

0. sada

0.1 (2.1) Tok fotónov. a) Žiarivosť typickej galaxie je $\sim 2 \cdot 10^{10} L_{\odot}$ a stredná hodnota fotónu z hviezd je $\sim 2eV$. Aký je tok fotónov (v $m^{-2}s^{-1}$) galaxie s červeným posunom z ($z \ll 1 \Rightarrow R \sim zd_H$, kde $d_H = cH_0^{-1}$ je Hubblova vzdialenosť)?

b) Porovnajete tok fotónov z najbližších veľkých galaxií ($R \sim 1Mpc$) s tokom fotónov z najbližších hviezd ($R \sim 1pc$). (Tento výpočet by mal objasniť, prečo hviezdy tvoria väčšinu objektov viditeľných voľným okom.) RIEŠENIE: a) $\phi = \frac{100}{z^2} m^{-2} s^{-1}$ b) $\phi_{gal} \sim 10^{-2} \phi_{hviezd}$

0.2 (2.2) Hustota fotónov. a) Hustota žiarivosti vesmíru je $1, 2 \cdot 10^8 L_{\odot} Mpc^{-3}$. Odhadnite počet fotónov ($E \sim 2eV$) vyžiarený hviezdami, za predpokladu, že vyžarovanie hviezd bolo od ich vzniku pred približne jedným Hubblovým časom ($t_H = H_0^{-1}$) relatívne konštantné. Porovnajete počet fotónov vyžiarených hviezdami s počtom fotónov reliktového žiarenia.

b) Energia hviezd je produkovaná prevažne fúziou vodíka na hélium $4p \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e$. Táto premena prebieha v hviezdnom jadre sériou reakcií, počas ktorých sa uvoľní celková energia $\sim 25MeV$. Po termalizácii je energia vyžiarená z povrchu hviezd. Odhadnite počet protónov (na Mpc^3), ktoré sa premenili na hélium počas posledného Hubblovho času. Porovnajete odhad s počtom protónov k dispozícii $n_b \sim \frac{\Omega_b \rho_c}{m_p}$ (kozmozologický parameter $\Omega_b = 0,04$ a kritická hustota $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi\kappa}$). RIEŠENIE: a) $\frac{n_{hviezd}}{n_{r\dot{z}}} \sim 5 \cdot 10^{-6}$ b) $\frac{n_{p \rightarrow He}}{n_b} \sim 5 \cdot 10^{-3}$

0.3 (2.3) Voľné dráhy fotónov. Odhadnite vplyv nasledujúcich procesov na strednú voľnú dráhu fotónov vo vesmíre:

a) Thomsonov rozptyl fotónov na voľných elektrónoch s hustotou $n_e \sim n_b$

b) Absorpcia fotónov hviezdami s hustotou $n_h \sim \frac{\Omega_b \rho_c}{M_{\odot}}$, $\Omega_b \sim 0,0023$ a účinným prierezom $\sim \pi R_{\odot}^2$.

c) Absorpcia fotónov prachom v galaxiách s $n_{gal} \sim 0,005 Mpc^{-3}$ a účinným prierezom $\sim \epsilon \pi R_{gal}^2$, kde $R_{gal} \sim 10kpc$ a podiel absorpcie viditeľného svetla prechádzajúceho galaxiou je $\epsilon \sim 0,1$.

Porovnajete tieto vzdialenosti s Hubblovou vzdialenosťou d_H (\sim vzdialenosť najvzdialenejších viditeľných objektov). Je vesmír „priehľadný“?

RIEŠENIE: a) $l_e \sim 5 \cdot 10^2 d_H$ b) $l_{hviezdy} \sim 10^{14} d_H$ c) $l_{gal} \sim 10^3 d_H$

0.4 *Rovnomerné rozpínanie v ŠTR.* Predpokladajte, že vesmír sa rozpína rovnomerne do prázdneho priestoru a červené posuny galaxií sú dané vzorcom platným v ŠTR. (V skutočnosti to tak nie je, ale aspoň zistíte, ako veľmi to tak nie je.) Najvzdialenejší známy objekt je kvazar s červeným posunom $z = 6,4$. Určte podľa teórie opísanej vyššie a) ako ďaleko je daný kvazar dnes, b) ako ďaleko bol v čase vyslania svetla a c) kedy toto svetlo vyslal. Návod: relativistický červený posun pri radiálnom pohybe zdroja je daný vzťahom $1 + z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, kde $\beta = \frac{v}{c}$. (Zopakujte si, odkiaľ sa tento vzorec vzal.)

RIEŠENIE: a) 13,2 mld. sv. r. ; b) 6,7 mld. sv. r. ; c) 7,0 mld. r.

0.5 *Kritická hustota.* Kritická hustota vesmíru sa definuje ako $\rho_{krit} = \frac{3H^2}{8\pi\kappa}$. Nájdite hodnotu $\rho_{krit,0}$ prepočítanú na atómy vodíka v kocke s hranou jeden meter. Návod pre tých, čo nevedia hodnotu κ v SI, ani sa ju nemienia naučiť (ako autor týchto úloh): $r_{g\odot} = \frac{2\kappa M_{\odot}}{c^2} = 3km$, $N_{nukl\odot} = \frac{M_{\odot}}{m_p} = 1,19 \cdot 10^{57}$, $1pc = 3,09 \cdot 10^{16}m$

RIEŠENIE: 5,6 atómov H m^{-3} .

I. Robertsonova-Walkerova metrika

I.1 *Vek vesmíru.* Nájdite súčiniteľ, ktorým musíme prenásobiť Hubblov čas $t_{H_0} = \frac{1}{H_0}$, aby sme dostali a) vek plochého prachového vesmíru ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$),

b) vek uzavretého prachového vesmíru so súčasnou hustotou rovnou dvojnásobku kritickej hustoty ($a = a_0(1 - \cos \eta)$, $ct = a_0(\eta - \sin \eta)$),

c) vek plochého vesmíru so súčasnou hustotou rozdelenou napoly medzi látku a kozmologickú konštantu ($a = a_0 \text{sh}^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} H_0 t \right]$).

RIEŠENIE: a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{\pi}{2} - 1$; c) 0,83.

I.2 *Rovnomerné rozpínanie vo VTR.* Presvedčte sa, že v rovnomerne sa rozpínajúcom vesmíre ($a \propto t$) majú galaxie po celý čas rovnakú rýchlosť a určte pre galaxiu s ľubovoľným červeným posunom, čomu sa rovná a) súčasná vzdialenosť, b) vzdialenosť v čase vyslania svetla a c) čas vyslania svetla. Nájdite hodnoty týchto veličín pre vesmír s rovnakou hodnotou H_0 , akú má náš, $H_0 = (13,7 \text{ mld. r.})^{-1}$ a kvazar so $z = 6,4$.

RIEŠENIE: a) $ct_0 \ln(1+z)$, 27,4 mld. sv. r. ; b) $ct_0 \frac{\ln(1+z)}{1+z}$, 3,7 mld. sv. r. ; c) $\frac{t_0}{1+z}$, 1,85 mld. r.
Správne hodnoty sú: a) 22,0 mld. sv. r. ; b) 3,0 mld. sv. r. ; c) 2,0 mld. r.

I.3 Horizonty. Horizont častíc je sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od Veľkého tresku po čas t , a horizont udalostí sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od času t po nekonečný čas. Nájdite
a) polomer horizontu častíc pre plochý vesmír zaplnený prachom ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$) a žiarením ($a \propto t^{\frac{1}{2}}$),
b) polomer horizontu udalostí pre plochý vesmír bez látky a s nenulovou kozmologickou konštantou ($a \propto e^{Ht}$).

RIEŠENIE: a) $3ct$ a $2ct$; b) cH^{-1} .

I.4 Plocha posledného rozptylu. Plocha posledného rozptylu je sféra, z ktorej k nám prichádza reliktové žiarenie. V skutočnosti je to guľová vrstva s konečnou hrúbkou, ktorú v približných výpočtoch zamieňame sférou. Žiarenie malo pri rekombinácii teplotu 900 až 1200 krát súčasná teplota, takže jeho červený posun je $1+z = 900 \div 1200$. Ako reprezentatívnu môžeme vziať hodnotu $1+z = 1100$. Nájdite pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$)

a) ako ďaleko je v súčasnosti zdroj svetla s daným $1+z$,
b) ako ďaleko je v súčasnosti plocha posledného rozptylu,
c) koľkokrát je táto plocha ďalej než najvzdialenejší známy kvazar so $z = 6,4$. Vzďialenosti v bodoch a) a b) vyjadrite v násobkoch polomeru pozorovateľného vesmíru. (Podľa výsledku z bodu a) predchádzajúceho príkladu sa tento polomer rovná trojnásobku veku vesmíru prepočítaného na svetelné roky.)

RIEŠENIE: a) $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) r_{p.v.}$; b) $0,97r_{p.v.}$; c) 1,53 .

I.5 Ešte plocha posledného rozptylu. Odhadnite, koľko horizontov by sa zmestilo na p.p.r. v čase rekombinácie, keby sme ich poukladali vedľa seba na rovník. (Keď sa povie „horizont“ bez bližšieho určenia, myslí sa „horizont častíc“.) Polomer p.p.r. zrátajte pre prachový vesmír a polomer horizontu pre vesmír zaplnený čistým žiarením.

RIEŠENIE: $\frac{3}{2}\pi (\sqrt{1+z} - 1) = 152$.

I.6 Nadsvetelné rýchlosti. Nájdite rýchlosť rozpínania vesmíru na horizonte
a) pre plochý vesmír zaplnený prachom ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$) a žiarením ($a \propto t^{\frac{1}{2}}$)

b) pre uzavretý vesmír zaplnený prachom vo fáze rozpínania ($a = \frac{a_M}{2} (1 - \cos \eta)$, $ct = \frac{a_M}{2} (\eta - \sin \eta)$, $0 < \eta < \pi$). V prípade b) určte, pri akej hodnote a klesne rýchlosť rozpínania pod c . Čo možno povedať o horizonte ako hranici pozorovateľného vesmíru v uzavretom vesmíre vo fáze stláčania?
 RIEŠENIE: a) $2c$ a c ; b) $c\eta \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta}$; $0,84a_M$; horizont neexistuje - pozorovateľný je celý vesmír.

I.7 Hubblov zákon na veľkých vzdialenostiach. Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$). Zistite, čomu sa v tomto prípade rovná q , a overte, či má nájdená funkcia správnu asymptotiku pri malých z .

RIEŠENIE: $2cH_0^{-1}(1+z) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$; $\frac{1}{2}$; $cH_0^{-1}z \left(1 + \frac{z}{4}\right)$ - súhlasí.

II. Ešte Robertsonova-Walkerova metrika

II.1 Vektor separácie geodetík. Dokážte z variačného princípu, že vektor separácie geodetík, vyslaných z daného bodu a parametrizovaných dĺžkou, je kolmý na referenčnú geodetiku. Návod (očividný): zapíšte variáciu dĺžky prvej geodetiky ako lineárnu časť rozdielu dĺžok prvej a druhej geodetiky, a položte ju rovnú nule.

II.2 Ešte vektor separácie geodetík. Ukážte, že vektor separácie geodetík, vyslaných z daného bodu a parametrizovaných dĺžkou, sa pozdĺž referenčnej geodetiky neotáča, ak je priestor izotropný vzhľadom na daný bod. Metrika izotropného priestoru je $g = d\lambda^2 + r^2(\lambda)g_s$, kde s je jednotková sféra.

II.3 Vonkajšia krivosť geodetických plôch. Ukážte, že vonkajšia krivosť geodetických plôch preložených stredom symetrie izotropného priestoru je nulová. Geodetická plocha preložená bodom P je 2D plocha, ktorá pozostáva z geodetík vedených dotyčnicovo k danej rovine tangenciálneho priestoru. Metrika izotropného priestoru je uvedená v predchádzajúcom príklade, vonkajšia krivosť sa definuje vzťahom $K(u, v) = (\nabla_u v)_\perp$.

II.4 Kozmologický červený posun. Odvoďte vzorec pre kozmologický červený posun z toho, že vlnový 4-vektor k je úmerný vektoru u dotyčnicovému k nulovej geodetike, t.j. splňa $\nabla_k k = 0$ a $k^2 = 0$. Návod: umiestnite pozorovateľa do počiatku a využite zákon zachovania. Odkiaľ plynie úmernosť medzi k a u ? Ako je to s červeným posunom de Broglieho vln látkových častíc

(elektrónov, jadier, atómov)?

II.5 Približný vzorec pre žiarivú vzdialenosť. Nájdite asymptotiku $r_L(z)$ do druhého rádu v z , ak je daná súčasná hodnota deceleračného parametra q_0 .

Návod: učebný text Kozmológia, kap. 3.

RIEŠENIE: $r_L \doteq cH_0^{-1}z \left[1 + (1 - q_0) \frac{z}{2}\right]$.

II.6 Žiarivá vzdialenosť v rovnomerne sa rozvíjajúcom vesmíre. Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre Milneho vesmír (otvorený vesmír s $a \propto t$) a presvedčte sa, že má správnu asymptotiku pri malých z .

RIEŠENIE: $r_L = cH_0^{-1}z \left(1 + \frac{z}{2}\right)$ - súhlasí (q je nulové).

II.7 Súvis medzi rýchlosťou a červeným posunom. Nájdite rýchlosti galaxie v_1 a v_0 v okamihu vyžiarenia a prijatia svetla v_0 ako funkcie červeného posunu galaxie z pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{\frac{2}{3}}$). Porovnajzte získané funkcie, rozvinuté do rádu z^2 , s funkciami, ktoré dostanete

a) zo vzorca pre Dopplerov jav nerelativistického zdroja v prípade, že sa zdroj pohybuje a pozorovateľ stojí ($z = \frac{v}{c}$)

b) zo vzorca pre relativistický Dopplerov jav ($z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$).

Pri výpočte v_0 v prípadoch a) a b) zohľadnite, že rýchlosť galaxie sa medzi vyslaním a prijatím signálu zmenšila. Tento jav opíšte spôsobom, ktorý zodpovedá výpočtu z , teda z predstavy, že galaxie sa rozbiehajú a svetlo sa šíri v globálnej inerciálnej sústave.

RIEŠENIE: $v_1 = 2c \left(\sqrt{1+z} - 1\right)$, $v_0 = 2c \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$; a) obe rýchlosti sú $1 + \frac{z}{4}$ krát väčšie; b) obe rýchlosti sú $1 + \frac{z}{4}$ krát menšie. (Dôvod, prečo sú dané pomery pre v_1 a v_0 rovnaké: podiel $\frac{v_1}{v_0}$ v globálnej inerciálnej sústave je $\left(1 + \frac{3z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, čo sa do rádu z zhoduje so vzorcom, ktorý vyjde z VTR.)

II.8 „Prevrstvenie“ plochého priestoru. Majme v Minkowského priestore vzťažnú sústavu v svetelnom kuželi budúcnosti s vrcholom v počiatku takú, že jej vzťažné body sa rozbiehajú radiálne z počiatku s konštatnými rýchlosťami a súradnicové hodiny sú totožné s ideálnymi (ukazujú vlastný čas vzťažných bodov). Ukážte, že v tejto sústave sa Minkowského metrika zhoduje s metrikou otvoreného vesmíru s $a = t$. Taký vesmír sa nazýva *Milneho*. (To je upresnenie

definície z príkladu 6, kde sa uvádza $a \propto t$.) Ako sa dá nahliadnuť, že musí ísť o Minkowského metriku, z rovnice pre škálovací parameter?

Návod: za priestorové súradnice v rozbiehajúcej sa vzťažnej sústave zvolte súradnice (χ, θ, ϕ) , kde (θ, ϕ) sú sférické uhly a χ súvisí s rýchlosťou vzťažného bodu v vzťahom $\text{th } \chi = \frac{v}{c}$.

II.9 Hubblov zákon v ŠTR. Majme v Minkowského priestore galaxie rozbiehajúce sa z pevného bodu tak, že v každom okamihu platí „teoretický“ Hubblov zákon $v = Hr$. Úlohy: (a) zistite, ako vyzerá „pozorovateľný“ Hubblov zákon (závislosť $r_L(z)$) pre galaxie s konštantnými rýchlosťami. Podľa príkladu 8 musí vyjsť rovnaký výsledok ako v príklade 6, tam sa však odvodzuje v rámci všeobecnej teórie relativity. (b) Nájdite *približný* „pozorovateľný“ Hubblov zákon (závislosť $r_L(z)$ do rádu z^2) pre galaxie s premennými rýchlosťami.

Návod: červený posun je $z = \sqrt{\frac{1+v_1/c}{1-v_1/c}} - 1$ a intenzita svetla je $I = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi \hat{r}_0^2}$, kde \hat{r}_0 je kontrahovaná súčasná vzdialenosť galaxie, $\hat{r}_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$.

RIEŠENIE: (a) vid' text úlohy, (b) $r_L \doteq \frac{c}{H_0} z \left[1 + \left(\frac{1}{2} - q_0 \right) z \right]$ (chýba $\frac{1}{2}$ pri $q_0!$).

III. Friedmannove modely

III.1 Rozpínanie vesmíru v jednoduchých prípadoch. Overte vzorce pre rozpínanie plochého vesmíru zaplneného prachom a žiarením a uzavretého vesmíru zaplneného prachom, uvedené v príklade I.1. Pri uzavretom vesmíre overte najprv všeobecný vzorec z príkladu I.6 a potom jeho špeciálny tvar z príkladu I.1, a to tak, že vyjadríte maximálny polomer vesmíru a_M cez parameter Ω a dosadíte $\Omega = 2$.

RIEŠENIE: $(\Omega - 1)^{-1} \Omega a_0$; $2a_0$ pre $\Omega = 2$ - súhlasí.

III.2 Polomer vesmíru. Vyjadríte a_0 cez H_0 a Ω pre zakrivený (uzavretý alebo otvorený) vesmír. Zistite, koľkokrát by bol polomer pozorovateľnej časti vesmíru $r_{p.v.}$ menší než súčasný polomer vesmíru a_0 (polomer 3-sféry reprezentujúcej priestor, v ktorom žijeme), keby mal parameter Ω najväčšiu hodnotu, aká je ešte v súlade s pozorovaniami, $\Omega = 1,04$. Za $r_{p.v.}$ vezmite vzdialenosť kvazara so $z = 6,4$, uvedenú v príklade I.2.

RIEŠENIE: $a_0 = cH_0^{-1} |\Omega - 1|^{-\frac{1}{2}}$; 3,1 krát.

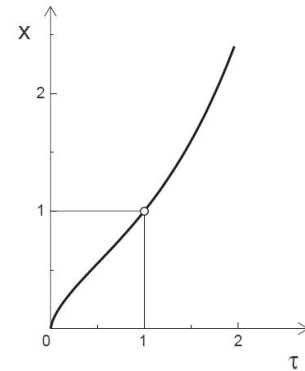
III.3 Ešte Hubblov zákon na veľkých vzdialenostiach. Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre ľubovoľný homogénny a izotropný vesmír vyhovujúci Einsteinovým rovniciam.

Návod: využite rovnicu pre $x = \frac{a}{a_0}$ ako funkciu $\tau = H_0 t$, $x'^2 = \Omega_l x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + 1 - \Omega$. (Overte!)

RIEŠENIE: $cH_0^{-1}(1+z) \times \begin{cases} |1 - \Omega|^{-\frac{1}{2}} \Sigma \left(|1 - \Omega|^{\frac{1}{2}} F \right) & \text{pre } \Omega \neq 1 \\ F & \text{pre } \Omega = 1 \end{cases}$, kde $F = \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{f}}$ a

f je výraz na pravej strane rovnice pre x'^2 .

III.4 Rozpínanie nášho vesmíru. Podľa súčasných pozorovaní je náš vesmír s veľkou presnosťou plochý, s $\Omega_l = 0,26$ a $\Omega_\Lambda = 0,74$. Nájdite funkciu $x(\tau)$ pre prachový vesmír s ľubovoľnými Ω_l a Ω_Λ spĺňajúcimi $\Omega_l + \Omega_\Lambda = 1$ a presvedčte sa, že v špeciálnom prípade, ktorý sa uvažuje v príklade I.1, je závislosť $a(t)$ taká, aká je uvedená v zadaní. Určte, koľkokrát väčší je vek vesmíru než Hubblov čas, ak majú parametre Ω_l a Ω_Λ pozorované hodnoty.



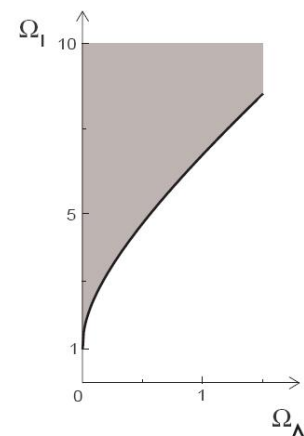
RIEŠENIE: $x = \left(\frac{\Omega_l}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \text{sh}^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau\right]$; 1,003 - vek vesmíru sa prakticky zhoduje s Hubblovým časom (efekty spomaľovania vesmíru v ére s prevládajúcou látkou a zrýchľovania vesmíru v ére s prevládajúcou kozmologickou konštantou sa kompenzujú).

III.5 Asymptotiky rozpínania. Určte približný tvar riešenia z predchádzajúceho príkladu pri malých a veľkých časoch a zistite, akým súčiniteľom sa líši približné a_0 od presného, ak majú Ω_l a Ω_Λ pozorované hodnoty.

RIEŠENIE: $x_{asym} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Omega_l^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{2}{3}}$ a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\Omega_l}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau}$; 0,84 a 1,05.

III.6 Vesmír s návratom. Zistite, v akej oblasti parametrov Ω_l a Ω_Λ sa vesmír po čase zastaví a začne sa stláčať. Návod: aby vesmír prešiel od rozpínania k stláčaniu, musí mať funkcia $f(x)$ z príkladu III.3 minimum pod osou x (prečo?).

RIEŠENIE: $(\Omega - 1)^3 > \frac{27}{4}\Omega_\Lambda\Omega_l^2$



III.7 Vesmír s odrazom. Určte, pri akých hodnotách bezrozmerného škálovacieho parametra $x_{od} = \frac{a_{od}}{a_0}$ sa vesmír môže „odraziť“ (prejsť od stláčania k rozpínaniu), ak poznáme Ω_l a predpo-

kladáme, že Ω_Λ je nadkritické (také, že odraz môže nastať). Vypočítajte minimálne x_{od} v prípade, keby vesmír obsahoval iba svietiacu látku, teda keby platilo $\Omega_l = 0,004$. Presvedčte sa, že také Ω_l je najpriaznivejšie v tom zmysle, že pri väčšom Ω_l sa zúži interval možných hodnôt x_{od} .

RIEŠENIE: $x_{od}^3 (1 - \Omega_l) + \frac{3}{2}\Omega_l x_{od}^2 - \frac{1}{2}\Omega_l > 0$; 0,124

III.8 (5.12) Olbersov paradox. V 18. storočí si Olbers a Chéseaux všimli, že ak je vesmír homogénny v priestore i čase, celkové žiarenie z hviezd by malo byť nekonečné. Aby sme rekonštruovali ich zdôvodnenie, predpokladajme statický vesmír s fixovanými objektmi hustoty n_0 , každý so žiarivosťou L konštantnou v čase.

a) Predpokladajte objekty v priestorovom uhle $d\Omega$. Aký je celkový tok fotónov z týchto objektov v počiatku? Toto je „Olbersov paradox“.

b) Vysvetlite, prečo by absorpcia žiarenia ďalšími žiariacimi objektmi a hmotou medzi nimi nevyriešila paradox.

c) Predpokladajte, že vesmír existuje iba čas t_0 . Aký je celkový tok? Toto vyrieši paradox ad hoc spôsobom.

Teraz uvažujme štandardný (20. storočie) kozmologický model. Pre zjednodušenie predpokladajte, že počet galaxií je konštantný v čase: $n(t) = n_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$. Ešte predpokladajte, že ich žiarivosť L je nezávislá od času.

d) Koľko galaxií sa nachádza v priestorovom uhle $d\Omega$ s radiálnou súradnicou medzi χ_1 a $\chi_1 + d\chi_1$? Aký je tok z týchto objektov?

e) Aký je celkový tok z objektov v priestorovom uhle $d\Omega$? Vyjadrite tok ako integrál cez čas emisie t_1 . Vyjadrite tok ako integrál cez škálovací faktor $a(t_1)$. Vyčíslite integrál v prípadoch $\Omega_l = \Omega = 1$ a $\Omega_l = \Omega = 0$. Porovnajte výsledný celkový tok s tokom v časti c).

f) V inflačnom modeli iba s fotónmi, môžeme uvažovať, že fotóny reliktového žiarenia vznikli na konci inflácie premenou vákuovej energie na žiarenie. Aby sme vypočítali tok týchto fotónov môžeme nahradiť faktor $n(t)L$ s $\rho_\Lambda c^2 \delta(t - t_{inf})$. Vypočítajte výsledný tok a okomentujte výsledok.

g) Vypočítajte tok fotónov, ktorý budeme prijímať v ďalekej budúcnosti. Porovnajte výsledok pre teraz preferovaný model ($\Omega_l = 0,3$ a $\Omega_\Lambda = 0,7$) s výsledkami pre $\Omega_l = \Omega = 1$ a $\Omega_l = \Omega = 0$.

RIEŠENIE: c) $\frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{ct_0 n_0 L}{4\pi}$; d) $dN_1 = n_0 a_0^3 \Sigma^2(\chi_1) d\chi_1 d\Omega$; e) $\frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{n_0 L}{4\pi} \int_0^{t_0} \frac{a(t)}{a_0} c dt =$

$$\frac{cn_0L}{4\pi a_0} \int_0^{a_0} \frac{da}{\frac{a}{a_0}} ; \frac{3}{5} ; \frac{1}{2} ; \text{f) } \frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \rho_\Lambda c^3 \left(\frac{a_{inf}}{a_0} \right)^4 ; \text{g) numerický výpočet: } 1,332 \text{ a } 1,065$$

IV. Horúci vesmír

IV.1 Rozpínanie v blízkosti rovnosti hustôt. Nájdite súvis medzi $x = a/a_0$ a $\tau = H_0 t$ v prvom období po Veľkom tresku, keď sa dá zanedbať vplyv krivosti aj kozmologickej konštanty na dynamiku vesmíru, ale zato treba vziať do úvahy vplyv žiarenia. Predpokladajte, že vesmír neobsahuje páry, takže žiarenie sa skladá iba z fotónov a neutrín. Návod: $x'^2 = \Omega_l x^{-1} + \Omega_z x^{-2}$. Určte, aké veľké je τ v okamihu rovnosti hustôt ($x = \frac{\Omega_z}{\Omega_l} \equiv \alpha$) a v okamihu rekombinácie ($x = \frac{1}{1100}$), ak majú oba parametre Ω pozorované hodnoty, $\Omega_l = 0,26$ a $\Omega_z = \frac{\Omega_l}{3250}$. Prepočítajte oba časy na roky, ak viete, že Hubblov čas (a zároveň vek vesmíru, viď príklad III.4) je približne 13,7 mld. r.

RIEŠENIE: $(x - 2\alpha) \sqrt{x + \alpha} + 2\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_l} \tau$; 4, $1 \cdot 10^{-6}$ a $2,75 \cdot 10^{-5}$; 57000r. a 377000 r.

IV.2 Asymptotiky ďaleko od rovnosti hustôt. Určte približný tvar riešenia z predchádzajúceho príkladu pri malých a veľkých časoch a zistite, akým súčiniteľom sa líši približné a v okamihu rekombinácie od presného, ak majú Ω_l a Ω_z pozorované hodnoty.

RIEŠENIE: $x_{asym} = 2^{\frac{1}{2}} \Omega_z^{\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{2}}$ a $\left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_l} \tau \right)^{\frac{2}{3}} + \alpha$; 0,77 a 1,17.

IV.3 Opravená horizontová dĺžka. Určte, čomu sa rovná horizontová dĺžka (polomer horizontu častíc) v jednotkách cH_0^{-1} pri rozpínaní, o ktorom sa píše v príklade IV.1, a zistite, koľkokrát je táto dĺžka v okamihu oddelenia žiarenia väčšia než horizontová dĺžka vo vesmíre zaplnenom čistým žiarením. Pri výpočte využite pomer x_{asym}/x z predchádzajúceho príkladu.

RIEŠENIE: $\frac{2}{\sqrt{\Omega_l}} x (\sqrt{x + \alpha} - \sqrt{\alpha})$; 1,12.

Opravený polomer plochy posledného rozptylu, zrátaný numericky pri pozorovaných hodnotách parametrov Ω_l , Ω_z a Ω_Λ , je 1,16 krát väčší než približný, takže počet horizontov, ktoré sa dajú vtisnúť na p. p. r., je o niečo väčší, než vyšiel v príklade I.5 - nerovná sa 152 ale 156.

IV.4 Vlnová dĺžka reliktového žiarenia. Nájdite typickú vlnovú dĺžku reliktového žiarenia, ak viete, že teplota reliktového žiarenia je 2,73K. Návod: $\hbar c = 200 \text{ eV nm}$, $k_B = 0,86 \cdot 10^{-4} \text{ eV K}^{-1}$.

Koľkokrát väčšia je vlnová dĺžka λ_m , na ktorú pripadá maximum intenzity žiarenia? Akú má táto vlnová dĺžka hodnotu? Návod: $I_\lambda \propto \lambda^{-5} (e^{2\pi\lambda_*/\lambda} - 1)^{-1}$, kde λ_* je odhadnutá typická vlnová dĺžka (odvodte zo vzorca pre I_ω !).

RIEŠENIE: $0,85mm$; $1,27$ ($= 2\pi/x$, kde x je riešenie transcendentnej rovnice $xe^x = 5(e^x - 1)$); $1,08mm$.

IV.5 Energia a počet fotónov reliktového žiarenia. Odhadnite strednú energiu fotónu reliktového žiarenia a počet fotónov reliktového žiarenia v kocke s hranou jeden meter, zistite príslušné opravné koeficienty a zrátajte presné hodnoty oboch veličín. Návod k odhadu počtu fotónov: v žiarení čierneho telesa pripadá na jeden fotón zhruba kocka s hranou rovnou strednej vlnovej dĺžke (prečo?). Návod k výpočtu opravných koeficientov: integrály $I_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n! \sum_{k=1}^\infty k^{-n-1}$ sa rovnajú $\frac{\pi^2}{6}$, $2,404$, $\frac{\pi^4}{15}$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$

RIEŠENIE: $2,3 \cdot 10^{-4} eV$; $2,70$ ($= I_3/I_2$) ; $6,3 \cdot 10^{-4} eV$; $1,6 \cdot 10^9 m^{-3}$; $0,244$ ($= I_2/\pi^2$) ; $3,9 \cdot 10^8 m^{-3}$.

IV.6 Entropia reliktového žiarenia. Vyjadrite entropiu žiarenia čierneho telesa S cez energiu žiarenia E a teplotu žiarenia T . Návod: (1) $dE = -pdV + TdS$, (2) $p = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$, (3) $E = \epsilon(T)V$. V predchádzajúcom príklade sa dokazuje, že v žiarení čierneho telesa s teplotou T majú fotóny strednú energiu $E_1 = 2,7k_B T$. Určte, koľkokrát je bezrozmerná entropia $\bar{S} = \frac{S}{k_B}$ väčšia než počet fotónov N a nájdite hodnotu bezrozmernej entropie v kocke s hranou 1 m, ak viete, že v kocke je $3,9 \cdot 10^8$ fotónov.

RIEŠENIE: $S = \frac{4}{3} \frac{E}{T}$; $3,6$; $1,4 \cdot 10^9$.

IV.7 Príspevok neutrín k žiareniu. Začínajúc poslednou anihiláciou, žiarenie vo vesmíre pozostávalo z fotónov s klesajúcou teplotou T a z troch druhov neutrín s takisto klesajúcou teplotou $T_\nu = (\frac{4}{11})^{\frac{1}{3}} T$. Určte počet kvánt žiarenia na fotón a pomer energie žiarenia k energii fotónov.

Návod: integrály $I_n^\pm = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x \pm 1} dx$ súvisia vzťahom $I_n^+ = (1 - 2^{-n}) I_n^-$ (overte!).

Poznámka 1: vzorec pre T_ν v skutočnosti platí iba pre elektrónové neutrína. Teplota druhých dvoch druhov neutrín je o niečo nižšia, lenže to nemá prakticky žiadny vplyv na výsledky.

Poznámka 2: z experimentálnych dolných ohraničení na rozdiely štvorcov neutrínových hmotností plynie, že prinajmenšom dva z troch druhov neutrín sú v súčasnosti nerelativistické, takže

neprispiievajú k žiareniu, ale k látke. Na druhej strane, všetky tri druhy neutrín mohli byť, a pravdepodobne boli, súčasťou žiarenia v ére, keď žiarenie určovalo dynamiku vesmíru.

RIEŠENIE: $1 + 3\frac{3}{4} \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^3 = 1,81$; $1 + 3\frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 = 1,68$.

V. Procesy v ranom vesmíre

V.1 *Hustota počtu častíc, hustota hmotnosti, tlak.* Hustota počtu častíc, hustota hmotnosti a tlak ideálneho plynu sú definované vzťahmi

$$n = \frac{1}{V} \sum n_i, \quad \rho = \frac{1}{V} \sum \epsilon_i n_i, \quad p = \frac{1}{V} \sum \frac{p_i^2}{3\epsilon_i} n_i,$$

kde

$$n_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/T} \pm 1}, \quad \epsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m^2}, \quad \sum \rightarrow \int \frac{gV d^3p}{(2\pi)^3}.$$

(Tu aj ďalej kladieme $\hbar = c = k_B = 1$.) Úlohy: a) odvoďte vzťah pre p , b) nájdite n , ρ , p v limite $T \gg m$ aj $|\mu_{\pm}|$ (ultrarelativistický plyn s malým časticovým prebytkom – vypočítajte celkové hodnoty, t. j. súčet hodnôt pre častice a antičastice), c) nájdite n , ρ , p v limite T aj $|\mu'| = |\mu - m| \ll m$, a zároveň $|\mu'| \gg T$ (nerelativistický nedegenerovaný plyn).

Návod: a) uvažujte časticu oscilujúcu medzi stenami kocky ; b) a c) využite hodnoty I_n z príkladu IV.5 a súvis medzi I_n^+ a I_n^- z príkladu IV.7.

RIEŠENIE: a) viď návod ; b) $\frac{2,4}{\pi^2} g T^3 \left(\times \frac{3}{4}\right)$; $\frac{\pi^2}{15} g T^4 \left(\times \frac{7}{8}\right)$; $\frac{1}{3} \rho$; c) $g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{\mu'/T}$; $n \left(m + \frac{3}{2}T\right)$; nT .

V.2 *Coulombovská energia v čistom plyne párov.* Majme čistý plyn elektrónovo-pozitrónových párov s teplotou T . (Pod „čistým“ sa myslí, že má presne rovnaký počet elektrónov ako pozitronov, čiže $\mu = 0$). Označme strednú relativistickú energiu častíc (súčet pokojovej a strednej kinetickej energie) ϵ , strednú kinetickú energiu častíc ϵ' a strednú coulombovskú energiu susedných častíc v absolútnej hodnote ϵ_C . Odhadnite a) pomer ϵ_C/ϵ pri $T \gg m$, b) pomer ϵ_C/ϵ' pri $T \ll m$. Návod: $\epsilon_C \sim e^2 n^{1/3}$, kde n je hustota počtu častíc v plyne. (Tu kladieme aj $\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} = 1$, takže $e^2 = \alpha = 1/137$.) Oba pomery sú malé, preto je plyn pri ľubovoľnej teplote približne ideálny.

RIEŠENIE: a) e^2 so súčiniteľom $\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} \frac{15}{\pi^4} 2,4^{4/3} = 0,39$; b) $e^2 \left(\frac{m}{T}\right)^{1/2} e^{-m/(3T)}$.

V.3 Plyn párov s malým časticovým prebytkom. Majme elektrónovo-pozitrónový plyn s teplotou T a chemickým potenciálom elektrónov $\mu > 0$.

Úlohy: a) vyjadrite hustotu elektrónového prebytku Δn cez T a μ v limite $T \gg m$ aj μ ,

b) (s využitím výsledku príkladu a)) zapíšte μ cez T pre elektrónovo-pozitrónový plyn zaplňajúci vesmír prvých 10s po Veľkom tresku, ak poznáte súčasný pomer počtu elektrónov a fotónov reliktového žiarenia η_e . Ako bude vyzerat' tá istá úloha s baryónmi?

RIEŠENIE: a) $\frac{1}{6}\mu T^2$; b) $\frac{14,4}{\pi^2}\eta_e^{-1}T$.

V.4 (6.4) „Vymrznutie“ reakcie. Uvažujte reakciu $i + j \rightarrow k + l$ s frekvenciou zrážok $\Gamma_{ij \rightarrow kl} = n_j \langle \sigma v \rangle$, kde $\langle \sigma v \rangle$ je stredná hodnota účinného prierezu pre násobeného rýchlosťou. Uvažujte čas t_1 po „vymrznutí“ reakcie, keď je frekvencia zrážok podstatne menšia ako Hubblov parameter (určujúci veľkosť rozpínania vesmíru) $\Gamma_{ij \rightarrow kl}(t_1) \ll H(t_1)$. Predpokladajte, že po čase t_1 sa počet častíc j zachováva: $n_j \propto a^{-3}$, a že účinný prierez má jednoduchý tvar: $\langle \sigma v \rangle \propto T^\beta \propto a^{-\beta}$ ($\beta = 0$ pre elektrón-pozitrónovú anihiláciu a Thomsonov rozptyl). Integrujte frekvenciu zrážok, aby ste ukázali, že reakcia je „zmrazená“: $\int_{t_1}^{\infty} \Gamma dt = \int_{a_1}^{\infty} \Gamma \frac{da}{\dot{a}} \ll 1$, teda že v prípade väčšiny častíc i už nedôjde k reakcii.

V.5 (6.7) Anihilácia pozitronov. Odhadnite, pri akej teplote došlo k „zmrazeniu“ anihilácie pozitronov vo vesmíre s $\frac{n_e}{n_\gamma} \sim 4 \cdot 10^{-10}$. Odhadnite zvyškovú hustotu pozitronov. Využite $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma} \cdot v = \frac{\pi\alpha^2\hbar^2}{m_e^2c}$ (pre $v \ll c$)

V.6 (6.10) Nukleosyntéza. Účinný prierez krát rýchlosť pre reakciu $np \rightarrow {}^2H\gamma$ je $\sigma_{np \rightarrow {}^2H\gamma} \cdot v = 7,4 \cdot 10^{-20} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ (pre $v \ll c$). Ukážte, že relaxačný čas tejto reakcie je väčší ako charakteristický čas rozpínania vesmíru pri teplote $T \sim 60 \text{keV}$, ak $\eta < 4 \cdot 10^{-12}$. Z toho vyplýva, že nukleosyntéza neprebíha, ak je η menej ako táto hodnota.

V.7 (6.5) Sahova rovnica. Viď príklad 6.5 z knihy Fundamentals of Cosmology.

V.8 Relaxačný čas fotónov. Ukážte, že žiarenie bolo v rovnováhe so zvyškom vesmírneho prostredia až do okamihu rekombinácie.

Návod: porovnajte relaxačný čas $\tau = 1/n\sigma v$ s charakteristickým časom rozpínania vesmíru (časom ktorý uplynul od Veľkého tresku): kým bol menší, žiarenie bolo v tepelnej rovnováhe.

a) V ére párov prebiehal rozptyl fotónov na nabitých časticiach a vzájomné premeny párov a fotónov. Stredná energia fotónov aj ostatných častíc ϵ podstatne prevyšovala pokojovú energiu častíc, $\epsilon \gg m_0c^2$. Účinný prierez fotónových interakcií pri takých energiách je $\sigma \sim \alpha^2\lambda^2$, kde α je konštanta jemnej štruktúry a λ je vlnová dĺžka častíc vstupujúcich do interakcie, $\lambda = 2\pi\hbar c/\epsilon$.

b) Po anihilácii e^-e^+ sa elektróny spomalili na nerelativistické rýchlosti a energia fotónov klesla pod pokojovú energiu elektrónov, jediným druhom interakcie po celé nasledujúce obdobie bol *Thomsonov rozptyl*, čiže rozptyl fotónov na stojacich elektrónoch bez zmeny vlnovej dĺžky. Účinný prierez Thomsonovho rozptylu je $\sigma_{Th} \approx \alpha^2\lambda_C^2$, kde $\lambda_C = \hbar/(m_0c)$ je *Comptonova vlnová dĺžka*.

V.9 Relaxačný čas neutrín. Ukážte, že každý druh neutrín sa oddelil od zvyšku prostredia v okamihu, keď z prostredia začali ubúdať "jeho"nabité leptóny.

Návod: v ére párov prebiehal rozptyl neutrín na slabo interagujúcich časticiach a vzájomné premeny párov a fotónov. Účinný prierez je $\sigma \sim \frac{\alpha'^2\lambda_W^4}{\lambda^2}$ (prečo?), kde α' je bezrozmerná konštanta charakterizujúca slabé interakcie, ktorá je rovnakého rádu ako α , a λ_W je Comptonova vlnová dĺžka W -bozónov.

¹Príklady V.4 až V.7 sú z knihy Fundamentals of Cosmology, J. Rich