tvorený horizontom čiernej diery sa nazýva Einsteinov-Rosenov most. Dal sa vidieť vo filme Kontakt s Jody Fosterovou.

$\boxed{\text{I.2.5}}$ *Ešte raz Einsteinov-Rosenov most.* Popíšte metriku ekvatoriálnej roviny čiernej diery do izotropných súradníc a presvedčte sa, že tieto súradnice pokrývajú oba vesmíry spojené ER mostom. [$\left(1+\frac{1}{4\rho}\right)^4 d\rho\otimes d\rho + \rho^2 d\phi\otimes d\phi$, jednému vesmíru prislúcha $\rho>\frac{1}{4}$ a druhému $0<\rho<\frac{1}{4}$]

$\boxed{\text{I.2.6}}$ *Izometria mydlovej blany a schodiska.* Nájdite plochu s minimálnym obsahom („mydlovú blanu“) preloženú kružnicami $r\equiv\sqrt{x^2+y^2}=\cosh 1$, $z=\pm 1$ [$r=\cosh z$], a ukážte, že táto plocha má lokálne rovnakú metriku ako plocha $z=\phi$ („točité schodisko“ s výškou pochodia 2π). Čo by sme mali urobiť so schodiskom, aby bolo izometrické mydlovej blane aj globálne?

$\boxed{\text{I.2.7*}}$ *Izometria traktrixovej plochy s Lobačevského rovinou.* Nájdite transformáciu súradníc, pri ktorej prejde pozdĺžne rozrezaná horná polovica traktrixovej plochy na časť Lobačevského roviny. Návod: Lobačevského rovina má SO(2,1) symetriu s 3 Killingovými vektormi, dvomi generujúcimi posunutia a jedným generujúcim otočenia. Utvorte z otočení a posunutí v smere osi x novú transformáciu a „natiahnite“ na príslušný Killingov vektor Φ na traktrixovej ploche. [$x = R\Phi$, $y = \frac{1}{2}R\Phi^2 + \frac{1-R^2}{2R}$, kde $(x{,}y)$ sú súradnice na Lobačevského rovine a $(R{,}\Phi)$ sú súradnice na traktrixovej ploche]

I.3 Lokálna metrika

$\boxed{\text{I.3.1}}$ *Krivosť krivky.* Polomer krivosti krivky je polomer dotyčnicovej kružnice ku krivke so znamienkom plus, ak je krivka konvexná, a so znamienkom mínus, ak je konkávna, a krivosť krivky je prevrátená hodnota tohto polomeru. Nájdite krivosť krivky, ak poznáme jej rovnicu. [$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$, kde $y(x)$ je funkcia zadávajúca krivku]

$\boxed{\text{I.3.2}}$ *Lokálne kartézske súradnice.* Ak v dotyčnicovej rovine k ploche vhodne zvolíme osi X a Y, rovnica plochy bude $Z = \frac{1}{2}k_X X^2 + \frac{1}{2}k_Y Y^2 +$ členy vyššieho rádu v X, Y. Veličiny k_X a k_Y sa nazývajú hlavné krivosti plochy. Pri $k_X k_Y > 0$ máme plochu typu „miska“ a pri $k_X k_Y < 0$ plochu typu „sedlo“. Nájdite metriku plochy v súradniciach X, Y do členov 2. rádu v X, Y. [$(1 + k_X^2 X^2)\, dX \otimes dX + k_X k_Y XY(dX \otimes dY + dY \otimes dX) + (1 + k_Y^2 Y^2)\, dY \otimes dY$] Krivosť plochy $k(\vec{n})$ v smere jednotkového vektora $\vec{n}$, ktorý leží v dotyčnicovej rovine k ploche, je krivosť priesečnice plochy s rovinou preloženou normálovým vektorom k ploche a vektorom $\vec{n}$. Ukážte, že k_X a k_Y sú extrémne hodnoty $k(\vec{n})$.

$\boxed{\text{I.3.3}}$ *Gaussova krivosť rotačnej plochy.* Gaussova krivosť je súčin hlavných hodnôt krivosti plochy, $K = k_X k_Y$. Táto veličina závisí iba od vnútornej geometrie plochy, teda môžu ju zmerať 2-rozmerné bytosti, ktoré žijú na ploche (!). Nájdite Gaussovu krivosť rotačnej plochy. [$\frac{z''z'}{r\left(1+z'^2\right)^2}$, kde $z(r)$ je funkcia zadávajúca plochu]

I.4 Vzdialenosti a časové intervaly

$\boxed{\text{I.4.1}}$ *Rovnomerne zrýchlená sústava.* Zostrojte súradnicovú sústavu v plochom priestoročase prislúchajúcu vzťažnej sústave pozorovateľa, ktorý koná hyperbolický pohyb s daným zrýchlením a, a nájdite metriku priestoročasu v tejto sústave. (Hyperbolický pohyb je pohyb telesa s konštantným zrýchlením v okamžitej pokojovej sústave telesa, pri ktorom má svetočiara telesa tvar hyperboly. Pohybujúci sa pozorovateľ konštruuje svoju vzťažnú sústavu tak, že udalostiam súčasným v jeho okamžitej pokojovej sústave Σ_0 s udalosťou na jeho svetočiare, ktorá nastala v jeho vlastnom čase τ, priradí čas $\bar{t} = \tau$ a priestorové súradnice $\bar{x}$, prislúchajúce týmto udalostiam v sústave Σ_0.) Prediskutujte podobnosť súradníc $\bar{t}$, $\bar{x}$ s polárnymi súradnicami v rovine. Ako idú súradnicové hodiny v zrýchlenej sústave? [$x = (a^{-1} + \bar{x}) \cosh (a\bar{t})$, $t = (a^{-1} + \bar{x}) \sinh (a\bar{t})$;

$(1+a\bar{x})^2 d\bar{t}\otimes d\bar{t} - d\bar{x}\otimes d\bar{x}$]

I.4.2 *Rotujúci disk.* Nájdite metriku plochého priestoročasu v sústave rotujúcej s konštantnou uhlovou rýchlosťou Ω, so súradnicovým časom rovnakým ako v stojacej sústave. Ukážte, že v tejto sústave je metrika stacionárna, a nájdite metrický tenzor 3-rozmerného priestoru. [t a r ostáva, $\bar{\phi}=\phi-\Omega t$; $(1-\Omega^2 r^2)dt\otimes dt - \Omega r^2(dt\otimes d\bar{\phi} + d\bar{\phi}\otimes dt) - dr\otimes dr - r^2 d\bar{\phi}\otimes d\bar{\phi}$; $d\bar{r}\otimes d\bar{r} + \frac{\bar{r}^2}{1-\Omega^2\bar{r}^2} d\bar{\phi}\otimes d\bar{\phi} + d\bar{z}\otimes d\bar{z}$]

II. Afinná konexia

II.1 *Geodetiky v 1-rozmernom stláčajúcom sa vesmíre.* Nájdite izotropné a časupodobné geodetiky v 1+1 rozmernom priestore s metrikou $t^{-2}\left(dt^2 - dx^2\right)$, $t>0$. [$x = \pm t +$ konšt; $x = \pm\left(\alpha_0^2 + t^2\right)^{1/2} +$ konšt, kde α_0 je ľubovoľná konštanta]

II.2 *Izotropné geodetiky v konformne plochom priestoročase.* Ukážte, že izotropné geodetiky v konformne plochom priestoročase (v priestoročase s metrikou $\Omega^2 ds_0^2$, kde ds_0^2 je Minkowského metrika a Ω je funkcia súradníc), ak ich zapíšeme v „konformne Lorentzovských“ súradniciach (v súradniciach, v ktorých má metrický tenzor tvar $\Omega^2\eta_{\mu\nu}$), sú priamky pod uhlom 45° k časovej osi.

III. Tenzor krivosti

III.1 *Plochy s konštantnou krivosťou.* Nájdite afinnú konexiu, Riemannov tenzor, Ricciho tenzor a skalárnu krivosť roviny v polárnych súradniciach, jednotkovej sféry v sférických súradniciach a jednotkovej Lobačevského roviny v pseudosférických súradniciach. [$\Gamma^1_{22} = -r$, $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$, $R_{ijkl} = 0$; $\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^2_{12} = -\mathrm{cotg}\,\theta$, $R_{1212} = \sin^2\theta$, $R_{ij} = g_{ij}$, $R = 2$; $\Gamma^1_{22} = -\sinh\theta\cosh\theta$, $\Gamma^2_{12} = -\coth\theta$, $R_{1212} = -\sinh^2\theta$, $R_{ij} = -g_{ij}$, $R = -2$]

III.2 *Súvis medzi skalárnou a Gaussovou krivosťou.* Ukážte, že skalárna krivosť plochy sa rovná dvojnásobku Gaussovej krivosti. Návod: viď príklad I.3.2.

III.3 *Ešte raz plochy s konštantnou krivosťou.* Presvedčte sa, že jediné plochy s konštantnou krivosťou sú sféra (S^2), rovina (E^2) a pseudosféra alebo Lobačevského rovina (PS^2). Predpokladajte rotačnú symetriu.

III.4 *Krivosť vo vrchole kužeľovej plochy.* Určte skalárnu krivosť vo vrchole kužeľovej plochy s vrcholovým uhlom 2ω. Návod: porovnajte plošný integrál zo skalárnej krivosti na kuželi s „ostrým špicom“ s tou istou veličinou na kuželi s „tupým špicom“.

[$2\left(\frac{1}{\sin\omega} - 1\right)\frac{\delta(r)}{r}$, kde r je vzdialenosť od vrcholu kužeľa]

$\boxed{\text{III.5}}$ *Krivosť v ústí červej diery.* Krátka červia diera v 2D je plocha s dvoma vykrojenými osovo symetrickými oblasťami a so stotožnenými osovo symetrickými bodmi na hraniciach týchto oblastí; vykrojené oblasti sú otvory červej diery a ich (spoločná) hranica je ústie červej diery. Nájdite skalárnu krivosť v ústí krátkej červej diery spájajúcej dvojicu jednotkových kruhov v rovine. Návod: zaveďte v okolí ústia červej diery súradnice $r = r_1 = 2 - r_2$, kde r_1, r_2 sú vzdialenosti merané od stredov otvorov červej diery a $\phi = \phi_1 = \phi_2$, kde ϕ_1, ϕ_2 sú uhly definované osovo symetricky vzhľadom na stredy otvorov červej diery. [$-4\delta(r-1)$]

$\boxed{\text{III.6}}$ *Skalárna krivosť konformne plochého priestoročasu.* Určte skalárnu krivosť konformne plochého priestoročasu definovaného v príklade II.2. [$6\Omega^{-3}\Box_0\Omega$, kde $\Box_0$ je Dalambertián vzhľadom na metriku $\eta_{\mu\nu}$]

IV. Einsteinove rovnice gravitačného poľa

$\boxed{\text{IV.1}}$ *Nordstromova teória gravitácie.* Nordstromova teória je teória gravitácie s metrikou $ds^2 = e^{2\Phi}ds_M^2$, kde ds_M^2 je Minkowského metrika a Φ je gravitačný potenciál. Rovnica gravitačného poľa v tejto teórii je $R = \kappa_N T$. Zistite z newtonovskej limity, čomu sa rovná konštanta κ_N. [$24\pi\kappa$]

$\boxed{\text{IV.2}}$ *Hustota hmotnosti struny.* Určte lineárnu hustotu hmotnosti priamej struny s uhlovým deficitom α. (Priestoročas so strunou je definovaný ako časová os $\times$ priestor so strunou, priestor s priamou strunou je definovaný ako priamka $\times$ kužeľová plocha a uhlový deficit kužeľovej plochy je uhol, ktorý kužeľovej ploche „chýba do roviny“.) [$\frac{1}{4\pi\kappa}\frac{\alpha}{2\pi}$]

$\boxed{\text{IV.3}}$ *Tenzor energie-hybnosti červej diery.* Nájdite tenzor energie-hybnosti 3-rozmernej krátkej červej diery s ústiami v tvare jednotkových gulí. (Priestoročas s červou dierou je definovaný ako časová os $\times$ priestor s červou dierou.) [$T_{00} = -2u$, $T_{rr} = 0$, $T_{\theta\theta} = u$, $T_{\phi\phi} = u\sin^2\theta$, kde $u \equiv \frac{1}{4\pi\kappa}\delta(r-1)$]

$\boxed{\text{IV.4}}$ *Energia newtonovského gravitačného poľa.* Nájdite zložku (00) pseudotenzora energie-hybnosti newtonovského gravitačného poľa a presvedčte sa, že energia poľa vypočítaná z tejto veličiny vyjde „správne“. (Newtonovské gravitačné pole je $h_{00} = 2\Phi$, $h_{0i} = 0$, $h_{ij} = 2\Phi\delta_{ij}$, kde Φ spĺňa podmienky $|\Phi| \ll 1$, $|\Phi_{,0}| \ll |\Phi_{,i}|$.) Návod k druhej časti: $E = E_{\text{celk}} - E_0$, kde $E_{\text{celk}} \equiv \int (-g)\left(T^{00} + t^{00}\right) dV$ a $E_0 \equiv \int T^{\hat{0}\hat{0}} d\hat{V}$; strieškou sú označené veličiny vzťahujúce sa k ortonormovanej tetráde v danom bode priestoročasu. $[t^{00} = -\frac{7}{8\pi\kappa}\left(\nabla\Phi\right)^2$, $E = -\frac{1}{8\pi\kappa}\int \left(\nabla\Phi\right)^2 dV]$

V. Dôsledky VTR

$\boxed{\text{V.1}}$ *Ohyb svetla v Nordstromovej teórii.* Presvedčte sa priamym výpočtom, že v Nordstromovej teórii je ohyb svetla v slabom sféricky symetrickom poli nulový. (Dôkaz pre ľubovoľné poľe viď II.2.)

$\boxed{\text{V.2}}$ *„Gravitačná šošovka“.* Nájdite tvar šošovky, ktorá simuluje ohyb svetla v gravitačnom poli sféricky symetrického zdroja. $[z_{\pm} = \pm h \ln R/r$, $R_0 \leq r \leq R]$

$\boxed{\text{V.3}}$ *Vplyv rotácie zdroja na ohyb svetla.* Určte dodatočný ohyb svetla spôsobený strhávaním inerciálnych sústav v poli rotujúceho zdroja. (Nediagonálne zložky metriky v poli rotujúceho zdroja sú $h_{0i} = \frac{2(\vec{a}\times\vec{n})^i}{r^2}$, kde $\vec{a} = \kappa\times$ moment hybnosti zdroja, $\vec{n}$ je jednotkový vektor v smere pozorovania a r je vzdialenosť pozorovateľa od stredu zdroja.) $[\delta\alpha = \frac{4a}{\rho^2}$, kde ρ je zámerný parameter lúča$]$

$\boxed{\text{V.4}}$ *Precesia perihélia spôsobená sploštením Slnka.* Určte, o aký uhol sa otočí dráha testovacej častice za jeden obeh v dôsledku sploštenia zdroja, ak sa častica pohybuje v rovine kolmej na os symetrie zdroja po približne kruhovej dráhe. Sploštenie zdroja opisuje dodatočný člen v newtonovskom gravitačnom potenciáli $\frac{-\kappa AM}{r^3}$, kde M je hmotnosť zdroja, r je vzdialenosť od stredu zdroja a A je konštanta s rozmerom (dĺžka)^2. Návod: vo vyjadrení $dr/d\phi$ prejdite od r k $u \equiv 1/r$ a funkciu pod odmocninou rozviňte okolo hodnoty nezávisle premennej u_0, v ktorej je jej hodnota maximálna, do členov druhého rádu vo veličine $u - u_0$. Po návrate k premennej r využite, že veličina $dr/d\phi$ má rovnaký tvar ako v prípade so sféricky symetrickým zdrojom s odlišnou konštantou pri $1/r^2$. $[\frac{6\pi A}{r^2}]$

$\boxed{\text{V.5}}$ *Hviezdy zložené z nestlačiteľnej kvapaliny.* Nájdite závislosť pomeru r_g/R, kde r_g je gravitačný polomer hviezdy a R je polomer hviezdy, od tlaku v centre hviezdy, ak je hviezda zložená z nestlačiteľnej kvapaliny (hustota látky vnútri nej je konštantná). Zistite, akú maximálnu hodnotu môže nadobudnúť pomer r_g/R v tomto prípade. $[x \equiv \frac{r_g}{R} = 1 - \left(\frac{\rho+p_c}{\rho+3p_c}\right)^2$, kde p_c je tlak v centre hviezdy a ρ je hustota látky vnútri hviezdy; $x_{\max} = \frac{8}{9}]$

$\boxed{\text{V.6}}$ *Kruhové orbity v Schwarzschildovej metrike.* Ukážte, že kruhové orbity častice s nenulovou pokojovou hmotnosťou v Schwarzschildovej metrike existujú iba pri $r > \frac{3}{2} r_g$ a sú stabilné iba pri $r > 3r_g$, kde r_g je gravitačný polomer zdroja. Presvedčte sa, že pre periódu obiehania P meranú súradnicovými hodinami platí pri ľubovoľnom polomere orbity tretí Keplerov zákon. Návod: zapíšte veličinu $\dot{r}^2$ v tvare $\Gamma^2 - V^2(r, \lambda)$, kde $\Gamma \equiv u_0$ a $\lambda \equiv -u_\phi$, a vyšetrite extrémy „štvorca potenciálu" V^2 ako funkcie r; potom využite podmienky $\Gamma^2 - V^2 = V^2{}_{,r} = 0$ na vyjadrenie veličín λ a Γ ako funkcií r a získané vyjadrenia dosaďte do vzťahu $d\phi/dt = 2\pi/P$. [$V^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right)$, V^2 má minimum pri r_+ a maximum pri r_-, kde $r_\pm \equiv \frac{1}{r_g}\left(\lambda^2 \pm |\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3r_g^2}\right)$; $\frac{r^3}{P^2} = \frac{r_g}{8\pi^2} = \frac{\kappa M}{4\pi^2}$, kde M je hmotnosť zdroja]

$\boxed{\text{V.7}}$ *Spomaľovanie dvojhviezdy vyžarovaním gravitačných vĺn.* Nájdite výkon gravitačných vĺn W dvojice hviezd s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré obiehajú okolo spoločného hmotného stredu s uhlovou rýchlosťou ω po kruhových dráhach s polomermi r_1 a r_2, a určite rýchlosť zmeny periódy $\dot{P}$ v dôsledku vyžarovania gravitačných vĺn. [$W = \frac{32}{5}\kappa\omega^6\mu^2 r^4$, kde $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ a $r \equiv r_1 + r_2$; $\dot{P} = -\frac{195\pi}{5}\frac{m_1 m_2}{m^2}\left(\frac{\kappa m}{r}\right)^{5/2}$, kde $m \equiv m_1 + m_2$]