

# Matematika 1

## Elementárny kalkulus

### Úvod

**Prehľad.** Tieto poznámky obsahujú podklady k prednáške Matematika 1 na špecializácii Aplikovaná informatika: jedná sa o 12 dvojhodinových prednášok doplnených dvojhodinovými cvičeniami (ich členenie nie je definitívne). Poznámky obsahujú nasledujúce témy:

1. Reálne čísla
2. Elementárne funkcie
3. Limita číselnej postupnosti, číselné rady
4. Limita funkcie, spojitosť a derivácia
5. Využitie derivácií: L'Hospitalovo pravidlo, priebeh funkcie, Taylorov rozvoj funkcie
6. Integrovanie a jeho aplikácie: Neurčitý integrál, určitý integrál, obyčajné diferenciálne rovnice

**Motivácia.** Aj keď v informatike sa pracuje najmä metódami diskkrétnej matematiky a algebry, je veľmi užitočné ovládať aj základy analýzy a geometrie. Tieto aspekty sa prejavujú najmä v aplikáciách numerických a informatických metód. Často treba skúmať, simulovať alebo modelovať rôzne procesy, zobrazovať ich alebo prenášať do virtuálneho sveta počítačov. Na doplnenie treba uviesť, že aj v rámci diskkrétnej matematiky, pri formuláciách

problémov alebo ich analýze je užitočné mať základné vedomosti zo "spojitej matematiky".

Zvyčajne, alebo aspoň veľmi často, skúmaný problém má svoj matematický alebo fyzikálny popis v rámci "klasickej" analýzy a geometrie. Cieľom prednášok Matematika 1 je dať nevyhnutné základy analýzy a naučiť sa ich aj prakticky využívať (podobne predmet Matematika 2 bude poskytovať základné poznatky z lineárnej algebry). Pojmový aparát bude preto budovaný len v nevyhnutnej miere. Dôraz bude kladený na praktické ovládanie metód, t.j. priebežné precvičovanie naučených poznatkov, riešenie najprv jednoduchých a potom (trochu) zložitejších problémov.

*Poznámka:* Ospravedlňujem sa za preklepy, ktoré budú postupne odstraňované. Upozorňujem na to, že v texte sa používajú štandardné označenia goniometrických a cyklometrických funkcií, kým v obrázkoch sa to LATEXove označenia:

Funkcia	Text	Obrázky
<i>tangens</i>	$\operatorname{tg} x$	$\tan x$
<i>cotangens</i>	$\operatorname{tg} x$	$\cot x$
<i>arctangens</i>	$\operatorname{arctg} x$	$\arctan x$
<i>arccotangens</i>	$\operatorname{arccotg} x$	—

## Literatúra.

### Učebnice.

1. I. Kluvánek, L. Mišík, J. Švec: Matematika pre štúdium technických vied, Alfa, Bratislava, 1961.
2. Ch. B. Morrey, jr: University Calculus with Analytic Geometry, Addison-Wesley Publ. Comp., 1964.
3. J. B. Zeľdovič: Vyššia matematika pre začiatočníkov, Alfa, Bratislava, 1973.

### Zbierky úloh.

1. Z. Kubáček, J. Valášek: Cvičenia z matematickej analýzy I a II, skriptum UK Bratislava, 1994.
2. J. Eliáš, J. Horváth, J. Kazan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť, Alfa, Bratislava, 1966.
3. B. P. Demidovič: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu, Nauka, Moskva, 1977.

### Prehľady.

1. I. N. Bronštejn, K. A. Semendžajev: Príručka matematiky, SNTL, Bratislava, 1961.
2. Malá encyklopédia matematiky, Obzor, Bratislava, 1978.

**Hodnotenie predmetu.** Výsledné hodnotenie sa skladá z priebežného hodnotenia a záverečného hodnotenia v pomere 50:50.

1. *Priebežné hodnotenie* 20 + 20 + 15 bodov

"Malé" testy na cvičeniach ( $10 \times 2$ ) ..... 20 bodov

"Veľké" testy v strede a na konci semestra ( $2 \times 10$ ) ... 20 bodov

Aktivita na cvičeniach ..... 15 bodov

2. *Záverečné hodnotenie* 35 + 20 bodov

Písomný test (treba získať aspoň 10 bodov) ..... 35 bodov

Ústna skúška ..... 20 bodov

3. *Známkovanie* je rozrátané na 50 + 50 bodov (5 + 5 bodov je bónus za cvičenia a záverečný test):

$\geq 91$  bodov ... A

81-90 bodov ... B

71-80 bodov ... C

61-70 bodov ... D

51-60 bodov ... E

$\leq 50$  bodov ... Fx

Kto zo všetkých písomných testov počas semestra a zo záverečného testu nezíska viac ako 30 bodov (z možných 90) nebude pripustený k ústnej skúške.

Zlepšenie hodnotenia podľa písomných testov je dané počtom bodov získaných na skúške. Zlý výsledok ústnej skúšky môže znamenať zhoršenie známky o 1 stupeň oproti hodnoteniu podľa písomných testov.

# Chapter 1

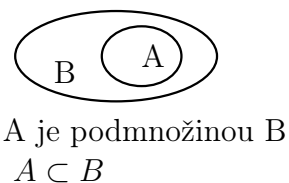
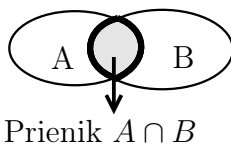
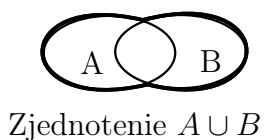
## Reálne čísla

Budeme predpokladať, že intuitívny pojem množiny a základných operácií s nimi sú známe. Zopakujme si ich:

(i) *Množina*  $\mathbf{A}$  je súbor určitých objektov, pričom o každom objekte vieme rozhodnúť či do nej patrí alebo nie. Obyčajne budeme postupovať tak, že objekty patriace do množiny jednoducho vymenujeme

$$\mathbf{A} = \{a, b, \dots, z\},$$

alebo do zátvoriek  $\{\dots\}$  napíšeme presnú charakteristiku objektov patriacich do množiny. Ak objekt  $a$  patrí do  $\mathbf{A}$ , tak píšeme  $a \in \mathbf{A}$ .



Obr. 1 a,b,c

(ii) *Zjednotenie*  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  dvoch množín  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je súbor objektov patriacich aspoň do jednej z množín  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\text{všetky } x \text{ také, že } x \in \mathbf{A} \text{ alebo } x \in \mathbf{B}\};$$

*Prienik*  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$  dvoch množín  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je súbor objektov patriacich do oboch množín  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  súčasne:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\text{všetky } x \text{ také, že } x \in \mathbf{A} \text{ a súčasne } x \in \mathbf{B}\}.$$

*Podmnožina.* Množina  $\mathbf{A}$  je podmnožinou množiny  $\mathbf{B}$ , ak každý prvok množiny  $\mathbf{A}$  patrí aj do množiny  $\mathbf{B}$ . Samozrejme, množina  $\mathbf{B}$  môže mať aj rôzne ďalšie prvky, (pozri Obr. 1).

**Množina celých čísiel.** Začnime náš výklad množinou celých čísiel  $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , na ktorej je definované sčítanie  $(n, m) \mapsto n + m$  a násobenie  $(n, m) \mapsto n \cdot m$  s obvyklými vlastnosťami

(i) komutatívnosť súčtu a súčinu:

$$n + m = m + n, \quad n \cdot m = m \cdot n,$$

$$\text{pritom } n + 0 = n, \quad 1 \cdot n = n;$$

(ii) asociatívnosť súčtu a súčinu:

$$n + (m + k) = (n + k) + m, \quad n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k,$$

(iii) distributívnosť súčtu a súčinu:  $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$ .

(iv) záporný prvok: rovnica  $n + x = 0$  má práve jedno riešenie  $x = -n$ .

Množina s vlastnosťami (i)-(iv) sa nazýva *okruh*. Teda množina celých čísiel  $\mathbf{Z}$  je okruh.

Čísla  $\mathbf{Z}_+ = \{+1, +2, \dots\}$  sa nazývajú kladné celé čísla, pričom miesto  $+1, +2, \dots$  jednoducho píšeme  $1, 2, \dots$ ; čísla  $\mathbf{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$  sú záporné

celé čísla. Miesto  $n + (-m)$  sa zvykne písať  $n - m$ . Poznamenajme, že platí  $-n = (-1).n$ , podobne  $n = -(-n)$ .

Ak platí  $(n - m) \in \mathbf{Z}_+$  hovoríme, že číslo  $n$  je väčšie ako číslo  $m$ , zapisuje sa to ako  $n > m$  (prípadne  $m < n - m$  je menšie ako  $n$ ):

- pre ľubovoľné dve rôzne celé čísla platí buď  $n > m$  alebo  $m > n$ ,
- ak  $n > m$  a  $m > k$  potom  $n > k$ .

To znamená, že množina celých čísiel je *lineárne usporiadaná*. Číslo  $n + 1$  je *nasledovník* čísla  $n$  (najbližšie celé číslo väčšie ako  $n$ ).

**Matematická indukcia.** Čísla  $\mathbf{N} = \{0, +1, +2, \dots\}$  sa nazývajú prirodzené čísla. Množina prirodzených čísiel  $\mathbf{N}$  je najmenšia množina, ktorá má nasledujúce dve vlastnosti:

$$(i) 0 \in \mathbf{N} ,$$

$$(ii) \text{ Ak } n \in \mathbf{N} \text{ potom aj } n + 1 \in \mathbf{N} .$$

Táto vlastnosť je základom overovania formúl (dôkazu vzorcov) závislých na prirodzenom čísle  $n$  pomocou metódy *matematickej indukcie*:

- (i) Overíme formulu  $S_n$  pre  $n = 0$ ,
- (ii) Za predpokladu, že platí  $S_n$  dokáže sa platnosť  $S_{n+1}$ .

*Príklad:* Overiť pomocou matematickej indukcie súčtovú formulu pre konečný aritmetický rad

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) .$$

*Riešenie:* (i) Pre  $n = 0$  máme  $S_0 = 0$ , čo je zrejme správne; (ii) Pre súčet

$S_{n+1}$  postupne dostaneme:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Posledný výraz je presne súčtový vzorec pre  $n+1$ : za predpokladu jeho platnosti pre  $n$ , overili sme ho pre  $n+1$ .

Základom úspešného výsledku bola už správna formula pre  $S_n$ , my sme len overovali, že naozaj je správna. Keby sme nemali správnu formulu k dispozícii, museli by sme ju "uhádnuť" alebo odvodiť. V danom prípade to ale nie je ťažké:

$$\begin{aligned} S_n &= 0 + 1 + 2 + \dots + n \\ &= \frac{1}{2}[(0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n + n - 1 + \dots + 1 + 0)] \\ &= \frac{1}{2}[(0 + n) + (1 + n - 1) + \dots + (n + 0)] = \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$

**Množina racionálnych čísiel.** Množinu racionálnych čísiel  $\mathbf{Q}$  tvoria triedy ekvivalencie dvojíc celých čísiel  $(n, m)$ ,  $m \neq 0$ , ktoré budeme zapisovať ako zlomky  $\frac{n}{m}$  (prípadne v texte ako  $n/m$ ): zlomky  $n/m$  a  $n'/m'$  sú ekvivalentné ak platí

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \text{ ak } nm' = mn'. \quad (1.1)$$

Toto napríklad nastane ak  $n' = n.k$  a  $m' = m.k$ , t.j.

$$\frac{n}{m} = \frac{n.k}{m.k}.$$

Teda zlomky môžeme krátiť: vždy možno vykrátiť čitateľa  $n$  aj menovateľa  $m$  tak, že  $n$  a  $m$  nesúdeliteľné. Naopak, niekedy môže byť vhodné zlomky rozširovať.

Ak zlomok  $n/1$  (presnejšie s ním ekvivalentnú triedu) identifikujeme s číslom  $n \in \mathbf{Z}$ , tak množina celých čísiel  $\mathbf{Z}$  bude podmnožinou množiny racionálnych čísiel  $\mathbf{Q}$ . Poznamenajme, že platí

$$\frac{n}{m} = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \cdot n ,$$

$$\frac{-n}{m} = \frac{n}{-m} = (-1) \cdot \frac{n}{m} = -\frac{n}{m} .$$

V množine racionálnych čísiel  $\mathbf{Q}$  definujeme sčítanie a násobenie zlomkov nasledovne:

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{n \cdot q + m \cdot p}{m \cdot q} , \quad \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{m \cdot q} . \quad (1.2)$$

Množina racionálnych čísiel je *pole*, t.j. pre operácie sčítania a násobenia zlomkov platí:

(i) komutatívnosť súčtu a súčinu:  $r + s = s + r$  ,  $r \cdot s = s \cdot r$  ,

(ii) asociatívnosť súčtu a súčinu:

$$r + (s + t) = (r + s) + t , \quad r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t ,$$

(iii) distributívnosť súčtu a súčinu:  $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$  ,

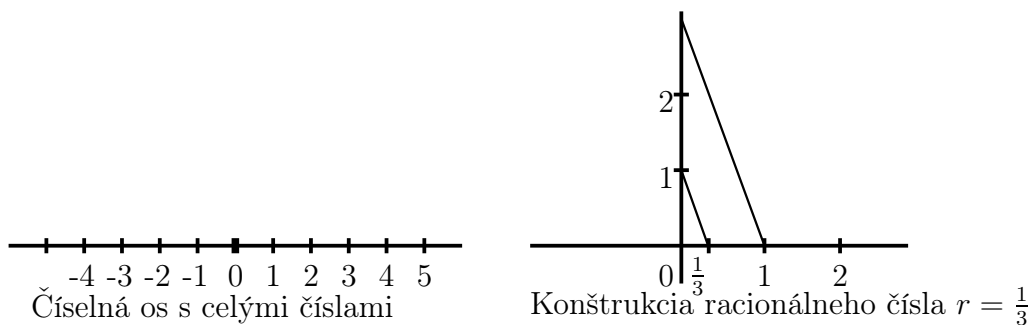
(iv) záporný prvok: ku každému racionálnemu číslu  $r = n/m$  existuje práve jedno racionálne číslo  $x = -r = -n/m$ , ktoré rieši rovnicu  $r + x = 0$ ,

(v) inverzný prvok: ku každému *nenulovému* racionálnemu číslu  $r = n/m \neq 0$  existuje práve jedno racionálne číslo  $y = r^{-1} = \frac{m}{n}$ , ktoré rieši rovnicu  $r \cdot y = 1$ .

Teda množina racionálnych čísiel je okruh s vlastnosťami (i)-(iv) a má ešte jednu dôležitú vlastnosť (v) navyše. Takáto množina sa nazýva *teleso*.

### Znázornenie celých a racionálnych čísiel.

Celé čísla budeme znázorňovať ako body na číselnej osi: nakreslíme si priamku a na nej zvolíme počiatok - bod  $n = 0$ , smerom doprava (doľava) v jednotkovej vzdialenosti od počiatku vyznačíme bod  $+1$  ( $-1$ ), dvojkovej vzdialenosti smerom doprava (doľava) vyznačíme bod  $+2$  ( $-2$ ), atď. (pozri Obr. 2a).



Obr. 2 a,b

Zlomku  $n/m$ ,  $m \neq 0$ , jednoduchou geometrickou konštrukciou priradíme bod na číselnej osi:

- Nakreslíme dve na seba kolmé číselné osi - na "vodorovnú" číselnú os nanesieme hodnotu  $n$  (čitateľa) a kolmú číselnú os nanesieme hodnotu  $m \neq 0$  (menovateľa).
- Nanesenými bodmi vedieme priamku  $p$  a bodom  $+1$  na kolmej osi s ňou rovnobežnú priamku  $p'$ ; priamka  $p'$  pretne vodorovnú os práve v bode  $n/m$ .

Ak je zlomok kladný priesečník odpovedajúci racionálnemu číslu  $n/m$  je napravo od bodu 0 na vodorovnej osi, ak je záporný je od bodu 0 naľavo. Toto

priradenie bodu na číselnej osi racionálnemu číslu má tú príjemnú vlastnosť, že ekvivalentným zlomkom je priradený ten istý bod.

Iné možné vyjadrenie *celého čísla*  $n$  je jeho zápis v dekadickom zápise pomocou číslic  $0, 1, \dots, 9$ : kladné  $k$ -ciferné číslo  $AB\dots Z$ ,  $A \neq 0$ , je zadané ako

$$n = A.10^k + B.10^{k-1} + \dots Z .$$

Teraz *racionálnemu číslu*  $r = n/m$  priradíme dekadický zápis príslušného podielu dvoch celých čísiel (vypočítaný pomocou bežného algoritmu). Ilustrujme si tento postup na niekoľkých jednoduchých zlomkoch tvaru  $1/m$ :

(a)  $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,500\dots = 0,5\bar{0}$ . Po prvom delení máme nulový zvyšok a ďalšie delenie by dávalo len samé 0;

(b)  $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333\dots = 0,\bar{3}$ . Ako je zvykom, opakujúce sa číslo alebo skupina čísiel v podieloch (a) aj (b) je v poslednom zápise vyznačená čiarou nad opakujúcim sa súborom čísiel ( $\bar{0}$  sa nezvykne explicitne vyznačovať);

(c)  $\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0,142857142857\dots = 0,\overline{142857}$ . V tomto prípade máme postupne zvyšky po delení: 1, 4, 2, 8, 5, 7, potom sa objaví opäť 1 a zvyšky sa začnú opakovať. Je si treba uvedomiť, že je to nevyhnutné: všetky zvyšky po delení musia byť menšie ako  $m = 6$  a nanaajvyš po šiestich krokoch musia sa objaviť dva rovnaké zvyšky a nastane opakovanie.

Rovnaký argument platí pre ľubovoľný zlomok: *každému číslu*  $r = n/m \in \mathbf{Q}$  je priradený dekadický rozvoj **s periódou na konci**  $r = A\dots B, C\dots D\overline{E\dots F}$ :

- časť dekadického rozvoja pred desatinnou čiarkou sa nazýva celou časťou čísla  $r$  a značí sa  $[r] = A\dots B$ ,
- za desatinnou čiarkou môže byť najprv neperiodická časť  $C\dots D$ , po

ktorej nasleduje perióda  $\overline{E\dots F}$  nanajvyš dĺžky  $m$ ,

- perióda  $\overline{0}$  sa explicitne nevyznačuje; číslo  $A\dots B, C\dots D\overline{9}$  s  $D < 9$  sa identifikuje s číslom  $A\dots B, C\dots D'$  s poslednou číslicou  $D' = D+1$ . Napríklad,  $0,\overline{9} = 1$  alebo  $2,\overline{19} = 2,2$ .

*Príklad:* Konečný geometrický rad je definovaný ako súčet

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k \equiv 1 + q + \dots + q^n .$$

Dokážte súčtovú formulu

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} , \text{ pre } q \neq 0 .$$

*Riešenie:* Vyjdeme jednak zo vzťahu

$$S_{n+1} = 1 + q + \dots + q^{n+1} = S_n + q^{n+1} ,$$

a tiež zo vzťahu

$$S_{n+1} = 1 + q + \dots + q^{n+1} = 1 + q(1 + \dots + q^n) = 1 + q \cdot S_n .$$

Porovnaním, pravých strán obdržíme hľadaný súčtový vzorec.

*Poznámka 1:* V prípade  $q < 1$  je užitočné prepísať súčtový vzorec geometrického radu takto:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q} .$$

Pre veľké  $n$  druhý člen bude malý (napríklad, ak  $q = 10^{-k}$ , prvý člen dá číslo, ktoré sa bude líšiť od  $S_n$  nanajvyš na  $k$ -tom desatinnom mieste). Toto

motivuje nasledujúcu definíciu: Pri  $q < 1$  súčet *nekonečného geometrického radu* je rovný

$$S(q) \equiv 1 + 2 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad q < 1. \quad (1.3)$$

K súčtovému vzorcu (1.3) pre nekonečný geometrický rad sa vrátíme neskôr.

*Poznámka 2:* Aplikujme teraz súčtový vzorec pre nekonečný geometrický rad na číslo zadané v dekadickom zápise

$$r = A...B, C...D\overline{E...F}r = A...B, C...D + 0,0\dots0\overline{E...F}.$$

Číslo  $A...B, C...D$  je evidentne racionálne, ukážme že taká je aj jeho periodická časť  $0,0\dots0\overline{E...F}$  (počet núl za desatinnou čiarkou sa rovna počtu cifier  $C...D$ ). Ako  $a = 0,0\dots0\overline{E...F}$  označíme prvú časť periódy, jej druhá časť bude  $a.q$ , tretia  $a.q^2$ , atď; tu  $q = 10^{-k}$ , kde  $k$  je rovné počtu cifier v perióde  $E...F$ . Podľa súčtového vzorca periodická časť je rovná racionálnemu číslu:

$$0,0\dots0\overline{E...F} = a.(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{a}{1 - q}.$$

**Lineárne usporiadanie racionálnych čísiel.** V ďalšom bez ujmy na obecnosti racionálne číslo berieme s kladným menovateľom v tvare  $r = n/m$ ,  $m > 0$ :

- Racionálne číslo  $r$  je kladné  $r > 0$  ak  $n > 0$ ;  $r$  je záporné  $r < 0$  ak  $n < 0$ ; (kladné resp. záporné racionálne čísla sa zobrazujú sa kladnú pravú časť resp. zápornú ľavú časť číselnej osi);

- Hovoríme, že  $r \in \mathbf{Q}$  je väčšie  $s \in \mathbf{Q}$  práve ak  $r - s > 0$ , zapisujeme to ako  $r > s$ . Číslo  $r$  je menšie ako  $s$  ak  $s - r > 0$ , zapisujeme to ako  $r < s$  alebo  $s > r$ ;

- Pre ľubovoľné dve rôzne racionálne čísla  $r$  a  $s$  platí buď  $r > s$  alebo  $s > r$ ; usporiadanie je *tranzitívne*: ak  $r > s$  a  $s > t$  potom  $r > t$ ;

- Množina racionálne čísiel je *hustá*: medzi dvoma racionálnymi číslami  $r > s$  vždy existuje racionálne číslo  $t$  také, že  $r > t > s$ .

- Ak  $r > s$  a  $t > 0$  potom  $r.t > s.t$ ; ak  $r > s$  a  $t < 0$  potom  $r.t < s.t$ ; špeciálne pre  $r > s$  dostaneme  $-r < -s$ .

Teda množina racionálnych čísiel  $\mathbf{Q}$  je lineárne usporiadané teleso: na číselnej osi menšie racionálne číslo je naľavo od väčšieho, kladné resp. záporné racionálne čísla sa zobrazujú na kladnú pravú časť resp. zápornú ľavú časť číselnej osi.

*Poznámka:* Vzťah  $r > s$  sa nazýva *ostrá nerovnosť*. *Neostrá nerovnosť*

$r \geq s$  znamená  $r > s$  alebo  $r = s$ ;

analogicky

$r \leq s$  znamená  $r < s$  alebo  $r = s$ .

**Množina reálnych čísiel.** Množinu racionálnych čísiel je potrebné rozšíriť aby bolo možné riešiť (niektoré) algebraické rovnice. Ako príklad uvažujme rovnicu

$$x^2 = 2.$$

Predpokladajme, že jej riešením je racionálne číslo  $x = n/m \in \mathbf{Q}$  s nesúdeliteľnými  $n, m \in \mathbf{Q}$  (t.j. vykrátili sme všetky spoločné faktory v  $n$  a  $m$ ). Po dosadení do rovnice dostaneme

$$\frac{n^2}{m^2} = 2 \text{ alebo } n^2 = 2m^2.$$

Pravá strana je párne číslo a preto musí byť  $n = 2k$ . Po dosadení do posled-

ného vzťahu dostaneme  $2k^2 = m^2$ , takže aj  $m$  musí byť párne: obe čísla  $n$  a  $m$  sú párne a prišli sme k sporu s ich predpokladanou nesúdeliteľnosťou. Vidíme, že rovnica  $x^2 = 2$  nemá racionálne riešenia. Pretože riešenie  $x$  rovnice  $x^2 = 2$  nie je racionálne, jeho dekadický rozvoj *nemôže* byť s periódou na konci.

Množinu *reálnych čísiel*  $\mathbf{R}$  definujeme ako čísla, ktoré majú všeobecný dekadický rozvoj  $x = A...B, CD\dots$ :

- čísla s periódou na konci sú racionálne,
- ostatné čísla sú iracionálne.

*Poznámka:* Čísiel v  $\mathbf{R}$  je oveľa viac ako racionálnych čísiel  $\mathbf{Q}$ . Dajú sa ale ľubovoľne presne aproximovať číslami z  $\mathbf{Q}$ . Napríklad, stačí zobrať z dekadického rozvoja  $x = A...B, C_1...C_n\dots \in \mathbf{R}$  jeho celú časť a prvých  $n =$  číslic za desatinnou čiarkou, t.j.  $x_n = A...B, C_1...C_n \in \mathbf{Q}$ . Zrejme  $0 < x - x_n < 10^{-n}$ . Podrobnejšie sa budeme takýmito otázkami zaoberať neskôr.

Množina reálnych čísiel  $\mathbf{R}$  je *usporiadané pole*:

- V  $\mathbf{R}$  sú definované komutatívne asociatívne a vzájomne distributívne operácie sčítania a násobenia (vlastnosti (i)-(iii));
- Rovnice  $x + a = 0$  a  $by = 1$  (pri  $b \neq 0$ ), majú práve jedno riešenie  $x = -a$  resp.  $y = b^{-1}$  (vlastnosti (iv)-(v));
- V  $\mathbf{R}$  máme lineárne usporiadanie  $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$  s obdobnými vlastnosťami ako v množine racionálnych čísiel.

**Intervaly na reálnej osi.** Ohraničené intervaly na reálnej osi sú podmnožiny  $\mathbf{R}$  zadané dvomi reálnymi číslami  $a \leq b$  ako:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\} \text{ – uzavretý interval ,}$$

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$  – zhora otvorený polouzavretý interval ,

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a < x \leq b\}$  – zdola otvorený polouzavretý interval ,

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$  – otvorený interval .

Okrem toho sa definujú zhora neohraničené intervaly:

$[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R}; x \leq a\}$  – zhora neohraničený uzavretý interval ,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R}; x \leq a\}$  – zhora neohraničený otvorený interval .

Zdola neohraničené intervaly  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R}; x \geq a\}$  a  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R}; x > a\}$  sú definované obdobne; nakoniec sa zvykne definovať neohraničený interval (zdola aj zhora)  $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ .

# Chapter 2

## Funkcie

Hovoríme, že  $f$  je *reálna funkcia* na podmnožine  $D_f \subset \mathbf{R}$  reálnej osi, ak každému  $x \in D_f$  je priradené reálne číslo  $f(x) \in \mathbf{R}$ . Píšeme,

$$f : D_f \rightarrow \mathbf{R} , \text{ alebo } x \in D_f \mapsto f(x) \in \mathbf{R} .$$

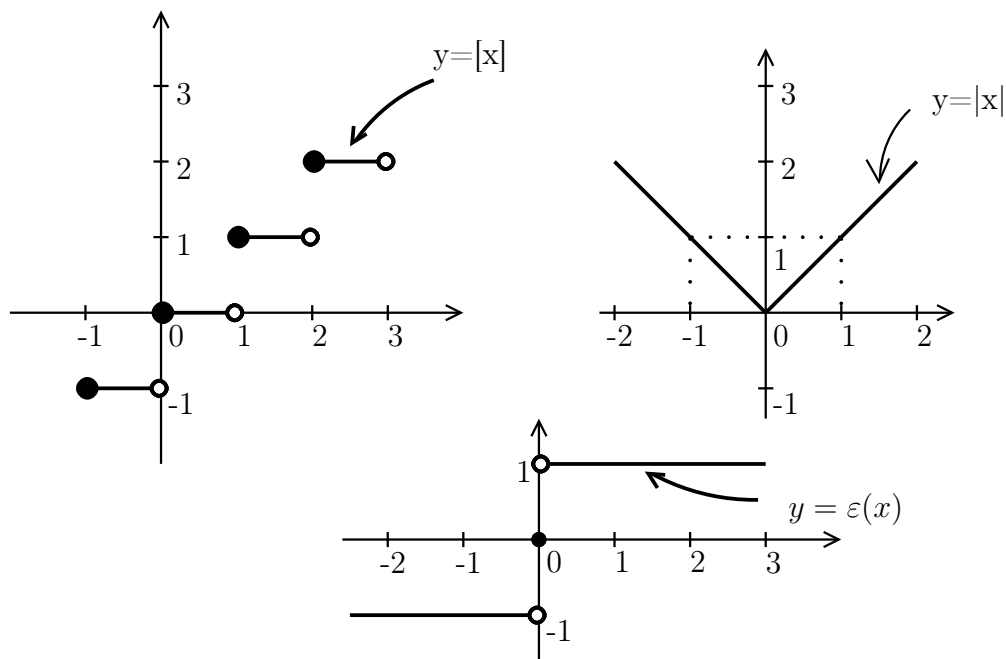
Množina  $D_f$  sa nazýva *definičný obor funkcie*  $f$  a množina  $R_f = \{y = f(x); x \in D_f\}$  sa nazýva *obor hodnôt funkcie*  $f$ .

**Graf funkcie.** V rovine (na papieri alebo tabuli) nakreslíme reálnu  $x$ -ovú os a jej počiatkom vedieme na ňu kolmú  $y$ -ovú os. Každý bod roviny bude takto charakterizovaný dvojicou reálnych čísiel  $[x; y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ .

Na  $x$ -ovej osi vyznačíme definičný obor a každému  $x \in D_f$  priradíme reálne číslo  $y = f(x)$  na  $y$ -ovej osi. Množina dvojíc bodov  $G_f = \{[x; f(x)] \in \mathbf{R}^2\}$  sa nazýva *graf funkcie*.

## Prehľad funkcií.

## Niektoré neelementárne funkcie.



Obr. 3 a,b,c

1. Celá časť čísla  $[x]$  je definovaná ako najväčšie celé číslo  $n \leq x$ , t.j. pre  $x \in [n, n + 1)$  je  $[x] = n$ . Napríklad, pre číslo  $x = A...B, D... \in \mathbf{R}$  máme  $[x] = A...B$ .

2. Absolútna hodnota  $|x|$  čísla  $x$  je definovaná takto:

$$|x| = x \text{ pre } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ pre } x \leq 0, \quad (2.1)$$

Ekvivalentne,  $|x| = \max\{x, -x\}$  (najväčšie z čísiel  $x$  a  $-x$ ).

3. Znamienková funkcia (*signum*  $x$ ) značieva sa ako  $\varepsilon(x)$  (alebo  $\operatorname{sgn}(x)$ ).

Je definovaná takto:

$$\varepsilon(x) = 1 \text{ pre } x > 0, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad \varepsilon(x) = -1 \text{ pre } x < 0. \quad (2.2)$$

Jednoducho s ňou súvisí Heavisideova funkcia  $\theta(x) = \frac{1}{2}[1 + \varepsilon(x)]$ . Grafy funkcií  $[x]$ ,  $|x|$  a  $\varepsilon(x)$  sú na Obr. 3.

\*4. Pre prirodzené  $n$  symbol  $n!$  (*n-faktoriál*) je definovaný takto:  $0! = 1$ ,  $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$ . Gamma funkcia  $\Gamma(x)$  je definovaná pomocou integrálu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}, \text{ pre } x > 0, \quad (2.3)$$

Možno ukázať, že pre prirodzené čísla platí  $\Gamma(n+1) = n!$ . Teda  $\Gamma(x)$  rozširuje faktoriál na všetky reálne kladné čísla. Čo sa za týmto skrýva dozvieme sa koncom semestra.

## Elementárne funkcie.

### Celočíselné mocniny a polynómy.

**Funkcia  $x^n$ ,  $n$  je prirodzené číslo.** Definičný obor funkcie je celá reálna os  $D = \mathbf{R}$ : pre všetky  $x \in \mathbf{R}$  kladieme  $x^0 \equiv 1$  ( $x^0$  je funkcia identicky rovná 1), kým pre prirodzené kladné číslo  $n$  kladieme

$$x^n = x \dots x, \text{ } n\text{-násobný súčin } x\text{-ov.} \quad (2.4)$$

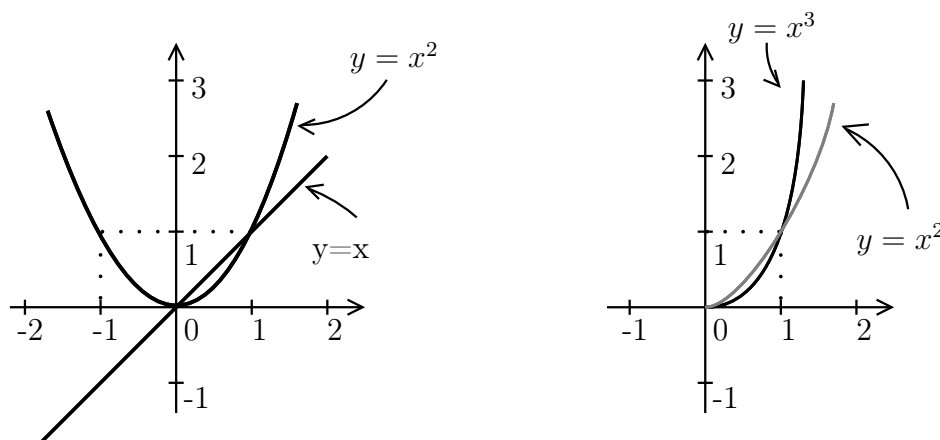
Funkcia  $x^n$  má nasledovné vlastnosti:

- Ak  $x \neq 0$  potom  $x^n \neq 0$ ,
- $x^n \cdot x^m = (x \dots x) \cdot (x \dots x) = x^{n+m}$  (v prvej zátvorke  $n$ -násobný a v druhej  $m$ -násobný súčin),
- $(x^n)^m = x^n \dots x^n = x^{nm}$  (v druhom kroku máme  $m$ -násobný súčin  $x^n$ ),
- $(xy)^n = x^n y^n$ ,
- *Binomický rozvoj*. Platí formula

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad (2.5)$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.6)$$



Obr. 4 a,b

Grafy funkcií  $y = f(x) = x$  a  $y = g(x) = x^2$  sú znázornené na Obr.4a: graf funkcie  $y = x$  je priamka prechádzajúca počiatkom, kým  $y = x^2$  je parabola v hornej polrovine prechádzajúca počiatkom symetrická okolo  $y$ -

ovej osi. Graf funkcie  $y = x^n$  pre  $x > 0$  je podobný grafu funkcie  $y = x^2$  (pozri Obr.4b, kde sú nakreslené grafy funkcií  $x^2$  a  $x^3$ ).

**Polynóm  $n$ -tého stupňa  $p(x)$ .** Je to funkcia na  $D = \mathbf{R}$  zadaná formulou

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2.7)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sú pevne dané reálne čísla, pričom  $a_n \neq 0$ .

**Funkcia  $x^{-n}$ .** Jej definičný obor tvoria všetky nenulové body na reálnej osi  $D = \{x \in \mathbf{R}; x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Je definovaná ako riešenie rovnice

$$y \cdot x^n = 1, \quad x \neq 0. \quad (2.8)$$

Pri  $x \neq 0$  vzťahy

$$x^n \neq 0, \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}, \quad (2.9)$$

platia pre ľubovoľné celočíselné mocniny. Špeciálne,  $x^{-n} = x^{-1} \dots x^{-1}$  je  $n$ -násobný súčin  $x^{-1}$ .

**Racionálna funkcia** je definovaná ako podiel dvoch (reálnych) polynómov

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.10)$$

$m$ -tého a  $n$ -tého stupňa:

$$p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2.11)$$

$$q(x) = x^n + \dots + b_1 x + b_0 \quad (2.12)$$

(bez ujmy obecnosti sme položili  $b_n = 1$ ). Aby sme určili definičný obor využijeme (bez dôkazu) tvrdenie z teórie algebraických rovníc, podľa ktorého

polynóm  $q(x)$  má nasledujúci rozklad:

$$q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_l) \cdot [(x - c_1)^2 + d_1^2] \dots [(x - c_k)^2 + d_k^2], \quad d_1 \neq 0, \dots, d_n \neq 0, \quad (2.13)$$

pričom  $n = l + 2k$  (môže byť  $l = 0$  alebo  $k = 0$ ). Čísla  $x_1, \dots, x_l \in \mathbf{R}$  sú práve reálne korene polynómu  $q(x)$ . Definičný obor racionálnej funkcie  $\frac{p(x)}{q(x)}$  tvoria všetky reálne čísla nerovnúce sa koreňom polynómu  $q(x)$ :  $D = \{x \in \mathbf{R}; x \neq x_1, \dots, x \neq x_l\}$ .

Pokiaľ, polynóm  $p(x)$  má nižší stupeň ako  $q(x)$  a  $q(x)$  má vyššie uvedené rozklad na koreňové faktory, tak racionálna funkcia  $p(x)/q(x)$  môže byť rozložená na parciálne zlomky takto:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_l}{x - x_l} \\ &+ \dots + \frac{\alpha_1 \cdot x + \beta_1}{(x - c_1)^2 + d_1^2} + \dots + \frac{\alpha_k \cdot x + \beta_k}{(x - c_k)^2 + d_k^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Túto formulu možno dokázať matematickou indukciou.

### Zložená a inverzná funkcia.

**Zložená funkcia.** Uvažujme dve reálne funkcie

$$f : D_f \rightarrow \mathbf{R}, \quad g : D_g \rightarrow \mathbf{R}, \quad (2.15)$$

pričom budeme predpokladať, že obor hodnôt funkcie  $f$  je podmnožinou definičného oboru funkcie  $g$ :

$$R_f = \{y = f(x); x \in D_f\} \subset D_g. \quad (2.16)$$

Ak  $R_f \subset D_g$ , má zmysel na  $D_f$  uvažovať zložené zobrazenie

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) ,$$

ktoré definuje *zloženú funkciu*  $g \circ f : D_f$  to  $\mathbf{R}$ :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in D_f . \quad (2.17)$$

*Poznámka:* Pokiaľ,  $R_f$  nie je podmnožinou  $D_g$ , niekedy pomôže zúžiť definičný obor  $D_f$  funkcie  $f$  na podmnožinu  $D'_f \subset D_f$ , tak aby  $R'_f = \{y = f(x); x \in D'_f\}$  už bolo podmnožinou  $D_g$ .

*Príklad 1.:* Nech  $f(x) = x^3 - 1$  a  $g(x) = x^2 + 2$ , potom zložená funkcia bude

$$(g \circ f)(x) = (x^3 - 1)^2 + 2 = x^6 - 2x^3 + 3 .$$

Pretože  $D_g = \mathbf{R}$ , definičný obor zloženej funkcie môže byť celá reálna os:  $D_{g \circ f} = \mathbf{R}$ .

*Príklad 2.:* Nech  $f(x) = 1 - x^2$  a  $g(x) = \sqrt{x}$ . Pretože  $D_g = [0, +\infty)$ , tak zložená funkcia

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2} ,$$

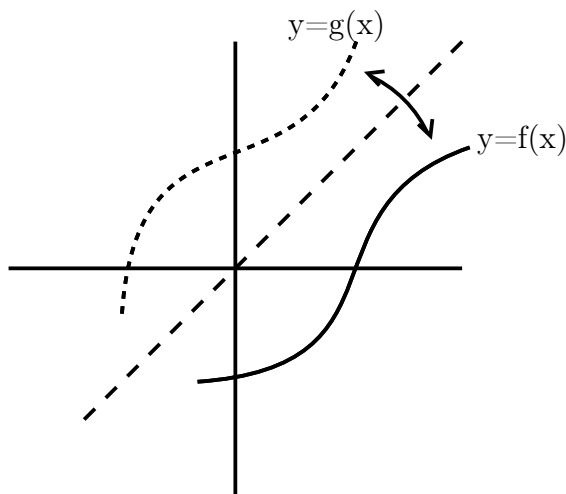
bude mať definičný obor  $D_{g \circ f} = [-1, +1]$ .

**Inverzná funkcia.** Hovoríme, že funkcia  $y = f(x)$  je *prostá* na podmnožine  $D' \subset D_f$ , ak pre jej dva ľubovoľné rôzne body  $x_1$  a  $x_2$  z  $D'$  sú rôzne ich obrazy  $f(x_1)$  a  $f(x_2)$ :

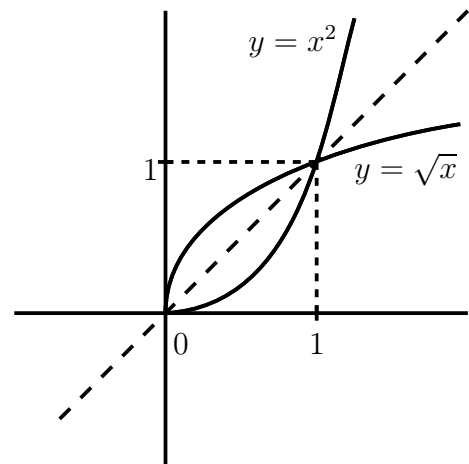
$$x_1, x_2 \in D', \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) .$$

Medzi  $x \in D'$  a  $y \in R' = \{y = f(x); x \in D'\}$  máme jedno-jednoznačné priradenie  $x \leftrightarrow y = f(x)$ : ku každému  $y \in R'$  najdeme práve jedno  $x \in D'$ , pre ktoré  $y = f(x)$ .

*Príklad:* Z grafov funkcie  $y = x$  a  $y = x^2$  vidíme, že funkcia  $y = x$  je prostá na  $\mathbf{R}$ , kým funkcia  $y = x^2$  je prostá na  $[0, +\infty]$  (alebo  $[-\infty, 0]$ ), ale nie je prostá na žiadnej väčšej podmnožine reálnej osi.



Graf funkcie  $g(x)$  inverznej k  $f(x)$



Graf funkcie  $y = x^2$   
a inverznej  $y = \sqrt{x}$

Obr. 5a,b

K funkcii  $y = f(x)$  prostej na množine  $D'$ , môžeme definovať na  $R' = \{y = f(x); x \in D'\}$  inverznú funkciu  $y = g(x)$ , ktorá má nasledujúcu vlastnosť:

$$\text{Bodu } x' = f(x) \in R' \text{ priraduje } g(x') = x. \quad (2.18)$$

Vo všeobecnosti medzi funkciou a k nej inverznou platí:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = x, \text{ pre } x \in D', \\(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = x, \text{ pre } x \in R'.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Grafom inverznej funkcie je množina bodov

$$G_g = \{[x'; g(x')] = [f(x); x]\},$$

t.j. oproti  $G_f$  je  $x$ -ová súradnicová os vymenená s  $y$ -ovou osou:  $G_g$  dostaneme z  $G_f$  tak, že graf  $G_f$  otočíme okolo priamky  $y = x$  (pozri Obr. 5a).

### Odmocnina.

Funkcia  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ( $n$ -á mocnina) je pre  $x \geq 0$  jednoznačne zobrazuje množinu  $D_f = [0; +\infty)$  na  $R_f = [0; +\infty)$  (pozri Obr. 5b). Preto existuje inverzná funkcia, ktorá sa nazýva  $n$ -tá odmocnina a značí sa ako  $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$  alebo  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  s definičným oborom  $D_g = [0; +\infty) = R_f$ . Teda platí:

$$\begin{aligned}(x^n)^{\frac{1}{n}} &= x \text{ pre } x \geq 0, \\(x^{\frac{1}{n}})^n &= x \text{ pre } x \geq 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

**Racionálna a reálna mocnina.** Keď už máme definovanú odmocninu  $x^{\frac{1}{n}}$ ,  $x \geq 0$ , tak môžeme vypočítať mocninu čísla  $x > 0$  na racionálne číslo  $r = m/n$  takto:

$$x^r = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.\tag{2.21}$$

Oba spôsoby výpočtu  $x^r$  dávajú rovnaký výsledok. Poznamenanajme, že pokiaľ exponent  $r > 0$ , tak uvedené formuly môžeme použiť aj pre  $x = 0$  (pritom  $0^r = 0$ ).

Pre racionálne mocniny platia vzťahy

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, (x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r, (x^r)^s = x^{rs}, \quad (2.22)$$

ktoré zovšeobecňujú analogické vzťahy platné pre celé čísla.

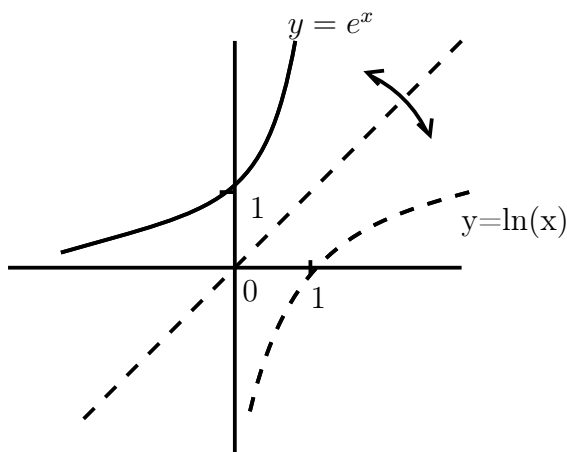
*Poznámka.* Pretože, reálne čísla možno ľubovoľne presne aproximovať racionálnymi číslami, tak pojem mocniny  $x^a$  kladného čísla  $x$  možno rozšíriť aj na reálne exponenty  $a \in \mathbf{R}$ . Formuly (2.22) pre  $x^a \cdot x^b$ ,  $(x \cdot y)^a$ ,  $(x^a)^b$  sú rovnaké ako pre racionálne exponenty. Presnejšia argumentácia vyžaduje pojem limity a bude uvedená neskôr.

### Exponenciálna funkcia a logaritmus.

*Exponenciálna funkcia.* V definícii reálnej mocniny  $x^a$  pre  $x > 0$  a  $a \in \mathbf{R}$ , vymeníme úlohy  $x$  a  $a$  a budeme uvažovať pri kladnom  $a > 0$  *exponenciálnu funkciu*  $a^x$  definovanú na celej číselnej osi  $x \in \mathbf{R}$ . Táto funkcia spĺňa nasledujúci vzťah (dôsledok prvej rovnice v (2.22)).

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad a > 0 \text{ pevne zvolené}, \quad (2.23)$$

ktorý platí pre ľubovoľné reálne čísla  $x$  a  $y$  (číslo  $a$  sa nazýva základom a číslo  $x$  exponentom).



Obr. 6

Medzi exponenciálnymi funkciami význačné postavenie má Eulerova exponenta zadaná nekonečným radom:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.24)$$

Neskôr ukážeme, že exponenciálny rad má definovaný súčet pre všetky  $x \in \mathbf{R}$ .

Jeho základom je Eulerova konštanta

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,718282\dots \quad (2.25)$$

Teraz sa formálne presvedčíme, že funkcia  $e^x$  spĺňa požadovanú rovnicu

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}. \quad (2.26)$$

Postupne máme:

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Na základe rovnice (2.26) tiež máme  $e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ , takže

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.27)$$

Funkcia  $e^x$  je rastúca a kladná na celej číselnej osi (jej graf je na Obr. 6):

(i) Pretože,  $x > y > 0$  implikuje  $x^n > y^n > 0$ , tak  $e^x$  je rastúca pre  $x > 0$ ,

(ii) pre  $x < 0$  to zase vyplýva zo vzťahu  $e^{-x} = 1/e^x$ .

Funkcia  $e^x$  nadobúda všetky kladné hodnoty: jej obor hodnôt je nevlastný interval  $(0, +\infty)$ .

**Logaritmus.** *Prirodzený logaritmus*  $\ln x$  je definovaný ako funkcia inverzná k  $e^x$ . Teda, funkcia  $\ln x$  je definovaná pre  $x > 0$ , pričom:

$$\ln e^x = x, \quad x - \text{reálne},$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x - \text{reálne a kladné}. \quad (2.28)$$

Na celom svojom definičnom obore logaritmus je rastúca funkcia (pozri Obr. 6). Ďalej platí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^a) = a \cdot \ln x. \quad (2.29)$$

Teraz už ľahko vyjadríme ľubovoľnú exponenciálnu funkciu  $a^x$  pomocou Eulerovej exponenty

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}. \quad (2.30)$$

Vidíme, že k tomu aby sme vypočítali  $a^x$  stačí dosadiť do vzorca pre  $e^y$  preškálovaný argument  $y = x \cdot \ln a$ . Poznamejme ešte že, pre reálnu mocninu platí  $x^a = e^{a \cdot \ln x}$ .

*Poznámka 1.* Logaritmickej funkcia redukuje násobenie dvoch reálnych čísel  $a$  a  $b$  na sčítanie ich logaritmov  $\ln a$  a  $\ln b$  (podstata logaritmickej pravítka):

$$a \cdot b = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}.$$

## Komplexné čísla

Teleso reálnych čísel  $\mathbf{R}$  rozšírime o nový matematický objekt o *imaginárnu jednotku*  $i$ : jej sčítanie s reálnym číslom a násobenie reálnym číslom definujeme tak, že pre všetky reálne čísla  $a, b$  platí

$$i + a = a + i, (i + a) + b = i + a(+b), i + 0 = i, \quad (2.31)$$

$$i \cdot a = a \cdot i, (i \cdot a) \cdot b = i \cdot a(\cdot b), i \cdot 1 = i, \quad (2.32)$$

$$a(+b) \cdot i = a \cdot i + b \cdot i, i^2 = -1. \quad (2.33)$$

Posledný vzťah  $i^2 = -1$  definuje násobenie imaginárnej jednotky samej so sebou a podstatne ju odlišuje od reálnych čísel (pre ktoré vždy platí  $a^2 \geq 0$ ).

*Definícia:* Množinu komplexných čísel  $\mathbf{C}$  tvoria čísla tvaru

$$c = a + b \cdot i, \quad a, b - \text{reálne čísla.}$$

V tejto formuli *imaginárna jednotka*  $i$  má vlastnosti (2.31)-(2.33). Súčet  $c + c'$  a súčin  $c \cdot c'$  dvoch komplexných čísel  $c = a + b \cdot i$  a  $c' = a' + b' \cdot i$  sú definované vzťahmi:

$$c + c' = (a + a') + (b + b') \cdot i,$$

$$c \cdot c' = (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b).i.$$

*Poznámky:*

1) Ku každému komplexnému číslu  $c = a + b.i$  definujeme *komplexne združené číslo*  $\bar{c} = a - b.i$ . Reálne čísla

$$\operatorname{Re} c := \frac{1}{2}(\bar{c} + c) = a,$$

$$\operatorname{Im} c := \frac{i}{2}(\bar{c} - c) = b,$$

nazývajú sa *reálnou časťou* a *imaginárnou časťou* komplexného čísla. Komplexné čísla, s nulovou imaginárnou časťou, pre ktoré  $c = \bar{c} = a$ , identifikujeme s reálnymi číslami.

2) *Absolútna hodnota (modul)* komplexného čísla  $c = a + b.i$  je definovaná ako nezaporné reálne číslo zadané vzťahom:

$$|c| = \sqrt{c.\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Komplexné číslo  $c = 0$  práve vtedy ak  $|c| = 0$ , t.j.  $\operatorname{Re} c = a = 0$  a súčasne  $\operatorname{Im} c = b = 0$ .

3) Ku každému komplexnému číslu  $c = a + b.i$  existuje práve jedno *zoporné číslo*  $-c = (-a) + (-b).i = -a - b.i$ , pre ktoré platí  $c + (-c) = c - c = 0$ . Pre každé komplexné číslo  $c = a + b.i \neq 0$  existuje práve jedno

*inverzné číslo*

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{|c|^2} = \frac{a - b.i}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i,$$

pre ktoré platí  $c \cdot c^{-1} = 1$ .

4) Na základe tohto jednoducho sa možno presvedčiť, že komplexné čísla  $\mathbf{C}$  tvoria *teleso*, podobne ako ho tvoria racionálne čísla  $\mathbf{Q}$  a reálne čísla  $\mathbf{R}$ :

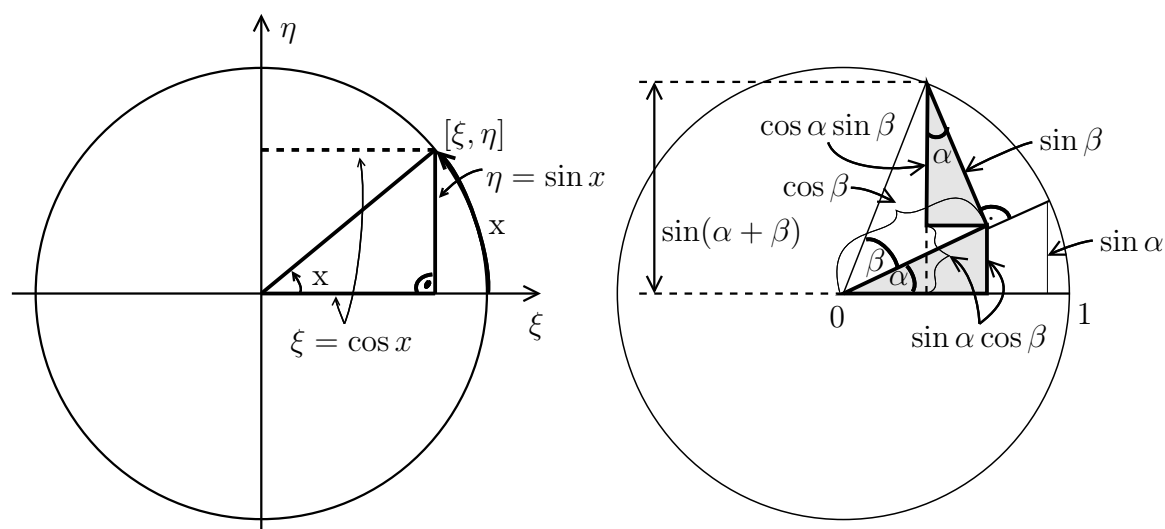
- operácie sčítania a násobenia komplexných čísiel sú *komutatívne* a *asociatívne*, a tiež vzájomne *distributívne*,
- ku každému komplexnému číslu existuje *zaporné číslo* a ku každému komplexnému číslu rôznemu od 0 existuje *inverzné číslo*.
- Komplexné čísla, na rozdiel od racionálnych a reálnych čísiel, nemožno prirodzene lineárne usporiadať.

5) Každé komplexné číslo  $z = x + y.i \in \mathbf{C}$  možno identifikovať s bodom  $[x; y]$  v rovine reálnych čísiel  $\mathbf{R}^2$ :

- Na vodorovnú  $x$ -ovú os v rovine nanášame reálnu časť komplexného čísla, na kolmú  $y$ -ovú os nanášame jeho imaginárnu časť. Komplexnému číslu  $z = 0$  odpovedá počiatok v rovine.
- Komplexné číslo  $z = x + y.i$  môžeme tiež identifikovať s vektorom ("šípkou")  $\mathbf{z}$  v rovine  $\mathbf{R}^2$  s koncovým bodom  $[x; y]$ , ktorá vychádza z počiatku. Vektor  $\mathbf{z}$  odpovedajúci  $z$  má dĺžku  $|z|$  a zvierá s  $x$ -vou osou uhol  $\zeta$  zadaný formulou  $\text{tg } \zeta = \frac{y}{x}$  (podrobnejšie si to všimneme neskôr).
- Pri znázornení pomocou vektorov v rovine, súčtu komplexných čísiel  $c$  a  $z$  odpovedá súčet vektorov  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{z}$ . Ak komplexné číslo  $z$  násobíme kom-

plexným číslom  $c$ , tak súčinu  $c \cdot z$  odpovedá vektor dĺžky  $|c| \cdot |z|$ , ktorý zvierá s  $x$ -vou osou uhol  $\gamma + \zeta$  ( $\zeta$  a  $\gamma$  označujú uhly, ktoré s  $x$ -ovou osou zvierajú vektory  $c$  a  $z$ ).

### Goniometrické funkcie.



Obr. 7a,b

Uvažujme v rovine  $\mathbf{R}^2$  (s navzájom kolmými číselnými osami  $\xi$  a  $\eta$ ) kružnicu  $C$  o polomere 1. Body na  $C$  parametrizujeme uhlom, ktorý nanášame od bodu  $(1; 0)$  na kružnicu v kladnom smere (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Uhly zadávame v radiánoch:  $180^\circ = \pi$ , kde  $\pi = 3,141592\dots$  je Ludolfovo číslo, t.j.  $1^\circ = \pi/180$  (špeciálne  $90^\circ = \pi/2$ ).

Podľa definície goniometrických funkcií z pravouhlého trojuholníka vyz-

načeneného na Obr. 7a máme

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{\text{protiľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \eta , \\ \cos x &= \frac{\text{priľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \xi .\end{aligned}\tag{2.34}$$

Z obrázku vidno, že funkcie  $\sin x$  a  $\cos x$  nadobúdajú špeciálne hodnoty

$$\begin{aligned}\sin 0 &= 0 , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 , \\ \cos 0 &= 1 , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .\end{aligned}\tag{2.35}$$

Tiež jednoducho možno ukázať, že platia súčtové (presnejšie, rozdielové) vzorce

$$\begin{aligned}\sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y , \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y .\end{aligned}\tag{2.36}$$

Dôkaz týchto vzorcov je naznačený na Obr. 7b. Zo špeciálnych hodnôt (2.35) a súčtových vzorcov (2.36) plynú všetky formulky pre goniometrické funkcie. Zhrňme tie základné:

(i) Ak v súčtových vzorcoch položíme  $x = 0$ , získame nepárnosť funkcie sinus a párnosť funkcie cosinus:

$$\sin(-y) = -\sin y , \quad \cos(-y) = \cos y ,\tag{2.37}$$

(ii) Ak v súčtových vzorcoch položíme  $y = -x$ , obdržíme známu rovnicu (*Pytagorova veta* pre trojuholník s jednotkovou preponou):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ,\tag{2.38}$$

(iii) Ak položíme  $x = \frac{\pi}{2}$  a využijeme (i) dostaneme základný vzťah medzi funkciami sinus a cosinus:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y, \quad (2.39)$$

(iv) Ak v súčtových vzorcoch položíme  $y = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  a použijeme ich dvakrát dostaneme zmenu znamienka funkcií sinus a cosinus pri zmene argumentu o  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x, \end{aligned} \quad (2.40)$$

(v) Nakoniec, ak predchádzajúci vzťah aplikujeme dvakrát dostaneme periodičnosť funkcií sinus a cosinus pri zmene argumentu o  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x + \pi + \pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x + \pi + \pi) = -\cos(x + \pi) = \cos x. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Okrem goniometrických funkcií  $\sin x$  a  $\cos x$  zavádzajú sa aj ďalšie:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{definovaná pre } x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{definovaná pre } x \neq 0, \pm\pi, \dots \end{aligned} \quad (2.42)$$

Z ich definičných oborov sme museli vynať body na číselnej osi, v ktorých  $\cos x = 0$  resp.  $\sin x = 0$ . Ich základné vlastnosti plynú ľahko z formuliek funkcie  $\sin x$  a  $\cos x$ , ktoré sú uvedené vyššie. Napríklad, funkcie  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  sú periodické s periódou  $\pi$ :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x. \quad (2.43)$$

Úplne podobne možno odvodiť zo súčtových vzorcov rôzne ďalšie vzťahy medzi goniometrickými funkciami.

*Poznámka:* Uvažujme funkciu

$$E(x) = \cos x + i \sin x.$$

Použitím súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie dostaneme

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) = E(x + y). \end{aligned}$$

Teda funkcia  $E(x)$  je exponenta, ktorú možno vyjadriť pomocou Eulerovej exponenciálnej funkcie. Platia dôležité *Moirveove* vzorce

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Obrátené *Moirveove* vzťahy sú

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Teraz pomocou rozvojev (2.24) a (2.27) pre funkcie  $e^x$  a  $e^{-x}$  dostaneme dôležité rozvoje pre goniometrické funkcie  $\cos x$  a  $\sin x$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.44)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.45)$$

**Cyklometrické funkcie.**

Cyklometrické funkcie sú funkcie inverzné ku goniometrickým. Funkcie  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  sú monotónne (rastúce alebo klesajúce na vhodných intervaloch dĺžky  $\pi$ ). Ich štandardná voľba je nasledovná:

(i) Funkcia  $\sin x$  je rastúca na intervale  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ , pričom jej obor hodnôt je interval  $(-1, +1)$ . Funkcia  $\arcsin x$ , inverzná k  $\sin x$  je určená vzťahmi (pozri Obr. 8a, funkcia  $\sin x$  je vyznačená plnou čiarou a funkcia  $\arcsin x$  čiarkovane):

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{pre } x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}),$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{pre } x \in (-1, +1).$$

Podobne, funkcia  $\operatorname{tg} x$  je rastúca na intervale  $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ , jej obor hodnôt je interval  $(-\infty, +\infty)$ . Inverzná funkcia  $\operatorname{arctg} x$  spĺňa vzťahy (pozri Obr. 8b, funkcia  $\operatorname{tg} x$  je vyznačená plnou čiarou a funkcia  $\operatorname{arctg} x$  čiarkovane):

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}),$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(ii)  $\cos x$  a  $\operatorname{cotg} x$  sú klesajúce na intervale  $(0, \pi)$ . Ich obory hodnôt sú  $(-1, +1)$  resp.  $(-\infty, +\infty)$ . Vďaka reláciám

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$$

príslušné inverzné funkcie sú dané vzťahmi:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad x \in (-1, +1),$$

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

*Základné vzťahy pre cyklometrické funkcie:*

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \pi - \operatorname{arccotg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

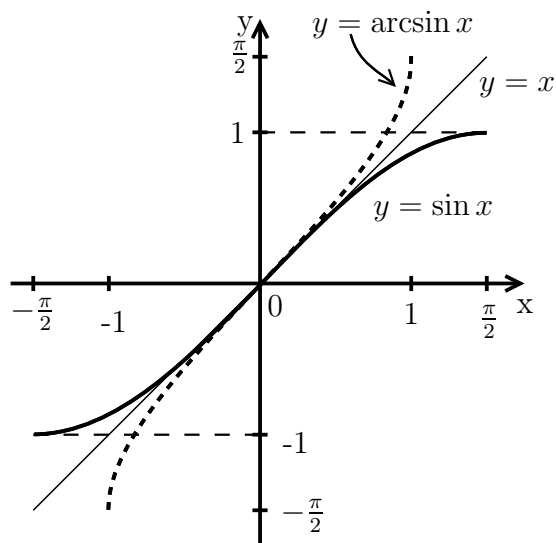
Tieto vzťahy plynú ľahko zo známych relácií medzi goniometrickými funkciami. Ako ilustráciu overíme vzťah

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

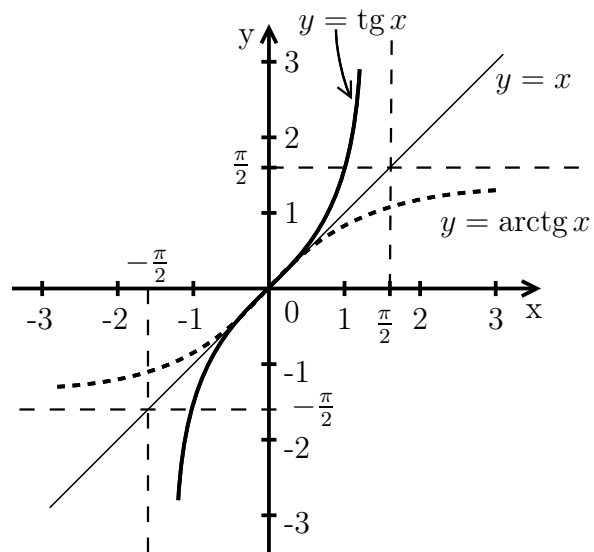
Ak dosadíme na ľavej strane  $x = \sin t$ , postupne dostaneme

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t.$$

Toto je presne to, čo sa získa pri dosadení do pravej strany:  $\arcsin(\sin t) = t$ .



Graf funkcie  $y = \sin x$   
a k nej inverznej  $y = \arcsin x$



Graf funkcie  $y = \operatorname{tg} x$   
a k nej inverznej  $y = \operatorname{arctg} x$

Obr. 8 a,b

# Chapter 3

## Limita číselnej postupnosti, rady

**Číselná postupnosť.** Číselná postupnosť  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty} \equiv \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$  je funkcia definovaná na podmnožine prirodzených čísiel  $\{m, m+1, m+2, \dots\}$ , ktorá priraďuje každému číslu  $n$  z tejto podmnožiny reálne číslo  $a_n$ :

$$n \in \{m, m+1, m+2, \dots\} \mapsto a_n \in \mathbf{R}. \quad (3.1)$$

*Poznámka:* Zväčša sa uvažujú prípady  $m = 1$  (alebo  $m = 0$ ). Nie je to podstatné, lebo ak položíme  $a'_n = a_{n+m}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , máme jednoznačné priradenie medzi postupnosťou  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  a postupnosťou  $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$  (alebo  $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$ ).

**Monotónne a ohraničené postupnosti.** Postupnosť  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  je

- *rastúca* ak pre všetky členy postupnosti platí  $a_n < a_{n+1}$ ,
- *klesajúca* ak pre všetky členy postupnosti platí  $a_n > a_{n+1}$ ,
- *neklesajúca* ak pre všetky členy postupnosti platí  $a_n \leq a_{n+1}$ ,

- *nerastúca* ak pre všetky členy postupnosti platí  $a_n \geq a_{n+1}$ ,
- *ohraničená zdola* resp. *ohraničená zhora* ak existuje také číslo  $K$ , že pre všetky členy postupnosti platí  $a_n > K$  resp.  $a_n < K$ ,
- *ohraničená* ak je ohraničená zdola aj zhora; vtedy existuje kladné číslo  $K$ , že pre jej všetky členy platí  $|a_n| < K$ .

*Niekoľko príkladov:*

$$1) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, \dots\} \text{ alebo } a_n = n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$2) \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots\}, \text{ alebo } a_n = 3 \cdot (-\frac{1}{2})^n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$3) \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, \dots\}, \text{ alebo } a_n = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$4) a_n = \frac{1}{n} \text{ alebo } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, n = 1, 2, \dots,$$

$$5) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -2, 3, -4, \dots\}, \text{ alebo } a_n = (-1)^{n-1}n, n = 1, 2, \dots$$

*Poznámka.* Postupnosť 1. je rastúca, 4. je klesajúca, postupnosti 1. a 5. sú neohraničené, kým postupnosti 2., 3. a 4. sú ohraničené.

## Limita číselnej postupnosti.

**Vlastná limita.** Ak existuje k danej postupnosti  $\{a_n \dots\}_{n=m}^{\infty}$  číslo  $a \in \mathbf{R}$ , ku ktorému čísla  $a_n$  s rastúcim  $n$  sa ľubovoľne približujú, vtedy číslo  $a$  nazývame limitou postupnosti  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  a značíme

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n . \quad (3.2)$$

*Definícia* (presné znenie). Hovoríme, že číslo  $a \in \mathbf{R}$  je (vlastnou) limitou postupnosti  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$

ak pre každé kladné číslo  $\varepsilon > 0$  existuje také prirodzené číslo, že pre každé prirodzené číslo  $n > n_0$  platí

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon . \quad (3.3)$$

Objasníme si bližšie, čo znamená táto presná definícia:

(i) Ak zvolíme  $\varepsilon = 10^{-k}$ , potom nerovnosti (3.3) nám hovoria, že všetky členy postupnosti  $a_n$  s  $n > n_0$  majú rovnaký dekadický rozvoj ako  $a$  aspoň do  $k$ -teho miesta za desatinnou čiarkou;

(ii) Geometrický si môžeme nerovnosti (3.3) predstaviť takto. Uvažujme graf funkcie  $n \mapsto a_n$ . Nerovnosti (3.3) nám zaručujú, že pre  $n > n_0$  hodnoty  $a_n$  sú v  $\pm\varepsilon$  páse okolo priamky  $y = a$  rovnobežnej s  $x$ -ovou osou, pozri Obr. 9a.

**Nevlastná limita.** Ak členy postupnosti  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  pri rastúcom  $n$  neohraničene rastú (resp. klesajú), tak hovoríme, že postupnosť má nevlastnú limitu  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), pozri Obr. 9b. Toto označujeme symbolom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty . \quad (3.4)$$

*Definícia* (presné znenie). Hovoríme, postupnosť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  má nevlastnú limitu  $+\infty$  resp.  $-\infty$

ak pre každé kladné číslo  $K > 0$  existuje také prirodzené číslo, že pre všetky prirodzené čísla  $n > n_0$  platí

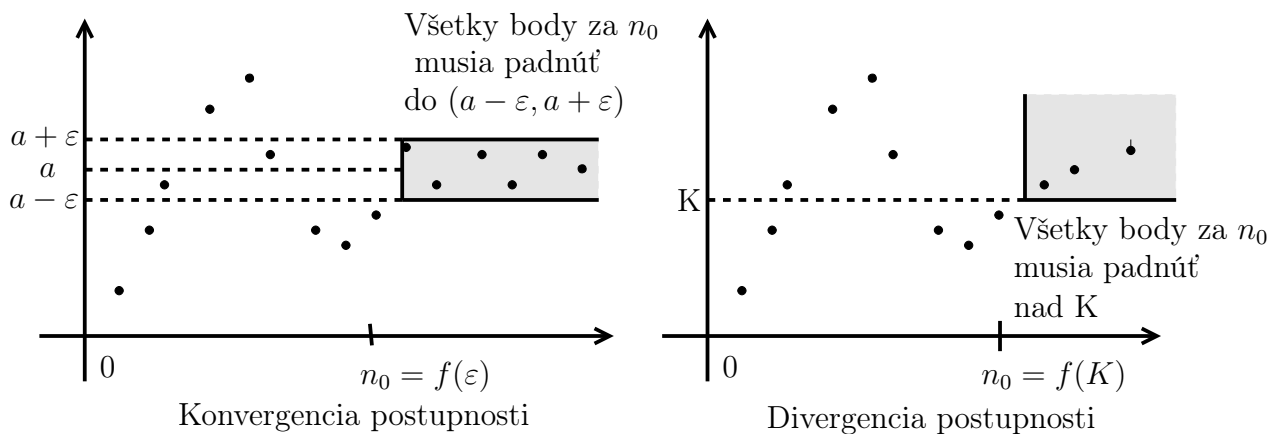
$$a_n > +K \text{ resp. } a_n < -K . \quad (3.5)$$

### Základné vety o limitách postupností.

1. Postupnosť môže mať najviac 1 limitu. Ak postupnosť  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  má limitu, potom rovnakú limitu má aj jej každá podpostupnosť  $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$ , kde  $a'_n = a_{i_n}$  a  $m \leq i_1 < i_2 < \dots$ , je rastúca postupnosť prirodzených čísiel.

2. Postupnosť, ktorá má vlastnú limitu je ohraničená; ak má nevlastnú limitu  $+\infty$  resp.  $-\infty$ , tak nie je ohraničená zhora resp. zdola.

3. Ohraničená rastúca resp. klesajúca postupnosť má vlastnú limitu, pričom  $a_n \leq a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  resp.  $a_n \geq a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (podľa toho či postupnosť je rastúca resp. klesajúca).



Obr. 9a,b

4. Neohraničená rastúca resp. klesajúca postupnosť má nevlastnú limitu  $+\infty$  resp.  $-\infty$ .

5. Ak existujú vlastné limity  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  a  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  postupností  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ , potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\text{Ak } b \neq 0 \text{ potom } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

6. Ak existuje vlastná limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  a nevlastná limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ .

Ak  $a \neq 0$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \pm\infty$  (podľa znamienka  $a$ ).

7. Ak  $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$  je postupnosť kladných resp. záporných čísiel, pre ktorú  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a_n) = +\infty$  resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a_n) = -\infty$ .

Ak  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ , potom  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/a_n) = 0$ .

Niektoré dôležité limity.

Nech  $a$  je reálne kladné číslo, potom

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-a} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-a} \ln n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n!} = 0.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty, \quad \text{pre } a > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1, \quad \text{pre } a = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad \text{pre } a < 1.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718282\dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = 0,36790\dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)^n = C = 0,57722\dots$$

( $e$  = Eulerove číslo,  $C$  = Eulerova konštanta).

## Číselné rady.

**Definícia:** Výraz tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv a_0 + a_1 + \dots ,$$

kde  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  tvoria číselnú postupnosť, nazývame *číselným radom*;  $a_n$  sa nazýva  $n$ -tým členom číselného radu a čísla

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

čiatočnými súčtami. Rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  *konverguje* ak existuje limita

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \quad (3.6)$$

Posledné značenie nie je dôsledné, ale bežne sa používa: symbol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  označuje jednak rad ako objekt a zároveň aj jeho súčet (jeho okamžitý význam obyčajne vyplynie z kontextu).

Ak limita (3.6) neexistuje, rad *diverguje* (to značí, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  buď neexistuje alebo existuje nevlastná limita  $\pm\infty$ ).

### Príklady radov.

1. Konvergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

2. Divergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

3. Divergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 + \dots$$

4. Divergentný harmonický rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

5. Konvergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

### Základné vety o konvergencii radov.

1. Na konvergenciu alebo divergenciu radu nemá vplyv vynechanie alebo pridanie niekoľkých členov na začiatku radu.

2. Ak vynásobíme členy konvergentného radu tým istým číslom  $c$  dostaneme opäť konvergentný rad, pričom

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

3. Konvergentné rady môžeme po členoch sčítat a sčítat. Ak existujú

$$S_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n , S_b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

potom existuje

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b .$$

4. *Nutná podmienka konverencie.* Ak rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Táto podmienka ale *nie je* postačujúca (pozri príklad s harmonickým radom).

5. *Rad s alternujúcimi znamienkami.* Ak  $a_n > 0$  pre  $n \in \mathbf{N}$ , potom  $S_a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  nazývame radom s alternujúcimi znamienkami.

*Leibnizovo kritérium.* Rad s alternujúcimi znamienkami konverguje ak

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots \text{ a existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

### Absolútna konvergencia.

V prípade ak rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  má členy s rôznymi znamienkami (ktoré nemusia byť alternujúce), je výhodné skúmať rad  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  s kladnými členmi. Možno ukázať, že ak konverguje rad  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ , tak konverguje aj rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (naopak to neplatí).

*Definícia:* Hovoríme, že rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  *absolútne konverguje* ak konverguje rad  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ . Hovoríme, že rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje *neabsolútne*, ak je konvergentný, ale rad  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  diverguje.

### Vlastnosti absolútne konvergentných radov.

1. V absolútne konvergentnom rade môžeme poradie jeho členov ľubovoľne

mení - jeho súčet sa nemení.

*Poznámka:* V neabsolútne konvergentnom rade môžeme jeho členy usporiadať tak, že jeho súčet bude rovnáť ľubovoľnému číslu (Riemannova veta).

2. Absolútne konvergentné rady  $S_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a  $S_b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  môžeme po členoch násobiť:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) \\ &= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \dots = S_a \cdot S_b \end{aligned}$$

3. *Jednoduché kritérium konvergencie.* Rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolútne konverguje, ak existuje kladné číslo  $q < 1$  a kladné číslo  $A$ , tak že pre všetky  $n$  platí odhad:

$$|a_n| \leq Aq^n.$$

4. *D'Alembertove a Cauchyho kritéria konvergencie.* Nech pre rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  existuje niektorá z limít:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \text{ D'Alembertovo kritérium,}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \text{ Cauchyho kritérium.}$$

Ak  $\rho < 1$  potom rad absolútne konverguje, ak  $\rho > 1$  rad diverguje. Pri  $\rho = 1$  rad môže, ale nemusí, konvergovať.

*Príklady.* Vyšetrite konvergenciu uvedených radov:

1. Rad  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  konverguje, lebo

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}.$$

2. Harmonický rad  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverguje.

Tvrdenie dokážeme sporom. Budeme predpokladať, že existuje konečný súčet  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Potom existujú konečný súčet jeho párnych členov

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}S,$$

ako aj nepárnych členov

$$S'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}S.$$

Pretože,  $S = S' + S''$  prídeme ku sporu:

$$S = S' + S'' > \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S.$$

3. Rad  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$  diverguje, lebo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

*Poznámka.* V posledných dvoch príkladoch D'Alembertove alebo Cauchyho kritérium dáva  $\rho = 1$  a neurčuje konvergenciu alebo divergenciu uvažovaných radov.

### Súčty niektorých číselných radov.

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots = \frac{1}{e}$$

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots = \frac{2}{3}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots = 1$$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots = \frac{1}{1.2}$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots = \frac{3}{4}$$

8.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

9.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

*Komentár k príkladom*

(i) *Príklady 1 a 2.* Pre rad  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

Tento rad (absolútne) konverguje pre ľubovoľné  $x$ . Pre  $x = 1$  máme príklad 1, pre  $x = -1$  príklad 2.

(ii) *Príklady 3 a 4.* Jedná sa o geometrický rad  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  s  $q = \frac{1}{2}$  resp.  $q = -\frac{1}{2}$ . V oboch prípadoch máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|q|^n} = |q| = \frac{1}{2}.$$

Geometrický rad môžeme sčítať takto. Označme

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Potom

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ &= S_n + q^{n+1} = 1 + qS_n. \end{aligned}$$

Z posledného riadka dostávame

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Zrejme,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Stačí sem dosadiť  $q = \frac{1}{2}$  resp.  $q = -\frac{1}{2}$ .

(iii) *Príklady 5 až 7.* V príklade 5 zapíšeme člen radu takto:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Potom,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 1.$$

V príklade 6 zapíšeme

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

a použijeme rovnaký postup:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right) = \frac{1}{2}.$$

Číselný rad v príklade 7 je súčtom oboch predchádzajúcich radov:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} \dots \\ &= \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(iv) *Príklady 8 až 10.* Konvergenciu radov určíme odhadom súčtov zhora:

$$\text{Rad 8 : } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$< \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \underline{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \underline{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} \dots = 1.$$

Tu sme pri odhade pridali podčiarknuté kladné členy. V príklade 9 postupujeme obdobne:

$$\text{Rad 9 : } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$< \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \underline{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \underline{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)} \dots = 1 ,$$

kde sme opäť pridali podčiarknuté kladné členy. Nakoniec rad 10 odhadneme pomocou radu z príkladu 5:

$$\text{Rad 10 : } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots = 2 .$$

V prípade alternujúcich znamienok možno využiť aj Leibnizovo kritérium.



# Chapter 4

## Limita funkcie, spojitosť a derivácia

### Limita funkcie

Nech funkcia  $f(x)$  je definovaná v  $\delta$ -okolí bodu  $x = a$

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R}; 0 < |x - a| < \delta\}. \quad (4.1)$$

V samotnom bode  $a$  pritom funkcia  $f(x)$  nemusí byť definovaná. Do  $U_\delta(a)$  patria reálne čísla, pre ktoré platí:  $x \neq a$  a  $a - \delta < x < a + \delta$ .

Hovoríme, že funkcia  $y = f(x)$  definovaná v okolí bodu  $a$  má v tomto bode limitu

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ak s približovaním sa  $x$  k číslu  $a$ , hodnoty funkcie  $f(x)$  sa ľubovoľne približujú k číslu  $c$ . Geometrická interpretácia limity funkcie je naznačená na Obr. 10a.

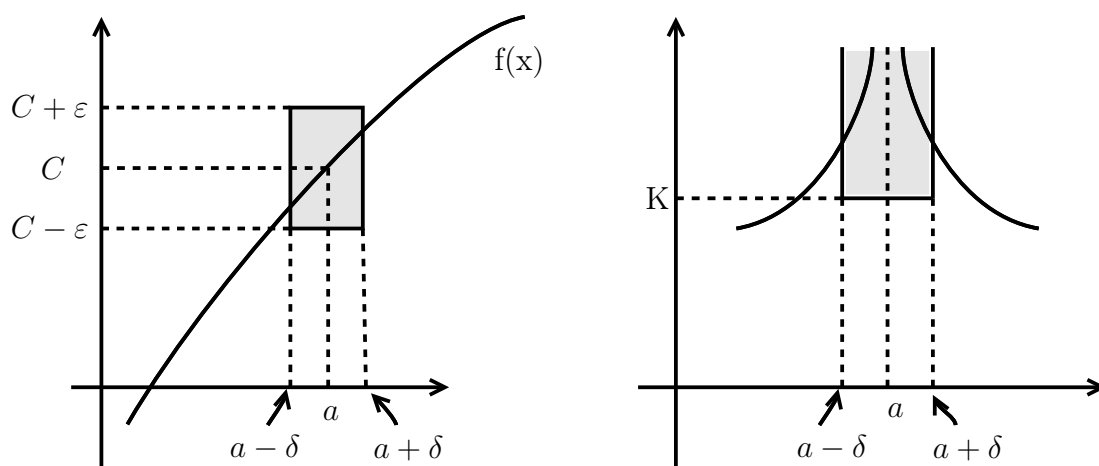
*Definícia* (presné znenie): Funkcia  $f(x)$  má v bode  $x = a$  limitu rovnajúcu sa číslu  $c$ :

ak pre každé kladné číslo  $\varepsilon > 0$  existuje také číslo  $\delta > 0$ , že pre všetky  $x$  splňajúce nerovnosti

$$0 < |x - a| < \delta,$$

platí

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \quad (4.2)$$



Obr. 10a,b

### Nevlastná limita funkcie

Hovoríme, že funkcia  $f(x)$  v bode  $x = a$  má nevlastnú limitu  $+\infty$  resp.  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

ak funkcia neobmedzene rastie resp. klesá pri približovaní sa  $x$  k bodu  $a$ . Geometrická interpretácia nevlastnej limity  $+\infty$  funkcie  $f(x)$  je naznačená na Obr. 10b.

*Definícia* (presné znenie): Funkcia  $f(x)$  má v bode  $x = a$  limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

ak k ľubovoľnému číslu  $K > 0$  existuje také číslo  $\delta > 0$ , že pre všetky  $x$  splňajúce nerovnosti

$$0 < |x - a| < \delta,$$

platí  $f(x) > K$  resp.  $f(x) < -K$ .

*Poznámka 1* (dôležitá): Funkcia má v bode  $x = a$  (vlastnú alebo nevlastnú) limitu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  práve vtedy, ak pre ľubovoľnú číselnú postupnosť bodov  $\{x_1, x_2, \dots\}$  z okolia bodu  $a$ , ktorá má limitu  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , príslušná postupnosť hodnôt funkcie  $\{f(x)_1, f(x)_2, \dots\}$  má konverguje k  $c$ , t.j.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

### Limita funkcie v nevlastných bodoch

Číslo  $c$  je limitou funkcie  $f(x)$  pre  $x \rightarrow \pm\infty$ , čiže

$$c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{resp.} \quad c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

ak pre ľubovoľné číslo  $\varepsilon > 0$  existuje také číslo  $K > 0$ , že

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon \text{ pre všetky } x > K \text{ resp. } x < -K. \quad (4.3)$$

Nevlastná limita v nevlastných bodoch je definovaná obdobne:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty,$$

ak pre ľubovoľné číslo  $K > 0$  existuje také číslo  $N > 0$ , že pre všetky  $x$  spĺňajúce nerovnosti  $x > N$ , resp.  $x < -N$  platí

$$f(x) > K \text{ v prípade, že limita je } +\infty,$$

$$f(x) < -K \text{ v prípade, že limita je } -\infty.$$

*Poznámka 2* (analog predchádzajúcej poznámky 1): Pokiaľ existuje (vlastná alebo nevlastná) limitu  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$ , potom pre každú postupnosť bodov  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , ktorá má odpovedajúcu limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ , platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

### Základné vety o limitách funkcií

Nasledujúce tvrdenia sú priamym dôsledkom Poznámok 1 a 2 spolu s analogickými tvrdeniami o limitách postupností:

1) *Limita súčtu a súčinu funkcií.* Ak existujú vlastné limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  potom existujú limity

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right).\end{aligned}\quad (4.4)$$

2) *Limita podielu funkcií.* Ak existujú vlastné limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

potom existuje limita podielu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.\quad (4.5)$$

3) Ak v okolí bodu  $x = a$  o funkcii  $f(x)$  platí  $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  a ak

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = c \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = c\quad (4.6)$$

potom aj  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .

4) Ak existuje vlastná limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a nevlastná limita  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  potom existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \pm\infty.$$

Ak navyše  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ , potom

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \pm\infty.$$

Znamienko poslednej limity je určené znamienkami  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

5) Ak existuje také kladné číslo  $K$ , že  $|f(x)| < K$  v okolí bodu  $a$ , hovoríme, že funkcia  $f(x)$  je ohraničená v okolí bodu  $a$ .

Ak existuje nevlastná limita  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  a funkcia  $f(x)$  je ohraničená v okolí bodu  $a$  potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

### Niektoré dôležité limity

Uveďme dve dôležité limity, ktoré budeme využívať pri výpočte limit rôznych výrazov:

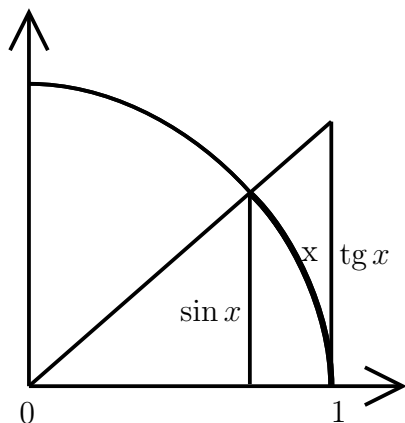
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (4.7)$$

Prvá je zovšeobecnením analogickej limity pre číselné postupnosti (v ktorej celočíselná premenná  $n$  sa nahradila reálnou premennou  $x$ ). Odvodenie druhej je naznačené na Obr. 11, z ktorého pre  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  možno dedukovať nerovnosti

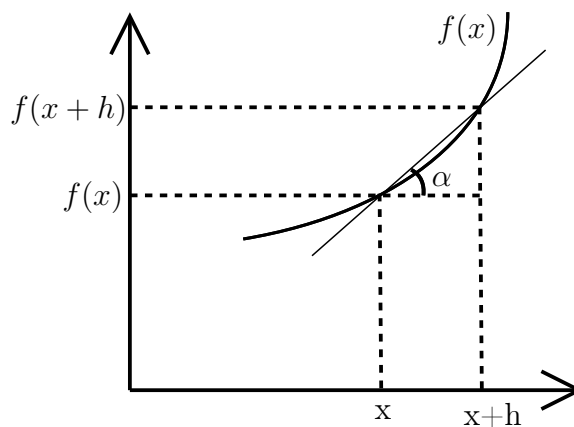
$$\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ak uvážime, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , tak v limite  $x \rightarrow 0$  obdržime hľadanú limitu.

### Spojitosť funkcie



obr. 11



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha_h(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

obr. 12

*Definícia:* Funkcia  $f(x)$  definovaná v okolí bode  $x = c$  je v tomto bode *spojitá* ak bod  $c$  patrí do definičného oboru funkcie a existuje *vlastná* limita

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (4.8)$$

Funkcia je *spojitá* na intervale  $(a, b)$ , ak je *spojitá* v každom bode  $c$  z intervalu  $(a, b)$ .

*Poznámka:* Ak funkcia je *spojitá* a existuje *vlastná* limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , potom môžeme funkciu  $f(x)$  *spojito dodefinovať* tým, že definujeme novú funkciu  $\tilde{f}(x)$  takto:

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad \tilde{f}(x) = f(x) \text{ pre } x \neq a, .$$

Funkcia  $\tilde{f}(x)$  je už *spojitá* v bode  $x = a$ .

*Príklady na spojitosť funkcie.*

1. Neelementárne funkcie  $[x]$  a  $\varepsilon(x)$  sú nespojité; absolútna hodnota  $|x|$  je spojitá funkcia.

2. Mocninné funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch:

a. Pre celé číslo  $n > 0$  funkcia  $x^n$  je spojitá na celej číselnej osi  $x \in (-\infty, +\infty)$ , kým  $x^{-n}$  je spojitá pre všetky  $x \neq 0$ ;

b. pre realne  $a$  funkcia  $x^a$  je spojitá na intervale  $(0, +\infty)$ .

3. Exponenciálna funkcia a logaritmus sú spojité na svojich definičných oboroch:

a.  $e^x$  je spojitá na celej číselnej osi  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

b.  $\ln x$  je spojitá na intervale  $(0, +\infty)$ .

4. Goniometrické a cyklometrické funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch:

a. Funkcie  $\sin x$  a  $\cos x$  sú spojité celej číselnej osi  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

b. Funkcia  $\operatorname{tg} x$  je spojitá na celej číselnej osi s výnimkou bodov  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n$  - celé číslo, kým  $\operatorname{cotg} x$  je spojitá na celej číselnej osi s výnimkou bodov  $x = n\pi$ ,  $n$  - celé číslo.

c. Funkcia  $\arcsin x$  je spojitá na intervale  $(-1, +1)$  a funkcia  $\operatorname{arctg} x$  je spojitá na celej číselnej osi  $(-\infty, +\infty)$

## Derivácia funkcie

*Definícia:* Derivácia spojitej funkcie  $f(x)$  spojitej na intervale  $(a, b)$  je nová funkcia premennej  $x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (4.9)$$

ktorá je definovaná v tých bodoch  $x \in (a, b)$ , v ktorých existuje uvedená limita.

Geometrický význam derivácie je znázornený na Obr. 12. Podľa náčrtu  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$  je dotyčnica ku grafu funkcie  $y = f(x)$  v bode  $x$ . Uhol  $\alpha$  udáva sklon dotyčnice v bode  $x$  vzhľadom k  $x$ -ovej osi; ak v bode  $x = a$  existuje nevlastná limita  $f'(a) = \pm\infty$ , tak dotyčnica je rovnobežná s  $y$ -ovou osou.

*Poznámka 1.* Používa sa tiež označenie:  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$  a  $\Delta x = x+h - x = h$ . Definíciu limity potom môžeme zapísať ako

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \quad (4.10)$$

Označenie derivácie ako  $f'(x)$  pochádza od Newtona, kým označenie  $\frac{df(x)}{dx}$  zaviedol Leibniz.

*Poznámka 2.* Samotná funkcia  $f'(x)$  resp.  $\frac{df(x)}{dx}$  môže mať tiež deriváciu, ktorú značíme buď ako  $f''(x)$  (v Newtonovom značení), alebo ako  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$  (v Leibnizovom označení); hovoríme, že funkcia  $f(x)$  má druhú deriváciu. Analogicky sa definujú aj vyššie derivácie:  $n$ -ta derivácia sa značí ako  $f^{(n)}(x)$

alebo  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ . Obe značenia sú úplne rovnocenné a v odbornej literatúre sa bežne používajú.

**Príklady na výpočet derivácií.** Vypočítame postupne derivácie funkcií  $x^n$ ,  $x^{-n}$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$  a  $\cos x$ :

1. Pri výpočte derivácie  $(x^n)'$  využijeme binomickú formulu  $(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( n x^{n-1} + h \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots \right) = n x^{n-1}. \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme využili to, že  $\lim_{h \rightarrow 0} h^m = 0$  pre  $m = 1, 2, \dots, n$ .

2. Deriváciu  $(x^{-n})'$  vypočítame obdobne

$$\begin{aligned} (x^{-n})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} \frac{x^n - (x+h)^n}{h} \\ &= \frac{1}{x^{2n}} \lim_{h \rightarrow 0} \left( -n x^{n-1} - h \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots \right) = -n x^{-n-1}. \end{aligned}$$

Tu sme využili to, že limita prvého zlomku v druhom riadku je rovná  $1/x^{2n}$ , kým druhý zlomok sme upravili podobne ako v príklade 1.

3. Pri výpočte  $(e^x)'$  využijeme rozvoj (2.24) funkcie  $e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \dots$ , z ktorého plynie  $\frac{1}{h}(e^h - 1) = 1 + \frac{1}{2}h + \dots$ . Teraz už ľahko dostaneme

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{x+h} - e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^x (e^h - 1)) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^h - 1) = e^x (1 + \frac{1}{2}h + \dots) = e^x$$

$$= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^h - 1) = e^x .$$

4. Pri výpočte  $(\sin x)'$  využijeme limity

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0 .$$

Bude

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin x] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [\cos x \sin h - \sin x(1 - \cos h)] = \cos x. \end{aligned}$$

5. Podobne sa ukáže, že

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\cos(x+h) - \cos x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-\cos x(1 - \cos h) - \sin x(1 - \sin h)) = -\sin x. \end{aligned}$$

## Základné pravidlá pre výpočet derivácií

Nech  $f(x)$  a  $g(x)$  sú funkcie, ktoré v uvažovanom bode majú derivácie  $f'(x)$  a  $g'(x)$ . Platia nasledujúce pravidlá:

### 1. Derivácie súčtu a súčinu

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (4.11)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (4.12)$$

**Derivácia podielu**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0. \quad (4.13)$$

*Príklad.* Odvodíme vzorce pre  $(\operatorname{tg} x)'$  a  $(\operatorname{cotg} x)'$ :

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \\ (\operatorname{cotg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

**2. Derivácia zloženej funkcie**

Uvažujme funkciu  $y = g(x)$  definovanú pre  $x \in D_g$ , a funkciu  $z = f(y)$  definovanú pre  $z \in D_f \supset R_g$  (definičný obor funkcie  $f$  obsahuje obor hodnôt funkcie  $g$ ). Potom má zmysel uvažovať zloženú funkciu:

$$z = f(g(x)), \quad x \in D_g. \quad (4.14)$$

Ak existuje derivácia  $g'(x)$  pre  $x \in D_g$  a derivácia  $f'(y)$  v bode  $y = g(x)$ , tak existuje aj derivácia zloženej funkcie

$$(f(g(x)))' = (f'(y))_{y=g(x)} g'(x). \quad (4.15)$$

Symbol  $(f'(y))_{y=g(x)}$  znamená, že vypočítame  $f'(y)$  a vo výsledku položíme  $y = g(x)$ .

*Príklad.* Formulu pre deriváciu podielu môžeme odvodiť zo vzorca pre súčin takto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Tento výraz sa už ale rovná formule pre deriváciu podielu. V poslednom kroku sme použili vzorec pre deriváciu zloženej funkcie:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\left(\frac{1}{y^2}\right)_{y=g(x)} g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

### 3. Derivácia inverznej funkcie

Nech existuje funkcia  $g(x)$  inverzná funkcia k  $f(x)$  pre  $x \in D_f$ . Potom platí

$$f(g(x)) = x \text{ pre } x \in D_f.$$

Deriváciou tohto vzťahu dostaneme

$$(f'(y))_{y=g(x)} g'(x) = 1, \text{ lebo derivácia } (x) = 1.$$

Z tejto rovnice pre *deriváciu inverznej funkcie* dostávame vzťah

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f'(y)}\right)_{y=g(x)}. \quad (4.16)$$

*Príklad 1.* Pre funkciu  $f(x) = e^x$  platí  $f'(x) = e^x$ . Zo vzorca pre deriváciu inverznej funkcie  $\ln x$  potom dostaneme

$$(\ln x)' = \left(\frac{1}{e^y}\right)_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

*Príklad 2.* Podobne pre funkciu  $f(x) = \sin x$  máme

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Zo vzorca pre deriváciu inverznej funkcie  $\arcsin x$  potom dostaneme

$$(\arcsin x)' = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \right)_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

*Príklad 3.* Napokon pre funkciu  $f(x) = \operatorname{tg} x$  máme

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Pre deriváciu inverznej funkcie  $\operatorname{arctg} x$  potom dostaneme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \right)_{y=\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

*Tabuľka derivácií elementárnych funkcií*

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0	$x^n$	$nx^{n-1}$
$x^{-n}$	$-nx^{-n-1}$	$x^a$	$ax^{a-1}$
$e^x$	$e^x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

# Chapter 5

## Využitie derivácií

### L'Hospitalovo pravidlo

*Veta:* Nech  $f(x)$  a  $g(x)$  sú funkcie spojité v okolí bodu  $x = a$  také, že

- (1) existujú limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , **alebo**  
existujú nevlastné limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , a  
(2) ďalej existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom existuje aj limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.1)$$

*Dôkaz* naznačíme za predpokladu, že  $f(a) = g(a) = 0$ , a že existujú derivácie

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a+h) - f(a)],$$

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(a+h) - g(a)] \neq 0.$$

Potom skutočne,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} [f(a+h) - f(a)]}{\frac{1}{h} [g(a+h) - g(a)]} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

*Poznámka.* Ak by bolo  $f'(a) = g'(a) = 0$ , tak môžeme znova použiť l'Hospitalovo pravidlo na funkcie  $f'(x)$  a  $g'(x)$ , za predpokladu, že existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ atď.}$$

Pri  $k$ -násobnom použití l'Hospitalovho pravidla musia byť splnené predpoklady  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ ,  $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(k-1)}(a) = 0$  a existuje derivácia  $f^{(k)}(a)$  a spolu s deriváciou  $g^{(k)}(a) \neq 0$ .

*Príklady 1.*

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^p - a^p)'}{(x^q - a^q)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{p-q}.$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

d.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*Príklady 2.*

a.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos x - \operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\sin x} = 0.$$

c. Dokážte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Miesto tejto limity uvažujme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1}}{1} = 1.$$

Hľadaný vzťah okamžite vyplýva z rovnice  $\ln e = 1$ . Poznamenajme, že vyšetrovaná limita po substitúcii  $x = 1/t$  prejde na prvú limitu v rovnici (4.7).

### Vyšetrovanie priebehu funkcie

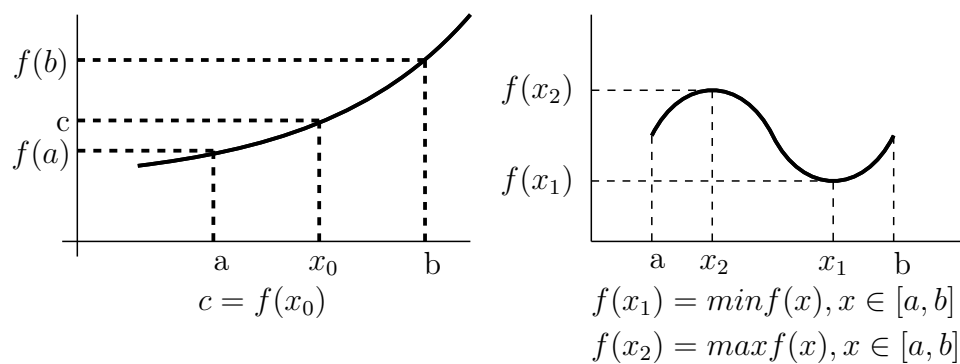
**Veta 1** (*O nadobúdaní hodnôt*): Nech  $f(x)$  je funkcia spojitá na intervale  $[a, b]$ , pričom  $f(a) < f(b)$ . Pre každé číslo  $c \in [a, b]$  existuje aspoň jeden bod  $x_0$  z intervalu  $[a, b]$ , v ktorom platí  $f(x_0) = c$  (analogické tvrdenie platí aj v prípade  $f(a) > f(b)$ ).

*Dôkaz:* Vezmeme stred intervalu  $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ ; ak  $f(a_1) = c$  skončili sme.

1) Ak  $f(a_1) < c$  uvažujeme interval  $[a, a_1]$ , na ktorom  $f(a) < c < f(a_1)$  a položíme  $a_2 = \frac{1}{2}(a + a_1)$ ,

2) Ak  $f(a_1) > c$  uvažujeme interval  $[a_1, b]$ , na ktorom  $f(a) < c < f(a_1)$  a položíme  $a_2 = \frac{1}{2}(a + a_1)$ .

Vrátíme sa na začiatok s  $a_2$  miesto  $a_1$  a postup opakujeme. Takto dostaneme konvergentnú postupnosť  $\{a_1, a_2, \dots\}$ : v jej limitnom bode  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  platí  $f(x_0) = c$ .



obr. 13a,b

**Veta 2** (*O maxime a minime*): Ak  $f(x)$  je funkcia spojitá na *uzavretom*

intervale  $[a, b]$  potom existujú body  $x_1$  a  $x_2$  z intervalu  $[a, b]$  také, že platí:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ pre všetky } x \in [a, b]. \quad (5.2)$$

Túto vetu dokazovať nebudeme. Veta nám hovorí, že spojitá funkcia na uzavretom intervale nadobúda svoje extrémny (Obr. 13b):

- (i) *minimum*  $f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ , t.j.  $f(x_1) \leq f(x)$  pre  $x \in [a, b]$ ,
- (ii) *maximum*  $f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , t.j.  $f(x_2) \geq f(x)$  pre  $x \in [a, b]$ .

**Definícia** (*Monotónnosť funkcie*): Funkcia  $f(x)$  je rastúca resp. klesajúca na intervale  $[a, b]$ , ak

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ resp. } f(x_1) > f(x_2) \text{ pre } a \leq x_1 \leq x_2 \leq b. \quad (5.3)$$

**Veta 3:** Ak funkcia  $f(x)$  spojitá na intervale  $[a, b]$ , má pre  $x \in (a, b)$  deriváciu  $f'(x) > 0$  resp.  $f'(x) < 0$ , potom  $f(x)$  je na intervale  $[a, b]$  rastúca resp. klesajúca.

*Dôkaz:* Nech derivácia funkcie v bode  $x$  je *kladná*

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] = c > 0.$$

Pre dostatočne malé  $h > 0$  potom platí

$$\frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] = \frac{1}{2}c > 0.$$

Po vynásobení  $h$  dostaneme  $f(x) < f(x+h)$ ; podobne pri  $h < 0$  sa dostane  $f(x+h) < f(x)$ . Teda funkcia je rastúca. V prípade *zápornej* derivácie, analogicky sa ukáže, že je funkcia klesajúca.

**Definícia** (*Lokálny extrém*): Hovoríme, že funkcia  $f(x)$  má v bode  $x_0$  *lokálne maximum* resp. *lokálne minimum*, ak je definovaná v jeho okolí  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  a pre  $x \neq x_0$  platí

$$f(x) < f(x_0) \text{ resp. } f(x) > f(x_0) . \quad (5.4)$$

**Veta 4:** Ak funkcia  $f(x)$  je spojitá na intervale  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  a má pre  $x \neq x_0$  deriváciu, potom má v bode  $x_0$  maximum alebo minimum, vtedy keď  $f'(x)$  *mení* v okolí bodu  $x_0$  znamienko podľa nasledujúcej tabuľky:

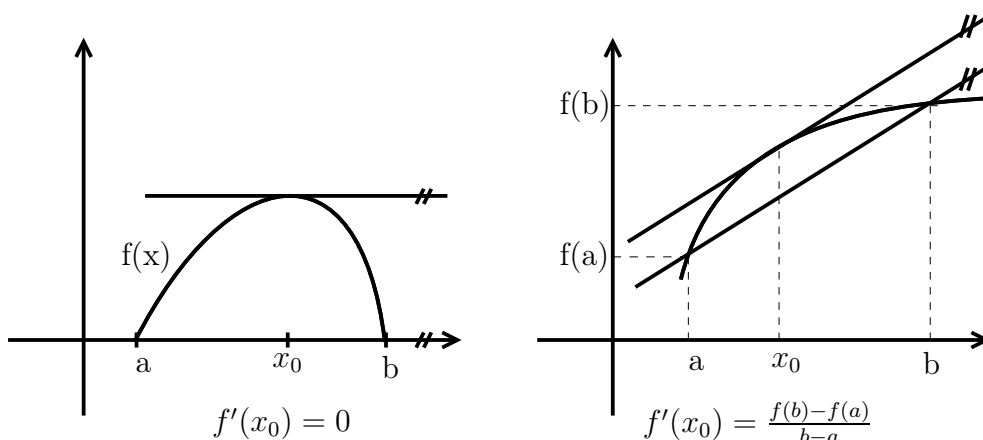
$f(x_0)$ má	$x < x_0$	$x > x_0$	
maximum	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	(5.5)
minimum	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	

Derivácia bode  $x_0$  nemusí existovať, ak ale existuje, potom  $f'(x_0) = 0$ . Ak  $f'(x)$  *nemení* v okolí bodu  $x_0$  znamienko, extrém neexistuje.

**Veta 5** (*Rolleova veta*): Nech  $f(x)$  je spojitá na intervale  $[a, b]$ , pričom  $f(a) = f(b) = 0$ . Ak  $f'(x)$  existuje na otvorenom intervale  $(a, b)$ , potom existuje bod  $x_0 \in (a, b)$ , v ktorom  $f'(x_0) = 0$ .

*Dôkaz:* Rozlišujeme tri prípady:

- 1)  $f(x) = 0$  pre všetky  $x \in (a, b)$ , potom  $x_0$  môžeme voliť ľubovoľne.
- 2) Ak maximum  $f(x)$  je kladné, tak sa nadobúda v bode  $x_0 \in (a, b)$ , v ktorom  $f'(x_0) = 0$  (pozri Obr. 14a).
- 3) Analogicky, záporné minimum  $f(x)$  sa nadobúda v bode  $x_0 \in (a, b)$ , v ktorom  $f'(x_0) = 0$ .



obr. 14a,b

**Veta 5** (*Lagrangeova veta o prírastku funkcie*): Nech  $f(x)$  je spojitá na intervale  $[a, b]$ , pričom  $f'(x)$  existuje na otvorenom intervale  $(a, b)$ . Potom existuje také  $x_0 \in (a, b)$ , že platí

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (5.6)$$

*Dôkaz:* Miesto funkcie  $f(x)$  uvažujeme funkciu

$$g(x) = f(x) - \frac{f(a)}{b-a}(b-x) - \frac{f(b)}{x-a}(x-a),$$

ktorá spĺňa predpoklad Rolleovej vety  $g(a) = g(b) = 0$ . Potom existuje bod  $x_0 \in (a, b)$ , v ktorom platí

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) + \frac{f(a)}{b-a} - \frac{f(b)}{b-a}.$$

Odtiaľto hneď dostaneme hľadané vyjadrenie  $f'(x_0)$  (pozri Obr. 14a).

**\*Asymptoty.**

1) Nech funkcia  $f(x)$  je definovaná na nevlastnom intervale  $(a, +\infty)$ . Hovoríme, že priamka  $y = kx + p$  zadaná parametrami

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad p = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] \quad (5.7)$$

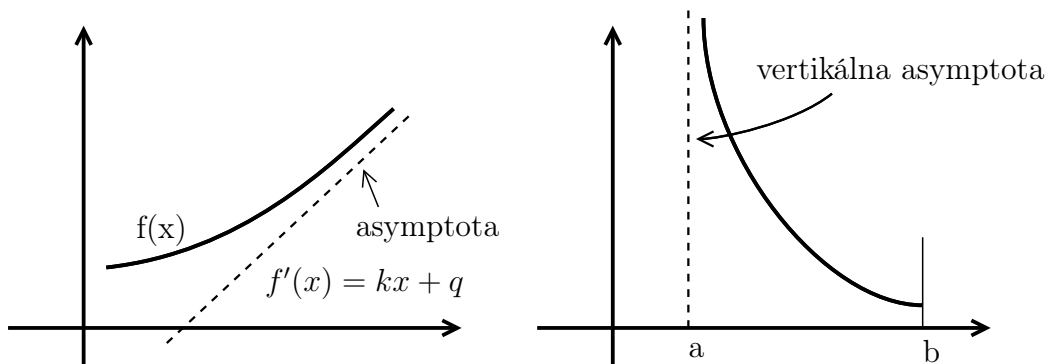
je *asymptota* funkcie  $f(x)$  pre  $x \rightarrow +\infty$ . Asymptota v  $+\infty$  je priamka, ktorá sa k  $f(x)$  neobmedzene približuje pre  $x \rightarrow +\infty$ .

Ak funkcia  $f(x)$  je definovaná na nevlastnom intervale  $(-\infty, a)$  jej *asymptota* v  $-\infty$  sa definuje rovnako, len všade  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  nahradíme  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ .

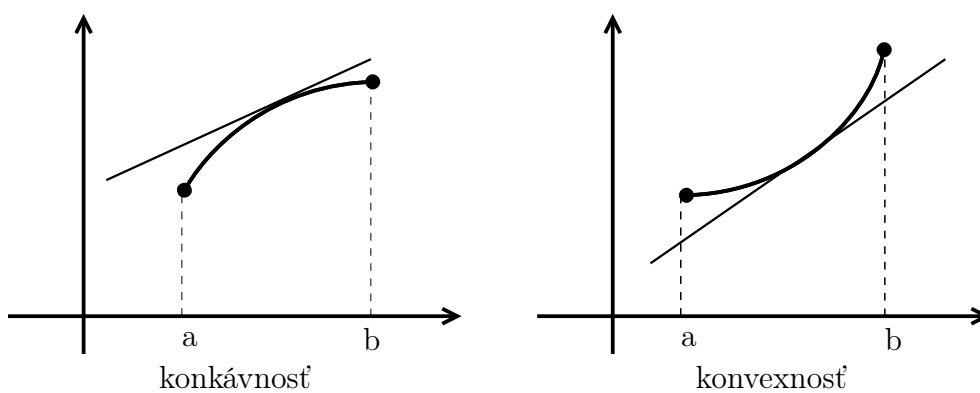
2) Hovoríme, že funkcia  $f(x)$  definovaná na vlastnom intervale  $(a, b)$  má *vertikálnu asymptotu* v bode  $x = a$ , ak pri približovaní sa  $x$  k bodu  $a$  sprava funkcia  $f(x)$  buď neobmedzene rastie alebo klesá. Analogicky sa definuje vertikálna asymptota v pravom krajnom bode  $x = b$ .

**\*Konvexnosť a konkávnosť funkcie.**

Spojité funkcia  $f(x)$  je na intervale  $(a, b)$  *konvexná* resp. *konkávná*, ak na  $(a, b)$  má spojitú deriváciu, pričom v každom bode  $x_0 \in (a, b)$  jej graf je *nad* resp. *pod* jej dotyčnicou  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  v bode  $x_0$  (pozri Obr. 16a a 16b).



obr. 15a,b



obr. 16a,b

**Veta 6:** Ak  $f''(x) > 0$  resp.  $f''(x) < 0$  pre  $x \in (a, b)$ , potom  $f(x)$  je na intervale  $(a, b)$  konvexná resp. konkávna.

*Poznámka:* Bod  $x_0 \in (a, b)$  odpovedá maximu resp. minimu ak

$$f'(x_0) = 0 \text{ a } f''x_0 < 0 \text{ resp. } f''x_0 > 0. \quad (5.8)$$

Bod  $x_0 \in (a, b)$  je *inflexný bod*, ak  $f''(x) = 0$  a  $f''(x)$  mení v bode  $x_0$

znamienko.

**Zostrojenie grafu funkcie  $y = f(x)$ .**

1. Určíme obor definície.
2. Zistíme, či je funkcia párna alebo nepárna.
3. Preskúmame limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru.
4. Najdeme body nespojitosti a prípadne určíme hodnoty funkcie vo vybratých bodoch.
5. Najdeme intervaly, v ktorých funkcia rastie alebo klesá, určíme maximá a minimá.
- \*6. Určíme asymptoty.
- \*7. Najdeme intervaly, v ktorých funkcia je konvexná alebo konkávna, určíme inflexné body a v každom z nich smer dotyčnice.

**Taylorov rozvoj.**

Najprv prepíšeme Lagrangeovu vetu o prírastku funkcie do tvaru vhodnejšieho v ďalšom.

Nech teda  $f(x)$  je spojitá funkcia na intervale  $[a, a + h]$  pre  $h > 0$  resp.  $[a + h, a]$  pre  $h < 0$ , ktorá na príslušnom otvorenom intervale má spojitú deriváciu. Lagrangeovu vetu o prírastku funkcie môžeme prepísať takto:

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.9)$$

Prírastok funkcie  $f(x)$  medzi bodmi  $x = a$  a  $x = a + h$  je na pravej strane reprezentovaný priamkou vychádzajúcou z bodu  $f(a)$  so "správnym" sklonom  $f'(x_0)$  vyjadreným pomocou derivácie v bode  $x_0 = a + \theta h$ : vybratý je práve tak, aby sme sa "trafli" do hodnoty  $f(a + h)$ .

V prípade, že funkcia má  $n$ -tú deriváciu, Taylor zovšeobecnil vetu o prírastku funkcie pomocou jej aproximácie polynómami  $n$ -tého stupňa.

**Veta** (*Taylorova veta o prírastku funkcie*): Nech  $f(x)$  je spojitá na intervale  $[a, a + h]$  pre  $h > 0$  resp.  $[a + h, a]$  pre  $h < 0$ , ktorá na príslušnom otvorenom intervale má spojitú všetky derivácie až do  $n$ -tého rádu. Potom

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.10)$$

## Mocninný rad.

Uvažujme funkciu  $f(x)$  zadanú v tvare mocninného radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_n x^n + \dots \quad (5.11)$$

pre ktorý existuje kladná limita

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > 0. \quad (5.12)$$

Pre  $|x| < R$  rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  absolútne konverguje. Kladné číslo  $R$  sa nazýva *polomer konvergenzie*, ak  $R = \infty$ , mocninný rad konverguje pre všetky hodnoty  $x$ . Polomer konvergenzie možno vypočítať aj pomocou vzorca:

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (5.13)$$

*Poznámka 1.* Absolútnu konvergenciu mocninného radu dokážeme tak, že využijeme to, že z existencie  $R > 0$  vyplýva existencia takého kladného čísla  $A$ , že platí odhad

$$|a_n| < A \left( \frac{2}{R + |x|} \right)^n.$$

Potom máme

$$|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x^n| < A \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{R + |x|} \right)^n = A \frac{R + |x|}{R - |x|}$$

*Poznámka 2.* Mocninný rad možno derivovať člen po člene. Pod tým sa myslí to, že derivácia mocninného radu je daná formulou

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots \quad (5.14)$$

Podstatné tu je to, že polomer konvergenzie derivovaného radu je opäť  $R$ . Toto plynie z toho, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Opakovaním tohto postupu získame ľubovoľnú deriváciu funkcie zadanej v tvare mocninného radu:

(i) Funkcia  $f(x)$  zadaná v tvare mocninného radu má pre  $|x| < R$  ( $R$  je polomer konvergenzie) všetky derivácie;

(ii)  $f^{(k)}(x)$  sa získa  $k$ -násobným derivovaním mocninného radu člen po člene.

Funkciu zadanú v tvare mocninného radu možno rozvinúť pre  $|x| < R$  do Taylorovho radu v bode  $x = 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n, \quad \text{kde } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \quad (5.15)$$

Podobne, Taylorov rozvoj v okolí bodu  $x = a$  má tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n, \quad \text{kde } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a). \quad (5.16)$$

Tento rad konverguje pre všetky  $x$  spĺňajúce nerovnosť  $|x - a| < R$ .

## Príklady

1. Taylorov rozvoj funkcie  $f(x) = e^x$ . Pre túto funkciu platí  $(e^x)' = e^x$ . V bode  $x = 0$  potom máme  $f^{(n)}(0) = (e^x)_{x=0} = e^0 = 1$ . Taylorov rozvoj  $e^x$  v bode  $x = 0$  bude

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{t.j. } a_n = \frac{1}{n!}.$$

Tento rad konverguje pre všetky  $x$  lebo má polomer konvergenzie

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

2. Taylorov rozvoj funkcií  $\sin x$  a  $\cos x$ . Platí  $(\sin x)' = \cos$  a  $(\cos x)' = -\sin x$ . Preto

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(2n)} &= (-1)^n \sin x, & (\cos x)^{(2n)} &= (-1)^n \cos x, \\(\sin x)^{(2n+1)} &= (-1)^n \cos x, & (\cos x)^{(2n+1)} &= -(-1)^n \sin x.\end{aligned}$$

Pretože,  $\sin 0 = 0$  a  $\cos 0 = 1$ , tak bude

$$\begin{aligned}(\sin x)_{x=0}^{(2n)} &= 0, & (\cos x)_{x=0}^{(2n)} &= (-1)^n \\(\sin x)_{x=0}^{(2n+1)} &= (-1)^n, & (\cos x)_{x=0}^{(2n+1)} &= 0.\end{aligned}$$

Pre všetky  $x$  dostávame nasledujúce Taylorove rozvoje

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

*Poznámka:* Dokážeme Moivreov vzorec

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}. \quad (5.17)$$

Ak do ľavej strany dosadíme rozvoje  $\sin x$  a  $\cos x$  tak dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = e^{ix}.$$

3. Nasledujúce Taylorove rozvoje konvergujú pre  $|x| < 1$ :

$$\begin{aligned}(1 \pm x)^a &= 1 \pm ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 \pm \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \\ \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots\end{aligned}$$

# Chapter 6

## Integrovanie a jeho aplikácie

### Neurčitý integrál a primitívna funkcia

*Definícia:* Primitívna funkcia k funkcii  $f(x)$  s definičným oborom  $D_f$  je funkcia  $F(x)$ , pre ktorú platí:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre všetky } x \in D_f . \quad (6.1)$$

*Poznámka 1:* Definičný obor  $D_F$  primitívnej funkcie môže byť aj väčší ako  $D_f$ . Napríklad, ak ohraničená funkcia  $f(x)$  je v intervale  $(a, b)$  spojitá, až na konečný počet bodov  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (v ktorých ani nemusí byť definovaná), jej primitívna funkcia  $F(x)$  bude definovaná a spojitá na celom intervale  $(a, b)$  (ak ale  $f(x)$  nie je ohraničená, tak  $F(x)$  nemusí byť definovaná vo všetkých bodoch  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ).

*Príklady*

(i) Znamienková funkcia

$$f(x) = \varepsilon(x) \text{ rovná } -1, 0, +1 \text{ po rade pre } x < 0, x = 0, x > 0$$

je ohraničená a nespojitá v bode  $x = 0$ , pričom nie je tam ani definovaná, ale  $F(x) = |x|$  je definovaná a spojitá v bode  $x=0$ .

(ii) Podobne, funkcia  $f(x) = x^{-2/3}$  je neohraničená a nespojitá v bode  $x = 0$ , ale  $F(x) = 3x^{1/3}$  je definovaná a spojitá v bode  $x = 0$ .

(iii) Funkcia  $f(x) = x^{-2}$  je neohraničená a nespojitá v bode  $x = 0$ , rovnako aj  $F(x) = -x^{-1}$  je neohraničená a nespojitá v  $x = 0$ .

*Poznámka 2:* Primitívna funkcia  $F(x)$  k funkcii  $f(x)$  nie je určená jednoznačne. Každá funkcia  $F(x) + C$  líšiaca sa od  $F(x)$  o aditívnu konštantu  $C$  je tiež primitívna k funkcii  $f(x)$  (lebo derivácia konštanty je nula):  $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$ .

*Definícia:* Všeobecná primitívna funkcia  $F(x) + C$  k danej funkcii  $f(x)$  sa nazýva *neurčitým integrálom* a označuje sa ako

$$\int dx f(x) = F(x) + C . \quad (6.2)$$

Symbol  $\int dx$  sa nazýva neurčitým integrálom v premennej  $x$  (lebo konštantu  $C$  nie je určená), funkcia  $f(x)$  vystupujúca v integráli sa nazýva *integrandom* (niekedy sa používa zápis  $\int f(x) dx$  s  $dx$  na konci).

Základné neurčité integrály dostaneme obrátením tabuľky derivácií elementárnych funkcií (v tabuľkách sa nezvykne explicitne uvádzať neurčitá konštanta  $C$ ).

*Tabuľka základných neurčitých integrálov*

$$\begin{array}{ll}
 \int dx x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} & \int dx \frac{1}{x} = \ln x \\
 \int dx x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1}, a \neq -1 & \int dx e^x = e^x \\
 \int dx \sin x = -\cos x & \int dx \cos x = \sin x \\
 \int dx \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x & \int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \\
 \int dx \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x & \int dx \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \\
 \int dx \operatorname{tg} x = -\ln |\cos x| & \int dx \operatorname{cotg} x = \ln |\sin x|
 \end{array}$$

Ďalej uvedieme niektoré zovšeobecnenia (o ich správnosti dá sa presvedčiť jednoduchým derivovaním):

$$\begin{aligned}
 \int dx \frac{1}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \\
 \int dx \frac{1}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad \text{pre } |x| < a \\
 \int dx \frac{1}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad \text{pre } |x| > a \\
 \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{pre } |x| < a \\
 \int dx \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \quad \text{pre } |x| > a \\
 \int dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad \text{pre } .
 \end{aligned}$$

### Základné pravidlá výpočtu neurčitých integrálov

1. *Multiplikatívnu konštantu* možno vyňať pred integrál:

$$\int dx a f(x) = a \int dx f(x) . \quad (6.3)$$

2. *Integrál súčtu funkcií* sa rovná súčtu príslušných integrálov:

$$\int dx (f(x) + g(x)) = \int dx f(x) + \int dx g(x) . \quad (6.4)$$

Niektoré integrály možno redukovať na výpočet jednoduchších (základných) integrálov integračnou *metódou substitúcie* a integračnou *metódou per-partes*.

3. *Substitučná metóda*:

$$\int dt \phi'(t) f(\phi(t)) = \left( \int dx f(x) \right)_{x=\phi(t)} . \quad (6.5)$$

Na pravej strane najprv vypočítame integrál  $\int dx f(x)$  a do výsledku za  $x$  dosadíme  $\phi(t)$ .

4. *Metóda per-partes*:

$$\int dx f(x) g'(x) = f(x) g(x) - \int dx f'(x) g(x) . \quad (6.6)$$

Tu  $f'(x)$  označuje deriváciu funkcie  $f(x)$  a podobne  $g'(x)$  je derivácia  $g(x)$ .

**Komentár k pravidlám inegrovania.** Pretože neurčitý integrál (primitívna funkcia) je "opakom" derivovania, tieto pravidlá plynú priamo z pravidiel pre derivovanie:

*Pravidlo 1:* Ak  $F(x)$  bude primitívna funkcia k  $f(x)$ , pravidlo 1. je ekvivaletné nasledujúcemu pravidlu pre derivovanie

$$(a F(x))' = aF'(x) .$$

*Pravidlo 2:* Ak  $F(x)$  a  $G(x)$  označujú primitívne funkcie k  $f(x)$  a  $g(x)$ , pravidlo 2. je ekvivaletné derivovaniu súčtu funkcií

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) .$$

*Pravidlo 3.* Pravidlo sa získa integráciou pravidla pre deriváciu zloženej funkcie:

$$\begin{aligned} \int dt \phi'(t) f(\phi(t)) &= \int dt \frac{dF(\phi(t))}{dt} = F(\phi(t)) \\ &= F(x)_{x=\phi(t)} = \left( \int dx f(x) \right)_{x=\phi(t)} . \end{aligned}$$

*Pravidlo 4.* Integráciou pravidla pre deriváciu súčinu funkcií

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

dostaneme rovnicu

$$f(x)g(x) = \int dx f'(x)g(x) + \int dx f(x)g'(x)$$

ktorá je ekvivalentná pravidlu 4.

*Poznámka:* Často býva potrebné použiť tieto pravidlá aj viackrát za sebou. Existujú návody, ako postupovať pri integrovaní určitých triedach elementárnych funkcií:

- (i) Integrovanie racionálnych funkcií,
- (ii) Integrand obsahuje odmocniny,
- (iii) Integrand obsahuje goniometrické funkcie.

Takýmito návodmi sa ale nebudeme bližšie zaoberať. Jednoznačné pravidlo na výpočet integrálov neexistuje, je potrebný cvik a skúsenosť.

Integrály elementárnych funkcií nie sú vždy elementárne funkcie. Ak nastane takýto prípad, alebo je integrovanie príliš zložité, integrand môžeme brať v tvare Taylorovho radu (alebo iného vhodného rozvoja), ktorý za určitých podmienok možno integrovať člen po člene. Výsledok je potom daný v tvare mocninového rozvoja (prípadne rozvoja v iných funkciách).

Zvyknú sa tiež uvádzať rozsiahle tabuľky neurčitých integrálov, kde spravidla možno najst hľadaný integrál, pokiaľ sa dá vyjadriť pomocou elementárnych alebo iných špeciálnych funkcií.

### Určitý integrál

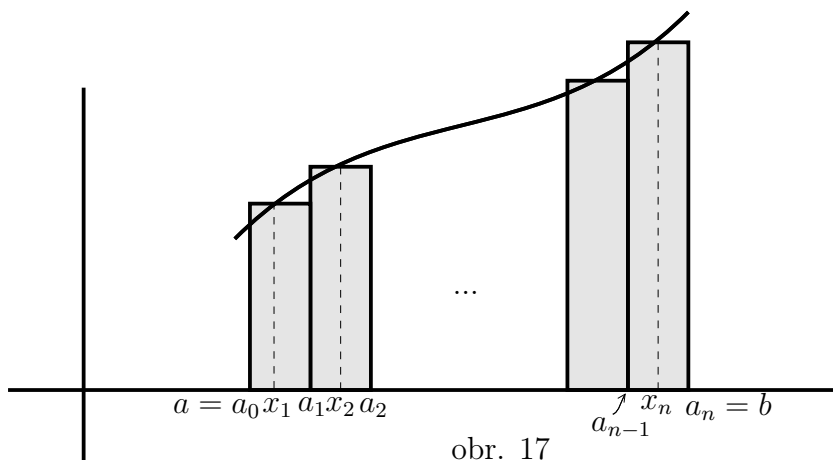
Budeme sa zaujímať o plochu medzi funkciou  $f(x)$  spojitou na vlastnom intervale  $[a, b]$  a  $x$ -vou osou (pozri Obr. 17). Túto plochu možno odhadnúť takto:

(i) Interval  $[a, b]$  rozdelíme na  $N$  podintervalov  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{N-1}, a_N]$  dĺžky  $\Delta x = \frac{1}{N}(b-a)$ , s krajnými bodmi  $a_0 = a, \dots, a_n = a+n\Delta x, \dots, a_N = b$ . Potom, v každom z intervalov  $(a_{n-1}, a_n)$  vyberieme bod  $x_n, n = 1, 2, \dots, N$ .

(ii) Hľadaná plocha je približne daná ako Riemannov integrálny súčet

$$\sum_{n=1}^N \Delta x f(x_n), \quad \Delta x = \frac{1}{N}(b-a). \quad (6.7)$$

Pritom plocha nad  $x$ -vou osou sa berie kladne resp. záporne, podľa znamienka  $f(x_n)$ .



*Definícia:* Určitý integrál  $\int_a^b dx f(x)$  je definovaný ako limita integrálnych súčtov

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Delta x f(x_n). \quad (6.8)$$

Symbol  $\int_a^b dx$  sa nazýva určitým integrálom cez  $dx$  v medziach  $a, b$  ("na intervale  $[a, b]$ " alebo "od  $a$  do  $b$ "), funkcia  $f(x)$  sa nazýva integrandom.

### Komentár k definícii.

1. Možno ukázať, že za predpokladu o spojitosti integranda  $f(x)$  na intervale  $[a, b]$  limita integrálnych súčtov nezávisí od výberu bodov  $x_n \in (a_{n-1}, a_n)$ .

2. Ďalej možno dokázať, že ak  $c$  je daný bod z intervalu  $(a, b)$  a je inte-

grand je *ohraničený a spojitý* na intervaloch  $(a, c)$  a  $(c, b)$ , tak určitý integrál na intervale  $[a, b]$  existuje a je daný ako súčet integrálov cez  $[a, c]$  a  $[c, b]$ :

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x). \quad (6.9)$$

Integrál pritom nezávisí od hodnoty integrandu v bode  $c$  (funkcia  $f(x)$  v bode  $x = c$  ani nemusí byť definovaná).

*Poznámka 1:* Z tohoto je vidieť, že určitý integrál na intervale  $(a, b)$  existuje pre ohraničený po častiach spojitý integrand. To je funkcia  $f(x)$  spojitá a ohraničená v intervale  $(a, b)$  až na konečný počet bodov  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

*Poznámka 2:* Ak ohraničený integrand  $f(x)$  zmeníme v konečnom počte bodov, hodnota integrálu sa nezmení. Špeciálne, integrál nezávisí od hodnôt integranda  $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_k)$  v bodoch nespojitosti.

### Newtonova formula

Uvažujme integrálny súčet

$$\sum_{n=1}^N \Delta x f(x_n), \quad x_n \in (a_{n-1}, a_n) \quad (6.10)$$

Nech  $F(x)$  je primitívna funkcia k integrandu  $f(x)$ . Podľa vety o prírastku funkcie v každom z intervalov  $(a_{n-1}, a_n)$  existuje taký bod  $x_n$ , že platí

$$F'(x_n) = \frac{F(a_n) - F(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}}. \quad (6.11)$$

Práve tieto hodnoty  $f(x_n) = F'(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , dosadíme do integrálneho súčtu. Ak uvážime to, že  $\Delta x = a_n - a_{n-1}$ , tak príslušný integrálny súčet môžeme prepísať takto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \frac{F(a_n) - F(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} &= \sum_{n=1}^N [F(a_n) - F(a_{n-1})] \\ &= [F(a_1) - F(a_0)] + [F(a_2) - F(a_1)] \dots \\ &+ [F(a_{n-1}) - F(a_{n-2})] + [F(a_n) - F(a_{n-1})] \\ &= F(a_N) - F(a_0) = F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

Vidíme, že platí veľmi dôležitá **Newtonova formula**:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b. \quad (6.12)$$

Tu je zavedené bežne používané označenie  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$  (tiež sa používa značenie  $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ ).

Newtonova formula je fundamentálny vzťah, ktorý vyjadruje určitý integrál na intervale  $(a, b)$  z integrandu  $f(x)$  ako rozdiel hodnôt príslušnej primitívnej funkcie v koncových bodoch oboru integrovania. Samozrejme, určitý integrál nezávisí od aditívnej konštanty vystupujúcej v  $F(x)$ .

### Základné pravidlá výpočtu určitých integrálov

Prvé dve pravidlá plynú z Newtonovej integračnej formuly, ďalšie vyplývajú priamo z pravidiel výpočtu neurčitých integrálov.

0. *Výmena integračných hraníc a rozdelenie integračného intervalu:*

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) . \quad (6.13)$$

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x) . \quad (6.14)$$

1. *Multiplikatívnu konštantu možno vyňať pred integrál:*

$$\int_a^b dx c f(x) = c \int_a^b dx f(x) . \quad (6.15)$$

*Integrál súčtu funkcií sa rovná súčtu príslušných integrálov:*

$$\int_a^b dx (f(x) + g(x)) = \int_a^b dx f(x) + \int_a^b dx g(x) . \quad (6.16)$$

2. *Substitučná metóda:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt \phi'(t) f(\phi(t)) = \left( \int_a^b dx f(x) \right)_{x=\phi(t)} = F(b) - F(a) . \quad (6.17)$$

Vzorec platí ak  $\phi(t)$  na intervale  $[a, b]$  je monotónna: na pravej strane najprv vypočítame integrál  $\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$  a do výsledku dosadíme

- $a = \phi(\alpha)$  a  $b = \phi(\beta)$  ak  $\phi(t)$  je rastúca, resp.
- $a = \phi(\beta)$  a  $b = \phi(\alpha)$  ak  $\phi(t)$  je klesajúca.

3. *Metóda per-partes:*

$$\int_a^b dx f(x) g'(x) = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b dx f'(x) g(x) . \quad (6.18)$$

## Príklady

1. Integrál  $\int_{-1}^{+1} dx x^2$  počítame priamo:

$$\int_{-1}^{+1} dx x^2 = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

2. Integrál  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin t \cos t$  môžeme vypočítať pomocou substitúcie  $x = \sin t$ ,  $dx = (\sin t)' = \cos t$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin t \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt (\sin t)' \sin t = \int_0^1 dx x = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. Iný spôsob výpočtu  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin t \cos t$  spočíva vo využití vzorca  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin t \cos t = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin(2t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

4. Integrál  $\int_0^c dx x e^x$  počítame metódou per-partes, tak že položíme  $f(x) = x$  a  $g'(x) = e^x$ . Ak využijeme to, že  $f'(x) = 1$  a  $g(x) = e^x$ , hneď dostaneme:

$$\int_0^c dx x e^x = [x e^x]_0^c - \int_0^c dx e^x = [x e^x]_0^c - [e^x]_0^c = c e^c - e^c + 1$$

## Nevlastné integrály

Integrál cez nevlastné intervaly  $(c, +\infty)$  resp.  $(-\infty, c)$  definujú sa ako limity integrálov cez vlastné intervaly:

$$\int_c^{+\infty} dx f(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b dx f(x) \quad (6.19)$$

resp.

$$\int_{-\infty}^c dx f(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c dx f(x) \quad (6.20)$$

Integrál cez celú reálnu os  $(-\infty, +\infty)$  sa definuje takto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^c dx f(x) + \int_c^{+\infty} dx f(x) \quad (6.21)$$

kde posledné dva integrály boli zavedené vyššie. Hodnota takto definovaného integrálu cez interval  $(-\infty, +\infty)$  nezávisí od výberu bodu  $c$ .

### Príklady

1. Integrál  $\int_0^{+\infty} dx e^{-x}$  počítame priamo:

$$\int_0^{+\infty} dx e^{-x} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c dx e^{-x} = \lim_{c \rightarrow +\infty} [e^{-x}]_0^c = 1$$

2. Integrál  $\int_0^{+\infty} dx x e^{-x}$  počítame metódou per-partes. Zvolíme  $f(x) = x$  a  $g'(x) = e^{-x}$ , potom

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dx x e^{-x} &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c dx x e^{-x} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left( [-x e^{-x}]_0^c - \int_0^c dx (-e^{-x}) \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c dx x e^{-x} = \lim_{c \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^c = 1 \end{aligned}$$

3. Integrál  $I_n = \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x}$  počítame metódou per-partes. Zvolíme  $f(x) = x^n$  a  $g'(x) = e^{-x}$  (kvôli stručnosti nevypisujeme explicitne  $\lim_{c \rightarrow +\infty}$ ):

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x} = [-x^n e^{-x}]_0^c - \int_0^{+\infty} dx (n x^{n-1})(-e^{-x}) \\ &= n \cdot \int_0^{+\infty} dx x^{n-1} e^{-x} = n \cdot I_{n-1} \end{aligned}$$

Dostali sme rekurentný vzťah  $I_n = n \cdot I_{n-1}$ , pričom  $I_0 = 1$  podľa príkladu 2. Toto dáva

$$I_n = \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x} = n! .$$

*Poznámka:* Možno ukázať, že integrál  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} dx x^{z-1} e^{-x}$  existuje pre ľubovoľné reálne  $z > 0$  (jeho definíciu možno rozšíriť aj na komplexné čísla  $z$  rôzne od 0 a celých záporných čísiel). Toto definuje Eulerovu gamma funkciu. Nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, aj keď pre prirodzené čísla  $n = 1, 2, \dots$ , nadobúda hodnoty  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .

### Výpočty plôch a objemov rotačných telies

*Plochy v rovine  $(x, y)$  ohraničené funkciami  $y = f(x)$*

Jedná sa o plochy v rovine ohraničené niekoľkými funkciami. Ako ilustráciu vypočítame plochu elipsy v rovine  $(x, y)$  zadanej rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (6.22)$$

Ak vyjadríme z tejto rovnice premennú  $y$  dostaneme dve riešenia (pozri Obr 18):

$$y = f_1(x) = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, +a],$$

$$y = f_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, +a].$$

Prvé z nich je kladné pre  $x \in (-a, +a)$ , druhé je symetricky rozložené pod  $x$ -ovou osou. Spájajú sa v bodoch  $x = +a$  a  $x = -a$ :  $f_1(+a) = f_1(-a) = 0$

a  $f_1(-a) = f_2(-a) = 0$ . Plocha elipsy  $S$  je plocha uzavretá medzi funkciami  $f_1(x)$  a  $f_2(x)$ .

Zrejme  $S$  je dvojnásobok plochy pod funkciou  $f_1(x)$ , ktorá je rovná integrálu

$$I = \int_{-a}^{+a} dx b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = ab \int_{-1}^{+1} dt \sqrt{1 - t^2}.$$

Tu sme urobili substitúciu  $t = x/a$ . Ďalšou substitúciou  $t = \sin \phi$  dostaneme integrál  $I$  v tvare

$$\begin{aligned} I &= ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi \cos^2 \phi \\ &= \frac{1}{2} ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi (1 + \cos 2\phi) = \frac{\pi}{2} ab. \end{aligned}$$

Tu sme využili sme to, že

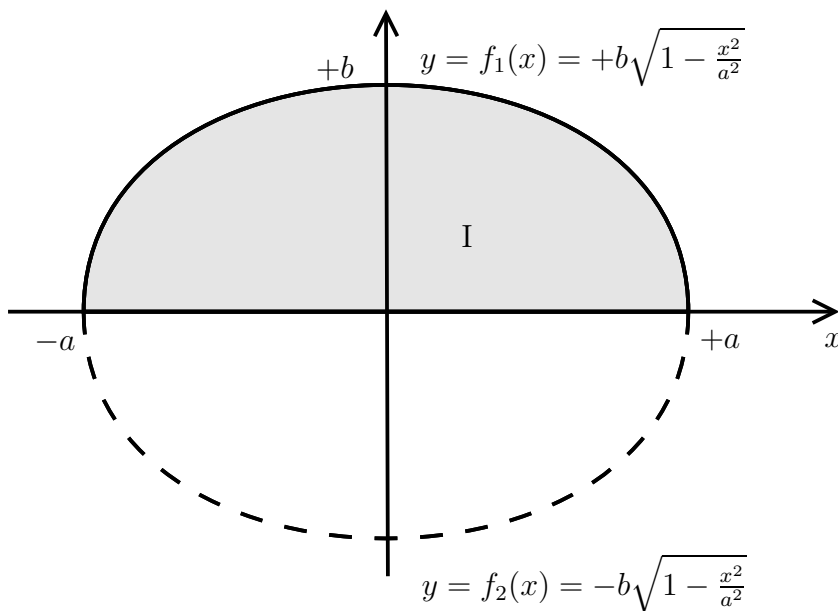
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi \cos 2\phi = \frac{1}{2} [\sin 2\phi]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Pre plochu elipsy máme vzorec:  $S = \pi ab$ . V prípade kružnice položíme  $a = b = r$  a získame známy vzorec  $S = \pi r^2$  pre plochu kružnice polomere  $r$ .

### *Objemy rotačných telies*

Uvažujme teleso, ktoré sa získa rotáciou spojitej funkcie  $y = f(x)$ , zadanej na intervale  $[a, b]$ , okolo  $x$ -ovej osi. Každému bodu  $x \in [a, b]$  máme takto priradenú kružnicu ploche  $\pi f^2(x)$ . Takéto rotačné teleso má objem  $V$  zadaný integrálom (pozri Obr 19):

$$V = \pi \int_a^b dx f^2(x). \quad (6.23)$$



obr. 18

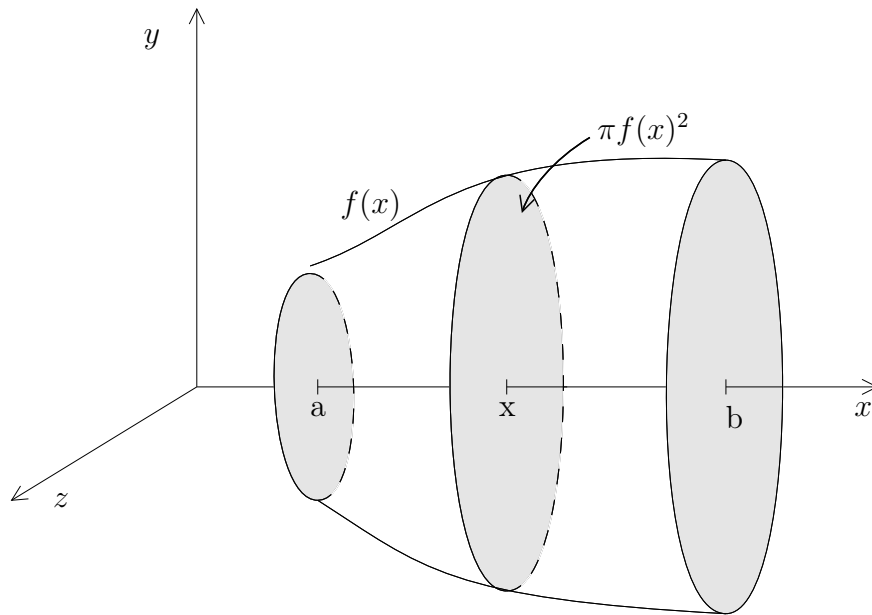
Na ilustráciu vypočítame objem rotačného elipsoidu, ktorý sa dostane rotáciou krivky

$$y = f(x) = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, +a],$$

okolo  $x$ -ovej osi. Po dosadení do integrálu pre objem  $V$  dostaneme:

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} dx b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \pi(2ab^2 - \frac{2}{3}ab^2) = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

Integrácia je v tomto prípade jednoduchá. Ak položíme  $a = b = r$ , získame známy vzorec  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  pre objem gule o polomere  $r$ .



obr. 19