Dodatočné príklady z VTR

0. Minkowského priestor

1. Relatívna rýchlosť. Vyjadrite relatívnu rýchlosť pozorovateľov 1 a 2 (a) cez u_1 a u_2, (b) cez $du = u_2 - u_1$ pre infinitezimálne blízke u_1 a u_2. Pomocou výsledku úlohy (b) ukážte, že priestor rýchlostí, v ktorom je vzdialenosť medzi infinitezimálne blízkymi bodmi definovaná ako relatívna rýchlosť, je 3-rozmerná hypersféra s polomerom 1 (nadplocha $\xi^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $\xi > 0$, v priestore s metrickým tenzorom $g = -d\xi^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$). Bude sa aj *konečná* vzdialenosť v tomto priestore rovnať relatívnej rýchlosti? RIEŠENIE: (a) $\sqrt{1-(u_1\ .\ u_2)^{-2}}$, (b) $\sqrt{du^2}$.

2. Výmena tachyónov. Pozorovateľ 1 vyšle tachyón k pozorovateľovi 2, pohybujúcemu sa smerom od neho, a keď ho pozorovateľ 2 zachytí, vyšle k pozorovateľovi 1 druhý tachyón, ktorá tam dorazí práve v okamihu vyslania prvého tachyónu. (Pri tachyónoch je taká patalógia možná!) Určte (a) rýchlosť tachyónov vzhľadom na „svojich" pozorovateľov, ak je táto rýchlosť pri oboch tachyónoch rovnaká (využite, že obaja pozorovatelia vyšlú svoj tachyón v rovnakom vlastnom čase po svojom stretnutí – prečo?), (b) interval, z ktorého musí byť pomer vlastných časov, v ktorých pozorovatelia vyšlú svoje tachyóny, ak oba tachyóny postupujú vzhľadom na „svojho" pozorovateľa dopredu v čase. Výsledky zapíšte cez $\gamma = -u_1\ .\ u_2$. RIEŠENIE: (a) $\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}$, (b) (γ^{-1}, γ).

3. Rozptyl elektrónu na elektróne. Elektrón s energiou E sa pružne zráža so stojacim elektrónom. Nájdite (a) krivku, ktorú opisuje koncový bod vektora hybnosti nalietavajúceho elektrónu po zrážke, keď meníme uhol rozptylu a ponechávame nezmenenú rovinu rozptylu, (b) minimálny uhol medzi smermi pohybu rozptýlených elektrónov. RIEŠENIE: (a) elipsa s pomerom poloosí $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{2m}{E+m}}$, (b) $\arccos\dfrac{E-m}{E+3m}$.

4. Comptonov jav. Fotón s energiou $\omega \gg m$, kde m je hmotnosť elektrónu, sa pružne zráža so stojacim elektrónom. Nájdite (a) energiu fotónu v sústave hmotného stredu, (b) energiu fotónu v laboratórnej sústave po zrážke, ak je daný uhol rozptylu v sústave hmotného stredu χ. Obe veličiny zrátajte *približne* (v najnižšom nenulovom ráde v m/ω). RIEŠENIE: (a) $\sqrt{\dfrac{m\omega}{2}}$, (b)

$\frac{1}{2}\omega(1 + \cos\chi)$.

5. Prierez zväzku lúčov. Dokážte, že priečny prierez rovnobežného zväzku lúčov je v každej inerciálnej sústave rovnaký. Návod: predpokladajte, že zväzok má prierez v tvare rovnobežníka, a ten natiahnite na 4-vektory a, b kolmé na 4-rýchlosť pozorovateľa u.

6. Výmena svetelného signálu. Pozorovateľ 1 vyšle svetelný signál k pozorovateľovi 2, pohybujúcemu sa smerom od neho. Určte (a) pomer vlastného času, ktorý uplynie od stretnutia pozorovateľov po prijatie signálu na hodinách pozorovateľa 2, k vlastnému času, ktorý uplynie od stretnutia pozorovateľov po vyslanie signálu na hodinách pozorovateľa 1, (b) vlnový 4-vektor signálu (modulo súčiniteľ). Výsledky zapíšte cez u_1, u_2 a $\gamma = -u_1 \, . \, u_2$. Presvedčte sa, že frekvencie signálu, ktoré namerajú pozorovatelia 1 a 2, sú v rovnakom pomere ako vlastné časy. Prečo je to tak? RIEŠENIE: (a) $\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ $\left(= \sqrt{\dfrac{1+v}{1-v}}\right.$, kde v je relatívna rýchlosť pozorovateľov), (b) $(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})u_2 - u_1$.

I. Metrický tenzor

1. Hilbertove podmienky. Dokážte, že ak platí prvá Hilbertova podmienka,

$$g_{00} > 0,$$

metrický tenzor 3-rozmerného priestoru γ_{ij} je pozitívne definitný práve vtedy, keď metrický tenzor priestoročasu $g_{\mu\nu}$ spĺňa ďalšie tri Hilbertove podmienky

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g \equiv \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Návod: použite postup zo Zlatošovej učebnice, kde sa dokazuje analogická veta o pozitívne definitnej metrike. Ak neuspejete, urobte dôkaz „na kolene" podľa textu *Vzdialenosti a časové intervaly.*

II. Afinná konexia

1. Normálne súradnice. Normálne súradnice bodu Q z okolia bodu P sú súradnice $X^\mu = u^\mu s$, kde u^μ je normovaný vektor dotyčnicový ku geodetike PQ v bode P a s je dĺžka geodetiky PQ. Dokážte, že v týchto súradniciach platí

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu,\lambda}(P) = 0.$$

2. Konštrukcia lokálnych lorentzovských súradníc. Dokážte, že transformáciou $x^\mu \to X^\mu$, kde x^μ sú globálne súradnice a X^μ sú lokálne súradnice v okolí bodu P, vo všeobecnosti nemôžeme dosiahnuť, aby platilo

$$g_{\mu\nu,\kappa\lambda}(P) = 0.$$

Nájdite, koľko veličín $g_{\mu\nu,\kappa\lambda}(P)$ nemôžeme dopredu zadať (malo by ich byť 20 – toľko, koľko je zložiek tenzora krivosti).

3. Neinerciálne sústavy v ŠTR. Nech sa pozorovateľ pohybuje v plochom priestoročase pozdĺž svetočiary $x_0^\mu(\tau)$, kde τ je jeho vlastný čas, a nech si so sebou nesie ortonormálny repér ${e_\alpha}^\mu(\tau)$ s vektorom ${e_0}^\mu$ dotyčnicovým k jeho svetočiare, ${e_0}^\mu$ = 4-rýchlosť pozorovateľa = $\dot{x}_0^\mu$. Na repér môže pozorovateľ „natiahnuť" súradnice $\bar{x}^\mu = (\bar{t}, \bar{x}^a)$, kde $\bar{t}$ je čas na jeho hodinách v okamihu súčasnom s danou udalosťou v jeho okamžitej pokojovej sústave a $\bar{x}^a$ sú kartézske priestorové súradnice udalosti v tejto sústave. Zapíšte metriku priestoročasu v súradniciach $\bar{x}^\mu$ cez zrýchlenie pozorovateľa $\mathbf{a}$ a jeho uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ a nájdite tvar oblasti, ktorá je nimi pokrytá, pri $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{a}$. RIEŠENIE: $ds^2 = [(1 + \mathbf{a} \,.\, \bar{\mathbf{x}})^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}})^2] d\bar{t}^2 - 2(\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}) \,.\, d\bar{t} d\bar{\mathbf{x}} - d\bar{\mathbf{x}}^2$, hľadaná oblasť je daná podmienkou $g_{00} > 0$. Konštrukciu metriky aj diskusiu, ako vyzerá hľadaná oblasť, nájdete v texte *Zrýchlený pozorovateľ*.

4. Strhávanie inerciálnych sústav. Nájdite uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}_{LIS}$, ktorou sa otáčajú LIS v stacionárnej metrike vzhľadom na pozorovateľov v nekonečne. Vyjadrite túto uhlovú rýchlosť cez priestorový kovektor $\mathbf{g}$ so zložkami $g_i = -g_{0i}/g_{00}$, ktorý vystupuje vo vzorci pre synchronizačný čas. (V bezsúradnicovom zápise $\mathbf{g} = \mathbf{d}t_\perp$, viď text *Vzdialenosti a časové intervaly*.) RIEŠENIE:

$\boldsymbol{\omega}_{LIS} = -\frac{1}{2}g_{00}^{1/2}\nabla \times \mathbf{g}$. Uhlová rýchlosť LIS je mínus uhlová rýchlosť stojaceho pozorovateľa, ktorá sa počíta zo vzorca $\omega_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}e_b \cdot \nabla_0 e_c$. Podrobnosti sú v texte *Zrýchlený pozorovateľ.*

III. Tenzor krivosti

1. Algebraické symetrie tenzora krivosti. Určte, koľko nezávislých zložiek má tenzor krivosti v n-rozmernom priestore. Návod: využite antisymetrie v prvých a druhých dvoch indexoch na prechod k štvorcovej matici. Symetrie, z ktorých sa vychádza pri riešení úlohy, nie sú nezávoislé: symetria v dvoch dvojiciach indexov vyplýva z antisymetrie v prvých a druhých dvoch indexoch a z cyklickej identity. Vedeli by ste to dokázať?

2. Metrika v normálnych súradniciach. Ukážte, že metrický tenzor v normálnych súradniciach do rádu X^2 je

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\kappa\nu\lambda}(P)X^\kappa X^\lambda.$$

Návod: využite, že v normálnych súradniciach platí $\Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda}$ + sym. v $(\nu\kappa\lambda) = 0$ (prečo?).

IV. Einsteinove rovnice

1. Einsteinov tenzor. Ukážte, že kontravariantný Einsteinov tenzor sa dá v pseudoLIS zapísať ako

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{-1}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - \nu \leftrightarrow \kappa)]_{,\kappa\lambda}.$$

Návod: využite, že v pseudoLIS platí $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \dfrac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\nu\kappa} + g_{\nu\kappa,\mu\lambda} - \kappa \leftrightarrow \lambda)$.

2. Hmotnosť gravitujúceho telesa. Inerciálna hmotnosť gravitujúceho telesa je

$$m_{inerc} = \oint h^{00i}dS^i,$$

kde $h^{\mu\nu\kappa}$ je potenciál pseudotenzora energie-hybnosti

$$h^{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2\kappa_E}\left[(-g)\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - \nu \leftrightarrow \kappa\right)\right]_{,\lambda},$$

a integruje sa cez uzavretú plochu v nekonečne. (a) Vypočítajte $h^{\mu\nu\kappa}$ pre slabé gravitačné pole do prvého rádu v $h_{\mu\nu}$, (b) určte h^{00i} pre *newtonovské* pole s potenciálom Φ,

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{ij} = 2\Phi\delta_{ij}, \quad h_{0i} = 0,$$

a (c) presvedčte sa, že $m_{inerc} = m$, kde m je aktívna gravitačná hmotnosť vystupujúca vo vyjadrení Φ ďaleko od telesa. RIEŠENIE: (a) $\frac{1}{2\kappa_E}\left[\eta^{\mu\nu}\left(h^{,\kappa} - h^{\kappa\lambda}{}_{,\lambda}\right) - h^{\mu\nu,\kappa} - \nu \leftrightarrow \kappa\right]$, (b) $\frac{2}{\kappa_E}\Phi_{,i}$, (c) viď $\Phi = -\frac{\kappa m}{r}$, kde r je vzdialenosť od ľubovoľne zvoleného bodu vnútri telesa.

3. Účinok gravitačných vĺn. Gravitačné vlny v plochom priestore sa opisujú čiste priestorovou poruchovou metrikou h_{ij}, ktorá je priečna a bezstopová,

$$h_{ij,j} = h_{ii} = 0.$$

(a) Vypočítajte *efektívne* (modulo divergencia) veličinu

$$\tilde{R} = R\sqrt{-g}$$

do členov druhého rádu v h_{ij}, a (b) presvedčte sa, že ak prejdeme k preškálovanému poľu $\phi_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa_E}}h_{ij}$, účinok gravitačného poľa

$$S = -\frac{1}{2\kappa_E}\int \tilde{R}d^4x$$

sa zredukuje na účinok bezhmotového tenzorového poľa. Toto pole je ekvivalentné dvojici bezhmotových skalárnych polí (prečo? ako tieto polia vyzerajú?). RIEŠENIE: (a) $-\frac{1}{4}h_{ij,\mu}h_{ij}{}^{,\mu}$, (b) každá zložka poľa ϕ_{ij} má účinok $\int \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}d^4x$, čo je účinok bezhmotového skalárneho poľa.

V. Dôsledky VTR

1. Precesia perihélia. Nájdite uhol, o ktorý sa posunie perihélium (bod na orbite najbližší k centrálnemu telesu) za periódu obehu v Schwarzschildovej metrike, ak častica obieha po približne kruhovej orbite ľubovoľne blízko k najtesnejšie viazanej stabilnej orbite. Využite, že častica koná v radiálnej súradnici malé kmity v potenciáli $V = -\frac{m}{r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{m}{r^3}\right)L^2$. Poznámka: výhodné je prejsť od r k m/r. RIEŠENIE: $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-6m/r}} - 1\right)$.

2. Machov princíp. Majme tenkú sférickú šupku s polomerom a a hmotnosťou m, ktorá rotuje s konštantnou uhlovou rýchlosťou $\mathbf{\Omega}$. Vypočítajte v linearizovanej VTR, čomu sa rovnajú vektory $\mathbf{g} = (h_{0x}, h_{0y}, h_{0z})$ a $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{g}$ v strede šupky. Poznámka: vektor $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť stojacej sústavy vzhľadom na lokálnu inerciálnu sústavu v danom mieste. Táto uhlová rýchlosť súvisí s uhlovou rýchlosťou strhávania lokálne inerciálnych sústav vzťahom $\boldsymbol{\omega}_{LIS} = -\boldsymbol{\omega}$. RIEŠENIE: $\mathbf{g} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{4m}{3a}\boldsymbol{\Omega}$.

3. Hviezda s lineárnou stavovou rovnicou. Ukážte, že relativistická hviezda so stavovou rovnicou $p = \alpha\rho$ má 1-parametrickú škálovaciu symetriu (symetriu vzhľadom na zámeny $r \to ar$, $\rho \to b\rho$, $m \to cm$, s konštantami a, b, c závisiacimi od jedného parametra), a využite tento výsledok na prechod k novým premenným x, y, v ktorých majú rovnice tvar $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, kde čiarka označuje deriváciu podľa $u = \ln r$. Vyšetrite správanie sa riešení v blízkosti pevných bodov. RIEŠENIE: (a) $x = m/r$, $y = 4\pi\rho r^2$, (b) počiatok je sedlový uzol, z ktorého riešenie vychádza, a pevný bod mimo počiatku je príťažlivý uzol.

4. Červený posun svetla pri prechode kolabujúcou hviezdou. Majme sféricky symetrickú prachovú guľu s hmotosťou m, ktorá má na začiatku kolapsu, keď prach stojí, polomer r_0, a uvažujme svetelný signál vyslaný pozorovateľom v nekonečne, ktorý prejde cez stred gule a unikne späť do nekonečna. Signál sa nerozptyľuje na zrnkách prachu, takže pri prechode cez guľu naň pôsobí iba gravitačné pole. Nájdite červený posun svetla, ak poznáme hodnoty radiálnej súradnice r_1 a r_2, pri ktorých signál vstúpi do gule a vystúpi z nej. RIEŠENIE: $\dfrac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\dfrac{f_2 g_1 g_2}{f_1}\,\dfrac{r_1}{r_2}}$, kde $f = 1 - \dfrac{2m}{r}$, $g = \dfrac{\sqrt{r_0/(2m) - 1} - \sqrt{r_0/r - 1}}{\sqrt{r_0/(2m) - 1} + \sqrt{r_0/r - 1}}$.

5. Skalárne pole v poli čiernej diery. Majme skalárne pole Φ, ktoré je voľné a bezhmotové, teda spĺňa rovnicu $\Box\Phi = 0$. Predpokladajme, že pole nachádza v Schwarzschildovej metrike, a zapíšme monochromatickú sféricky symetrickú vlnu ako

$$\Phi = \frac{1}{r} R(r_*) e^{-i\omega t},$$

kde r_* je „korytnačia" súradnica (radiálna súradnica, ktorá nikdy nedobehne horizont, podobne ako Achilles nikdy nedobehne korytnačku), definovaná ako $r_* = \displaystyle\int \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr$. Radiálna časť Φ spĺňa rovnicu

$$R'' + (\omega^2 - V)R = 0.$$

Nájdite potenciál V ako funkciu súradnice r (NIE r_*!). RIEŠENIE: $V = \left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)\dfrac{2m}{r^3}$.

6. Sendvičová gravitačná vlna. Majme metriku

$$g = -dudv + dy^2 + dz^2 + f(u, y, z)du^2,$$

kde u, v sú svetelné súradnice

$$u = x - t, \quad v = x + t.$$

Nájdite rovnicu pre funkciu $f(u, y, z)$ v linearizovanej VTR, ak metrika spĺňa Einsteinove rovnice vo vákuu, a zostrojte riešenia pre monochromatickú rovinnú vlnu s polarizáciami $+$ a $\times$. Poznámka: riešenie platí aj v presnej teórii. RIEŠENIE: $f_{,yy} + f_{,zz} = 0,\ \ f = \begin{cases} \frac{1}{2}(y^2 - z^2)\sin(\omega u) \\ yz\sin(\omega u) \end{cases}.$

7. Anizotropný Veľký tresk. Majme metriku

$$g = -dt^2 + \sum t^{2p_\alpha}(dx^\alpha)^2, \quad \begin{cases} \sum p_\alpha = 1 \\ \sum p_\alpha^2 = 1 \end{cases},$$

kde index α nadobúda hodnoty $1, 2, 3$. Táto metrika sa nazýva *Kasnerova.* Je to riešenie Einsteinových rovníc vo vákuu so singularitou pri $t = 0$, ktoré sa dá použiť na opis anizotropného rozpínania vesmíru tesne po veľkom tresku. Nech je priestor s Kasnerovou metrikou zaplnený homogénnym prachom, ktorý sa pohybuje v zadanom smere pod uhlom k osiam x^1, x^2, x^3 a má zanedbateľnú hmotnosť, takže neovplyvňuje tvar metriky. Nájdite závislosť hustoty prachu od času v blízkosti singularity. Poznámka: nájdená asymptotika platí aj pre prach s konečnou hmotnosťou, pretože v limite $t \to 0$ je pravá strana Einsteinových rovníc zanedbateľná oproti ľavej. RIEŠENIE: $\rho \propto t^{-1+p_M}$, kde p_M je najväčšia z konštánt p_i.

8. Svetelné signály v Curzonovej metrike. Majme metriku

$$g = -e^{-2/R}dt^2 + e^{2/R - r^2/R^4}(dr^2 + dz^2) + e^{2/R}r^2 d\phi^2,$$

kde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Táto metrika sa nazýva *Curzonova.* Je to riešenie Einsteinových rovníc vo vákuu so singularitou pri $R = 0$, ktoré sa dá pripojiť v minulosti aj v budúcnosti k dvom Minkowského polpriestorom. Curzonova metrika podobne ako Schwarzschildova závisí od jediného parametra – hmotnosti zdroja m, ktorú sme pre jednoduchosť položili rovnú 1. Časupodobné aj svetelné geodetiky končiace v singularite Curzonovej metriky sú „prilepené" k ekvatoriálnej rovine alebo k osi z. Nájdite asymptotický tvar svetelných geodetík s $\phi = konšt$, ktoré sú „prilepené” k osi z. RIEŠENIE: $r \propto e^{-1/|z|}$.

9. Vek uzavretého vesmíru. Ukážte, že konformný čas, ktorý uplynie v uzavretom vesmíre bez kozmologickej konštanty medzi začiatočnou a koncovou singularitou (Veľkým treskom a Veľkým drvením) sa rovná 2π, ak je vesmír zaplnený nekoherentným prachom, a π, ak je zaplnený žiarením. Konformný čas sa definuje ako $\eta = \int r^{-1} dt$. Čo plynie z týchto hodnôt, pokiaľ ide o to, či sa v uzavretom vesmíre môžeme pozrieť na vlastný zátylok? Návod: asi má nejaký dôvod, že sa η nazýva *konformný* čas.

10. Skalárne pole v rozpínajúcom sa vesmíre. Zapíšte rovnicu pre bezhmotové voľné skalárne pole v plochej Robertsonovej-Walkerovej metrike (metrike homogénneho a izotrópneho vesmíru). Rovnica má vo všeobecnej metrike tvar $\Box\phi = 0$. Ako vyzerajú premenné, v ktorých rovnica prejde na vlnovú rovnicu v plochom časopriestore s disperzným zákonom závisiacim od času? Ako vyzerá tento disperzný vzťah? RIEŠENIE: (a) $\ddot{\phi} + 3r^{-1}\dot{r}\dot{\phi} - r^{-2}\triangle\phi = 0$, kde bodka označuje deriváciu podľa t, (b) $\eta = \int r^{-1} dt$ (konformný čas), $\chi = r\phi$, (c) $\omega^2 = k^2 - r^{-2}r''$, kde čiarka označuje deriváciu podľa η.