Reprezentácie grúp

Sylaby k prednáške

Základné pojmy

Pojem grupy

• Grupový súčin a jeho vlastnosti, komutatívna (abelovská) grupa.

• Podgrupa, pravé a ľavé triedy ekvivalencie, množina (priestor) G/H; invariantna podgrupa $H \subset G$, grupa G/H.

• Príklady: komutatívne grupy: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $U(1)$,
konečné grupy: grupa permutácií S_n,
klasické maticové grupy: $GL(n, \mathbf{K})$, $SL(n, \mathbf{K})$, $SO(n, \mathbf{K})$, $Sp(n, \mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ alebo $\mathbf{C}$; grupy $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$.

Pojem reprezentácie

• Homomorfizmus grúp $\varphi : G \to H$, jadro homomorfizmu, izomorfizmus grúp.

• Grupa automorfizmov $\mathrm{Aut}\,(G)$, vnútorné automorfizmy.

Lineárne reprezentácie

• homomorfizmus $T : G \to GL(V)$, $GL(V) =$ grupa $\mathrm{Aut}\,(V)$ invertibilných lineárnych zobrazení (konečnerozmerného alebo nekonečnerozmerného) Hilbertovho priestoru $g \in G \mapsto T(g) \in GL(V)$,
definícia Hilbertovho priestoru, maticová realizácia $T(g)$ pre $\dim V = n$.

• Unitárne reprezentácie: homomorfizmus $T : G \to \mathcal{U}(V)$, $\mathcal{U}(V) =$ grupa $\mathrm{Aut}\,(V)$ unitárnych zobrazení (konečnerozmerného alebo nekonečnerozmerného) Hilbertovho priestoru,
definícia unitárneho zobrazenia.

• Ireducibilné reprezentácie: invariantne podpriestory reprezentácie, rozložiteľnosť (reducibilita), ireducibilné reprezentácie,
nerozložiteľné reprezentácie, plná rozložiteľnosť unitárnych reprezentácií.

Konečné grupy

Reprezentácie konečnej grupy

• $T : G \to GL(V)$ = lineárna reprezentácia grupy G v konečnerozmernom vektorovom priestore so skalárnym súčinom $\langle .,. \rangle_0$.

Reprezentáciu T možno unitarizovať stredovaním $\langle .,. \rangle_0$ cez grupu.

Ekvivalencia reprezentácií

• Ekvivalencia lineárnych reprezentácií $T : G \to GL(X)$ a $S : G \to GL(Y)$.

• Unitárna ekvivalencia reprezentácií,

Veta: Ekvivalentné unitárne reprezentácie sú unitárne ekvivalentné.

• Schurova veta: Nech pre unitárne ireducibilné reprezentácie $U : G \to GL(X)$ a $V : G \to GL(Y)$ (konečnej alebo kompaktnej) grupy G v konečnerozmerných priestoroch X a Y, existuje také lineárne zobrazenie $T : X \to Y$, že pre každé $x \in G$ platí $T\,U(x) = V(x)\,T$. Potom, $T = 0$ alebo reprezentácie X a Y sú unitárne ekvivalentné a T je určené jednoznačne až na multiplikatívnu konštantu.

Dôsledok: Nech $U : G \to GL(X)$ je unitárna ireducibilná reprezentácia grupy G v konečnerozmernom priestore X. Ak pre operátor $T : X \to X$ pre každé $x \in G$ platí $T\,U(x) = U(x)\,T$ potom T je násobkom jednotkového oerátora.

Tenzorový súčin reprezentácií

• Definícia tenzorového súčinu $X \otimes Y$ konečnerozmerných vektorových priestorov X a Y,

• Definícia tenzorového súčinu $A \otimes B$ lineárnych zobrazení $A : X \to X$ a $B : Y \to Y$.

• Definícia tenzorového súčinu $W \otimes V$ reprezentáci $W : G \to GL(X)$ a $V : G \to GL(Y)$.

Maticové elementy unitárnych reprezentácií

• $\hat{G}$ = množina tried ekvivalentných unitárnych ireducibilných reprezentácií:

$\alpha = [D^\alpha] \in \hat{G}$, D^α - zvolený reprezentant triedy α v d_α rozmernom vektorovom priestore $V_\alpha \simeq \mathbf{C}^n$, $n = d_\alpha$.

Maticové elementy: $D^\alpha_{ij}(g) = \langle e_i, D^\alpha(g)\, e_j \rangle$, $e_1, \ldots, e_n$ - ortonormálna báza vo V_α.

• $D^\alpha \otimes D^\beta$ je unitárna (reducibilná) reprezentácia vo $V_\alpha V_\beta$ a preto je unitárne ekvivalentná Clebshovmu-Gordanovmu rozvoju do ireducibilných reprezentácií z $\hat{G}$: $D^\alpha \otimes D^\beta \simeq \sum_{\alpha \in \hat{G}} n^\gamma_{\alpha\beta} D^\gamma$, celočíselný Clebshov-Gordanov koeficient $n^\gamma_{\alpha\beta}$ udáva multiplicitu s akou sa reprezentácia γ nachádza v rozvoji.

• Clebsh-Gordan rozvoj pre maticové elementy:

$$D^\alpha_{ij}(g)\, D^\beta_{kl}(g) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \sum_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta\gamma_m}_{ij,kl,pq}\, D^{\gamma_m}_{pq}(g)$$

medzi $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ sa každá reprezentácia γ nachádza s príslušnou multiplicitou, $C^{\alpha\beta\gamma}$ = Clebsh-Gordan*ov* koeficient.

Grupová algebra $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ konečnej grupy $\mathbf{G}$

• $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ = priestor funkcií na grupe $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ opatrený konvolutívným súčinom

$$(F \circ G)(x) \;=\; \sum_{y \in \mathbf{G}} F(x\, y^{-1})\, G(y),$$

združením $F^*(x) \;=\; \overline{F(x^{-1})}$, skalárnym súčinom

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{A}} \;=\; \frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum_{x \in \mathbf{G}} \overline{F(x)}\, G(x)$$

a jednotkou δ v algebre $\mathcal{A}(\mathbf{G})$: $\delta \circ F \;=\; F \circ \delta \;=\; F$ (kde $\delta(e) = 1$ a $\delta(x) = 0$ pre $x \neq e$).

• Unitárna reprezentácia $T : \mathbf{G} \to GL(V)$ a jej rozšírenie $T_{\mathcal{A}}$ na $\mathcal{A}(\mathbf{G})$:

$$T_{\mathcal{A}}(F) \;=\; \sum_{x \in \mathbf{G}} F(x)\, T(x).$$

• Ľavá regulárna reprezentácia v $\mathcal{A}(\mathbf{G})$: $L_G(F) \;=\; G \circ F$; vlastnosť

$$\langle F, A \circ G \rangle_{\mathcal{A}} \;=\; \langle A^* \circ F, G \rangle_{\mathcal{A}}$$

.

Maticové elementy unitárnych reprezentácií konečnej grupy

• Relácie ortogonality pre maticové elementy

$$\langle D^{\alpha}_{ij}, D^{\beta}_{kl}\rangle_{\mathcal{A}} \;=\; \frac{1}{|\mathbf{G}|}\sum_{x\in\mathbf{G}} \overline{D^{\alpha}_{ij}(x)}\, D^{\beta}_{kl}(x) \;=\; \frac{1}{d_{\alpha}}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl}.$$

• Úplnosť systému maticových elementov. Každú funkciu $F \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ možno rozvinúť do (zovšeobecného) Fourierovho radu

$$F(x) \;=\; \sum_{\alpha ij} f^{\alpha}_{ij}\, X^{\alpha}_{ij}(x), \quad X^{\alpha}_{ij} \;=\; \frac{d_{\alpha}}{|\mathbf{G}|}\, D^{\alpha}_{ij}(x).$$

Inverzná Fourierova transformácia je daná formulou

$$f^{\alpha}_{ij} \;=\; \sum_{x\in\mathbf{G}} \overline{D^{\alpha}_{ij}(x)}\, F(x).$$

Pre konvolúciu funkcií X^{α}_{ij} platí: $X^{\alpha}_{ij} \circ X^{\alpha}_{kl} \;=\; \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{jk}\,X^{\alpha}_{il}$.

Charaktery unitárnych reprezentácií

• Centrum $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ algebry $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ tvoria funkcie, ktoré komutujú so všetkými prvkami $\mathcal{A}(\mathbf{G})$: $F \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$ ak $F \circ G \;=\; G \circ F$ pre všetky $G \in \mathcal{AQ}(\mathbf{G})$. Centrum tvoria práve tie funkcie F, pre ktoré platí: $F(xz) \;=\; F(zx)$.

• Charakter reprezentácie D^{α} je definovaný ako $\chi^{\alpha}(x) \;=\; \mathrm{Tr}\, D^{\alpha}(x) \;\in\; \mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Charakter nezávisí od výberu reprezenta z triedy $\alpha \in \hat{\mathbf{G}}$.

• Charaktery χ^{α}, $\alpha \in \hat{\mathbf{G}}$, tvoria bázu priestoru $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ a spĺňajú relácie ortogonality:

$$\langle \chi^{\alpha}, \chi^{\beta}\rangle_{\mathcal{A}} \;=\; \frac{1}{|\mathbf{G}|}\sum_{x\in\mathbf{G}} \overline{\chi^{\alpha}(x)}\,\chi^{\beta}(x) \;=\; \delta_{\alpha\beta}.$$

• Charakter všeobecnej unitárnej reprezentácie U grupy $\mathbf{G}$ v konečnerozmernom vektorovom priestore V je definovaný ako $\chi_U(x) \;=\; \mathrm{Tr}\, U(x)$. Platí:

$$U \;\simeq\; \bigotimes_{\alpha} m_{\alpha}\, D^{\alpha} \;\Leftrightarrow\; \chi_U(x) \;=\; \sum_{\alpha} \alpha\, \chi^{\alpha}(x).$$

Grupa permutácií S_n

• Definícia grupy permutácií S_n a jej podgrupy A_n párnych permutácií, rozklad permutácie na j-cykly $(i_1, \ldots, i_j)$.

• Konjugované triedy symetrickej grupy - pri konjugácii permutácie sa jej rozklad na j-cykly zachováva. Preto je konjugovaná trieda určená rozkladom $1^{k_1}\, 2^{k_1}\, \ldots\, n^{k_n}$, kde k_j udáva počet j-cyklov v triede, $\sum_{j=1}^{n} j\, k_j \;=\; n$.

• Youngove schémy a Youngove tabuľky:

Priradenie Youngovej schémy $\mathcal{F}$ ku konjugovanej triede $1^{k_1}\, 2^{k_1}\, \ldots\, n^{k_n}$.

Youngova tabuľka $\mathcal{F}(T)$ danej schémy $\mathcal{F}$, štandartná Youngova tabuľka.

Reprezentácie grupy S_n

• Projekcie v grupovej algebre $\mathcal{A}(S_n)$. Nech T je Youngova tabuľka pre schému $\mathcal{F}$. Definujme množiny permutácií:

$\mathcal{R}(T)$ tvoria permutácie z S_n, ktoré zachovávajú monožinu prvkov v každom riadku T,

$\mathcal{C}(T)$ tvoria permutácie z S_n, ktoré zachovávajú monožinu prvkov v každom stĺpci T.

• Youngove projektory v $\mathcal{A}(S_n)$: $E(T) \;=\; P(T)\, Q(T)$, kde

$$P(T) \;=\; \sum_{p\in} \mathcal{R}(T) p, \quad Q(T) \;=\; \sum_{p\in} \mathcal{C}(T) (-1)^{|q|}\, q.$$

Platí $E^2(T) \;=\; \frac{n!}{d}\, E(T)$, kde d je dimenzia podpriestoru funkcií vyprojektovaných $E(T)$:

Každej Youngovej schéme $\mathcal{F}$ odpovedá ireducibilná reprezentácia grupy S_n, jej dimenzia je rovná počtu $f(\mathcal{F})$ štandartných Youngových tabuliek pre schému $\mathcal{F}$ (vzorec pre $f(\mathcal{F})$).

Lieove grupy

Pojem Lieovej grupy

• Lieova grupa G je analytická varieta s grupovým súčinom $G \times G \;\to\; G$, pre ktorý zobrazenie $(x, y), \mapsto\; x\, y^{-1}$ je spojitá.

Podgrupa H Lieovej grupy je podgrupa $H \;\subset\; G$, ktorá je analytickou podvarietou G; analytická varieta vedľajších tried G/H.

Príklady: Grupa $GL(n, \mathbf{K})$, $\mathbf{K} \;=\; \mathbf{R}$ alebo $\mathbf{R}$, automorfizmov priestoru $\mathbf{K}^n$.

Podgrupy $GL(n, \mathbf{K})$ - Cartanove triedy A_n, B_n, C_n a D_n: $SL(n, \mathbf{K})$ matíc s jednotkovým determinantom, podgrupy $SO(n, \mathbf{K})$ a $Sp(n, \mathbf{K})$ zachovávajúce symetrickú resp. antisymetrickú nedegenerované kvadratické formy v $\mathbf{K}^n$.

• G-priestor: na variete X pôsobí Lieova grupa G, $(g,x) \mapsto gx$G. Toto zobrazenie $G \times X \to X$ je spojité, pričom $(g_1 g_2^{-1})\, x = g_1(g_2^{-1}\, x)$, pre všetky $g_1, g_2 \in G$ a $x \in X$.

Efektívne pôsobenie, tranzitívne pôsobenie.

Príklad: Grupa G ako G-priestor: $(g,x) \mapsto gx$, $g, x \in G$.

• Orbita bodu $x \in X$ je množina $\Gamma_x = \{y - gx,\ g \in G\}$.

Každý G-priestor sa rozkladá na disjuktné orbity. G-priestor je homogénne priestory ak sa skladá z jedinej orbity. Homogénny G-priestor Xje homeomorfný faktorpriestoru G/H, kde H je stacionárna podgrupa niektorého bodu $x \in X$.

Lineárne reprezentácie Lieovej grupy

• Lineárna reprezentácia Lieovej grupy G, je spojitý homomerfizmus $T : G \to GL(V)$, kde V je (konečnorozmerný) Hilbertov priestor.

• Ľavá regulárna reprezentácia L a pravá a regulárna reprezentácia R Lieovej grupy G je daná jej pôsobením v priestore $\mathcal{F}(G)$ hladkých funkcií na G: $L(g)\, F(x) = F(g^{-1}x)$ resp. $R(g)\, F(x) = F(xg)$, $g, x \in G$.

Reprezentácia A Lieovej grupy G v priestore $\mathcal{F}(G)$ zadaná konjugáciou v G: $A(g)\, F(x) = F(g^{-1}xg)$.

Haarova miera

• Na každej Lieovej (topologickej) grupe G existuje ľavo-invariantna miera $d\mu_l(g)$ a pravo-invariantna miera $d\mu_r(g)$, pre ktoré platí:

$$\int_G d\mu_l(x)\, F(gx) = \int_G d\mu_l(x)\, F(x), \quad \int_G d\mu_l(x)\, F(xg) = \int_G d\mu_l(x)\, F(x).$$

Miery sú ekvivaletné $d\mu_l(g) = \Delta(g)\, d\mu_r(g)$ s modulárnou funkciou $\Delta(g) \neq 0$, obe miery s[určené jednoznačne až multiplikatívnu konštantu.

Grupa je unimodulárna ak $\Delta(g) \equiv 1$, t.j. $d\mu_l(g) = d\mu_r(g) \equiv d\mu(g)$. Naviac, $d\mu(g) = d\mu(g^{-1})$.

Kompaktná grupa je unimodulárna, pričom $\int_G d\mu(x) < \infty$. Na kompaktnej grupe sa zvykne Haarova miera normalizovať tak, že $\int_G d\mu(x) = 1$.

Unitárne reprezentácie kompatnej grupy.

• $T : G \to GL(V) =$ lineárna reprezentácia grupy G v konečnerozmernom vektorovom priestore so skalárnym súčinom $\langle .,. \rangle_0$.

Reprezentáciu T možno unitarizovať integrovaním $\langle .,. \rangle_0$ cez grupu.

Lieove algebry.

Pojem Lieovej algebry.

• Definícia Lieovej algebry L nad $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ alebo $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) s Lieovou zátvorkou $L \times L \to L$: $(X, Y) \mapsto [X, Y]$.

• Lieova algebra je konečnorozmerná ak v L existuje báza $X_1, \ldots, X_n$: $[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k$, $f_{ij}^k \in \mathbf{K}$ - štruktúrne koeficienty.

• Veta (Ado): Každá konečnerozmerná Lieova algebra má vernú maticovú realizáciu.

Príklad 1: L je algebra $n \times n$-matíc s Lieovou zátvorkou danou komutátorom $[X, Y] = XY - YX$.

Príklad 2: Lieova algebra hladkých vektorových polí $\hat{X} = a^i(x)\partial_{x^i}$ na variete M s Lieovou zátvorkou danou komutátorom $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$.

Lieova algebra Lie(G) Lieovej grupy G.

Ľavo-invariantne vektorové polia na Lieovej grupe G.

• Vektorové pole $\hat{X}$ na G je ľavo-invariatne, ak $L(g)\,\hat{X} = \hat{X}\,L(g)$.

Komutátor dvoch ľavo-invariatnych vektorových polí je ľavo-invariatne vektorové pole.

Poznámka: Vektorové pole $\hat{X}$ na G je pravo-invariatne, ak $R(g)\,\hat{X} = \hat{X}\,R(g)$. Medzi ľavo-invariatnými a pravo-invariatnými vektorovými poliami je jednoznačný vzťah.

Lieova algebra Lieovej grupy G.

• Lieova algebra Lie(G) sa definuje ako Lieova algebra ľavo-invariatnych vektorových polí na G s Lieovou zátvorkou danou ich komutátorom.

• Ľavo-invariatne vektorové pole je na G jednoznačne dané svojou hodnou v jednom bode, napríklad $g = e$. Preto možno ekvivalentne definovať Lie(G) $= T_e(G)$ - tangenciálny priestor vektorov v bode $g = e$.

• Lie(G) v lokálnej parametrizácii $U_0' \subset \mathbf{R}^n$ okolia $U_e \subset G$: $x \in U_0' \leftrightarrow g_x \in G$, pričom $x = 0 \leftrightarrow g_0 = e$.

Potom $g_x, g_y \in U_e \Rightarrow g_z = g_x\, g_y \in U_e$, pričom $z = \psi(x, y) = x + y\,B(x, y)$. Lieova zátvorka je daná ako $[x, y] = B(x, y) - B(y, x)$.

Adjungovaná reprezentácia Lieovej grupy a Lieovej algebry.

• Adjungovaná reprezentácia Ad Lieovej grupy G je jej reprezentácia v priestore $V = \mathrm{Lie}(G)$, ktorá je definovaná ako diferenciál $A_*(g)$ zobrazenia $A(g) : x \in G \mapsto A(g)\,x = g\,x\,x^{-1} \in G$ v bode $x = e$.

$A : G \to G$)je reprezentácia grupy G a diferencovaním $A(g)$ sa získa Ad-reprezentácia grupy G v Lieovej algebre $\mathrm{Lie}(G)$: $X \in \mathrm{Lie}(G) \mapsto Ad_g X \equiv A_*(g)X$.

• Adjungovaná reprezentácia ad Lieovej algebry $\mathrm{Lie}(G)$ v $\mathrm{Lie}(G)$. Pôsobenie ad_X v $\mathrm{Lie}(G)$:

$$ad_X Y = \lim_{t\to 0} Ad_{e^{tX}} Y$$

kde e^{tX} je 1-parametrická podgrupa v G priradená $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Platí, $ad_X Y = [X, Y]$ - ekvivalentná definícia Poissonovej zátvorky.

Adjungované reprezentácie Ad a ad pre maticové grupy

• Lieove algebry $gl(n, \mathbf{K})$, $sl(n, \mathbf{K})$, $so(n, \mathbf{K})$, $sp(n, \mathbf{K})$ pre maticové grupy $GL(n, \mathbf{K})$, $SL(n, \mathbf{K})$, $SO(n, \mathbf{K})$, $Sp(n, \mathbf{K})$ sú dané ako priestory matíc (je zvykom označovať príslušné Lieove algebry malými písmenami).

• Lieove algebry $su(n)$, $so(n)$, $sp(n)$ kompaktných grúp $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$: grupy ako variety sú kompaktné a ich Lieove algebry sú tvorené anti-hermitovskými maticami (súvis vyplýva z exponenciálne zobrazenia Lieovej algebry).

• Pre maticové grupy platí: $Ad_g X = g\,X\,g^{-1}$ a $ad_X Y = XY - YX$ (súčiny štvorcových matíc sú definované).

1-parametrické podgrupy Lieovej grupy a exponenciálne zobrazenie.

• 1-parametrickú podgrupu G tvoria prvkz $g(t) \in G$, $t \in \mathbf{R}$, pričom $g(t+s) = g(t)\,g(s)$ a $g(0) = 0$. 1-parametrická podgrupa je generovaná ľavo-invariantnym vektorovým poľom $\hat{X}$ zadané ako:

$$(\hat{X}F)(x) = \frac{d}{dt} F(x\,g(t))|_{t=0}.$$

• Pre maticovú Lieovu algebru L definujeme exponenciálne zobrazenie:

$$X \in L \mapsto e^X = \mathbf{1} + + X + \ldots = \sum_{k=0}^{i} nfty \frac{1}{k!} X^k$$

Súčin dvoch exponent je daný Bakerovou-Campabellovou-Hausdorffovou formulou:

$$e^X\, e^Y \;=\; e^{\psi(X,Y)}, \quad \psi(X,Y) \;=\; X \,+\, Y\,\frac{1}{2}[X,Y] \,+\, \dots\;,$$

kde bodky označujú viacnásobné komutátory. Množina exponenciálnych prvkov $G \,=\, e^L$ je grupa, ktorú tvorí súvislá komponenta obsahujúca jednotkový prvok $e \,=\, \mathbf{1}$, pritom $\mathrm{Lie}(G) \,=\, L$.

• Lieove grupy G_1 a G_2 sú lokálne izomorfné, ak sú izomorfné ich Lieove algebry $\mathrm{Lie}(G_1)$ a $\mathrm{Lie}(G_2)$.

Naríklad $G_1 SU(2)$ a $G_2 SO(3)$, alebo $G_1 SL(2,\mathbf{C})$ a $G_2 SO(3,1)$.

Unitárne reprezentácie kompaktnej Lieovej grupy.

• Unitárna reprezentácia kompaktnej Lieovej grupy G je spojitý homorfizmus $T : G \;\to \mathcal{U}(X)$, kde $\mathcal{U}(X)$ je množina unitárnych zobrazení konečnerozmerného Hilbertovho priestoru X.

Unitárna reprezentácia kompaktnej Lieovej grupy je plne rozložiteľná.

• Ekvivalentné unitárne reprezentácie $U : G \;\to\; \mathcal{U}(X)$ a $W : G \;\to\; \mathcal{U}(Y)$ sú unitárne ekvivalentné.

• $\hat{G}$ = množina tried ekvivalentných unitárnych ireducibilných reprezentácií:

$\alpha \;=\; [D^\alpha] \,\in\, \hat{G}$, D^α - zvolený reprezentant triedy α v d_α rozmernom vektorovom priestore $V_\alpha \;\simeq\; \mathbf{C}^n$, $n = d_\alpha$.

• Relácie ortogonality pre maticové elementy

$$\int_G d\mu(x)\, \overline{D^\alpha_{ij}(x)}\, D^\beta_{kl}(x) \;=\; \frac{1}{d_\alpha}\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{ik}\, \delta_{jl},$$

kde $d\mu(x)$ je normalizovaná Haarova miera.

• Petrova-Weylova veta: Každú funkciu $F \,\in\, L^2(G, d\mu(x))$ možno rozvinúť do Fourierovho radu

$$F(x) \;=\; \sum_{\alpha ij} f^\alpha_{ij}\, D^\alpha_{ij}(x).$$

Inverzná Fourierova transformácia je daná formulou

$$f^\alpha_{ij} \;=\; d_\alpha \int_G d\mu(x)\, \overline{D^\alpha_{ij}(x)}\, F(x).$$

• Charaktery $\chi_\alpha(x) = \mathrm{Tr}\, D^\alpha_{ij}(x)$ spĺňajú relácie ortogonality

$$\int_G d\mu(x)\, \overline{\chi_\alpha(x)}\, \chi_\beta(x) = \delta_{\alpha\beta}.$$

• Charakter unitárnej reprezentácie U grupy $\mathbf{G}$ je definovaný ako $\chi_U(x) = \mathrm{Tr}\, U(x)$. Platí:

$$U \simeq \bigotimes_\alpha m_\alpha\, D^\alpha \;\Leftrightarrow\; \chi_U(x) = \sum_\alpha \alpha\, \chi^\alpha(x).$$

• $D^\alpha \otimes D^\beta$ je unitárna reprezentácia, ktorá je unitárne ekvivalentná Clebshovmu-Gordanovmu rozvoju: $D^\alpha \otimes D^\beta \simeq \sum_{\alpha\in\hat{G}} n^\gamma_{\alpha\beta}\, D^\gamma$, koeficient $n^\gamma_{\alpha\beta}$ udáva multiplicitu s akou sa reprezentácia γ nachádza v rozvoji.

• Clebsh-Gordan rozvoj pre maticové elementy:

$$D^\alpha_{ij}(g)\, D^\beta_{kl}(g) = \sum_m \sum_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta\gamma_m}_{ij,kl,pq}\, D^{\gamma_m}_{pq}(g)$$

medzi γ_m sa každá reprezentácia γ nachádza s príslušnou multiplicitou.

Obálková algebra $\mathcal{U}(L)$ Lieovej algebry.

• Nech L je Lieova algebra s bázou $X_1, \ldots, X_n$, ktorej prvky spĺňajú komutačné vzťahy: $[X_i, X_j] = f^k_{ij}\, X_k$.

Obálková algebra $\mathcal{U}(L)$ je asociatívna algebra generovaná monómami v $X_1, \ldots, X_n$, pričom pre generátory platia definičné vzťahy $X_iX_j - X_jX_i = f^k_{ij}\, X_k$.

• Každú reprezentácia Lieovej algebry $T : L \to V$ je možné rozšíriť na $\mathcal{U}(L)$ takto: Polynóm$P(X) \equiv P(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{U}(L)$ je reprerzentovaný $(TP)(X)) = P(T(X_1), \ldots, T(X_n)) \equiv P(T(X))$.

• Centrum $\mathcal{Z}(L)$ obálkovej algebry $\mathcal{U}(L)$ tvoria polynómy $C(X) \in \mathcal{U}(L)$, ktoré komutujú so všetkými prvkami $\mathcal{U}(L)$. Postačuje ak, komutujú s prvkami báze: $C(X)\, X_k = X_k\, C(X)$, $k = 1, \ldots, n$.

Prvky centra nazývajú sa invariantne polynómy, alebo Casimirove operátory, špeciálne ak sú prvky báze reprezentované ľavo-invariantnými vektorovými poliami $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n$. Pre príslušné Casimirove operátory $\hat{C} = C(\hat{X})$ potom platí: $\hat{C}\, \hat{X}_k = \hat{X}_k\, \hat{C}$, $k = 1, \ldots, n$.