1. Grupa $O(2)$ obsahuje tieto transformácie roviny: otočenia okolo počiatku a zrkadlenia cez priamky prechádzajúce počiatkom.

   (a) Zistite, ktoré prvky $O(2)$ sú navzájom konjugované

   (b) Nájdite na $O(2)$ invariantnú mieru (pomôcka: $O(2)$ sa skladá z dvoch kružníc, skúste integrovať podľa $d\phi$ po oboch kružniciach a vynásobiť vhodnými konštantami)

   (c) Nájdite ireducibilné charaktery $O(2)$ pomocou ich ortonormality $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$

   (d) Zistite, ako sa rozkladajú tenzorové súčiny ireducibilných reprezentácií

2. Nech H, E a F označujú bázu $\mathfrak{sl}(2)$, $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$. Nech V je reprezentácia (možno aj nekonečnerozmerná) $\mathfrak{sl}(2)$, generovaná vektorom v s najvyššou váhou, t.j. $Hv = \lambda v$, $Ev = 0$ a každý vektor je lineárnou kombináciou vektorov $F^k v$.

   (a) Ukážte, že $EF^k v = e_k F^{k-1} v$ pre vhodné $e_k \in \mathbb{C}$ a spočítajte e_k napr. tak, že najprv nájdete $e_{k+1} - e_k$ zo vzťahu $[E, F] = H$.

   (b) Kedy môže byť $e_k = 0$? Pomocou toho ukážte, že ak $\lambda \notin \mathbb{N}$, tak všetky $F^k v$ musia byť nenulové a lineárne nezávislé (majú rôzne váhy voči H), naopak, ak $\lambda \in \mathbb{N}$, môžeme dosiahnuť, aby bol priestor V konečnerozmerný.