

1. Centrum Z_G grupy G je jej podgrupa, ktorá sa skladá z tých jej prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G .
 - (a) nájdite centrum grupy S_3 , grupy symetrií štvorca (otočení aj preklopení), ľubovoľnej komutatívnej grupy
 - (b) dokážte: ak je (V, ρ) ireducibilná reprezentácia G , tak pre každé $h \in Z_G$ je $\rho(h)$ násobenie konštantou
 - (c) ak je G komutatívna, tak má len jednorozmerné ireducibilné reprezentácie

2. O reprezentácii (V, ρ) grupy G sa hovorí že je *bez násobnosti* (multiplicity-free) ak sa v rozklade V na ireducibilné reprezentácie nevyskytuje žiadna viac ako raz.
 - (a) Dokážte, že (V, ρ) je bez násobnosti práve vtedy, keď je algebra $\text{Hom}_G(V, V)$ komutatívna (t.j. keď každé dve splietajúce zobrazenia $V \rightarrow V$ komutujú)
 - (b) ** Pomocou (a) teraz dokážte, že ak $H \subset G$ je podgrupa, a ak navyiac “ G je komutatívna modulo H ”, t.j. ak pre každé $g_1, g_2 \in G$ existujú také $h_{1,2,3} \in H$, že $g_1 g_2 = h_1 g_2 h_2 g_1 h_3$, potom funkcie na G/H tvoria reprezentáciu G , ktorá je bez násobnosti

3. Nech G je grupa symetrií kocky (len otočení) a nech V a S sú jej dve reprezentácie: V sú funkcie na množine vrcholov a S na množine stien.
 - (a) spočítajte dimenzie priestorov $\text{Hom}_G(V, V)$, $\text{Hom}_G(S, V)$ a $\text{Hom}_G(S, S)$
 - (b) zistite, koľko rôznych ireducibilných reprezentácií sa nachádza v rozklade V a aké majú násobnosti (pomôcka: V obsahuje triviálnu reprezentáciu), koľko v S , a koľko je zároveň vo V aj v S
 - (c) spomeňte si z prednášky (alebo dokážte) že S sa rozkladá na tieto tri rôzne ireducibilné reprezentácie:
 - i. triviálna (konštantné funkcie)
 - ii. nepárne funkcie
 - iii. párne funkcie so súčtom nula

Ktoré z nich sú aj v rozklade V ? Pomôcka: uvažujme toto splietajúce zobrazenie $F : S \rightarrow V$: ak máme prvok $s \in S$, t.j. ak na každej stene máme napísané číslo, tak na každý vrchol napíšeme súčet čísel napísaných na troch susediacich stenách; takto dostaneme prvok $F(s) \in V$. Zistite, ako F pôsobí na i, ii a iii.