

Tieto matematické príklady by podľa V.I. Arnol'da mal vedieť vyriešiť každý študent fyziky (o zamestnancoch našťastie nič nehovoril). Príkladov je spolu sto, časom by tu mali byť všetky.

1. Nakreslite graf derivácie a graf integrálu funkcie zadanej voľne načrtnutým grafom.

2. Nájdite limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \tan x - \tan \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x}.$$

3. Nájdite kritické hodnoty a kritické body zobrazenia $z \mapsto z^2 + 2\bar{z}$ (výsledok nakreslite).

4. Vypočítajte stú deriváciu funkcie

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

5. Vypočítajte stú deriváciu

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

v nule s presnosťou 10%.

6. Nakreslite v rovine (x, y) parametricky zadanú krivku $x = 2t - 4t^2$, $y = t^2 - 3t^4$.

7. Koľko normál vedie k elipse z daného bodu roviny? Vyšetrite oblasť v ktorej je počet normál maximálny.

8. Koľko maxím, miním a sediel má funkcia $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$ na ploche $x + \dots + v = 0$, $x^2 + \dots + v^2 = 0$, $x^3 + \dots + v^3 = C$?

9. Má každý kladný polynóm dvoch premenných globálne minimum?

10. Vyšetrite asymptotiky riešení y rovnice $x^5 + x^2y^2 = y^6$, ktoré idú k 0 pre $x \rightarrow 0$.

11. Konverguje integrál

$$\iint \frac{dx dy}{1 + x^4 y^4}?$$

12. Nájdite tok vektorového poľa \vec{r}/r^3 cez plochu $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$.

13. Vypočítajte s presnosťou 5%

$$\int_1^{10} x^x dx.$$

14. Vypočítajte s presnosťou 10%

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

15. Vypočítajte s presnosťou 10%

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4 - x)) dx.$$

16. Akú časť objemu 5-rozmernej kocky tvorí objem vpísanej gule? A 10-rozmernej?

17. Nájdite vzdialenosť ťažiska 100-rozmernej polgule od stredu gule s presnosťou 10%.

18. Spočítajte

$$\int \exp\left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j\right) dx_1 \dots dx_n.$$

19. Vyšetrite chod lúčov v prostredí s indexom lomu $n(y) = y^4 - y^2 + 1$ pomocou Snellovho zákona $n(y) \sin \alpha = \text{konšt.}$, kde α je uhol medzi lúčom a osou y .
20. Nájdite deriváciu riešenia rovnice $x'' = x + A(x')^2$ s počiatočnými podmienkami $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, podľa A pri $A = 0$.
21. Nájdite deriváciu riešenia rovnice $x'' = (x')^2 + x^3$ s počiatočnými podmienkami $x(0) = 1$, $x'(0) = A$, podľa A pri $A = 0$.
22. Vyšetrite hranicu oblasti stability ($\text{Re}\lambda_j < 0$) v priestore koeficientov rovnice $x''' + ax'' + bx' + c = 0$.
23. Riešte kvázihomogénnu rovnicu

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

24. Riešte kvázihomogénnu rovnicu $x'' = x^5 + x^2 x'$.
25. Môže sa asymptoticky stabilná rovnovážna poloha po linearizácii stať Liapunovsky nestabilnou?
26. Vyšetrite správanie pre $t \rightarrow +\infty$ riešení sústav

$$a) \begin{cases} x' = y \\ y' = 2 \sin y - y - x \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - x^3 - x^2 - \epsilon y \end{cases} \quad (\text{kde } \epsilon \ll 1)$$

27. Nakreslite obrazy riešení rovnice $x'' = -kx' - dU/dx$ v rovine (x, E) , kde $E = (x')^2 + U(x)$, v blízkosti nedegenerovaných kritických bodov potenciálu U .
28. Nakreslite fázový portrét a vyšetrite jeho zmenu pri menení malého komplexného parametra ϵ :

$$z' = \epsilon z - (1 + i)z|z|^2 + \bar{z}^4$$

29. Náboj sa pohybuje po rovine pod vplyvom na ňu kolmého magnetického poľa $B(x, y)$. Ktorým smerom sa bude pohybovať stred Larmorovskej kružnice? Vypočítajte rýchlosť tohoto pohybu. [Matematicky ide o krivky s krivosťou NB pre $N \rightarrow \infty$.]
30. Nájdite súčet indexov kritických bodov vektorového poľa $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$.
31. Nájdite index kritického bodu 0 vektorového poľa so zložkami $(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2)$.
32. Nájdite index kritického bodu 0 vektorového poľa $\text{grad}(xy + yz + zx)$.