Uvod do kvantovej elektrodynamiky

Peter Presnajder

Tieto poznamky su zapisom prednasky venovanej uvodnym kapitolam z kvantovanej elektrodynamiky. Poznamky su rozdelene do dvoch casti:

1. Diracovo pole a relativisticka invariantnost
- Lorentzove transformacie, relativisticke polia
- Diracova rovnica a jej riesenia, polarizacne sumy
- kvantovanie Diracovho pola, energie a hybnost pola, naboj
- fermiony, propagator Diracovho pola

2. Kvantova elektrodynamika a Feynmanove pravidla
- pohybove rovnice elektrodynamiky, Gaussov zakon, Coulombovska kalibracia
- volne tranzverzalne elektromagneticke pole a jeho kvantovanie
- interakcna reprezentacia v kvantovej teorii, poruchovy pocet
- samo-interagujuce skalarne pole, Feynmanove pravidla
- QED v Coulombovskej kalibracii, kalibracna invariantnost
- relativisticky formalizmus a Feynmanove pravidla

Na tieto dve kapitoly by mala naviazat cast venovana jednoduchym aplikaciam Feynmanoveho poruchoveho poctu v QED a cast venovana metode Feynmanovych funkcionalnych integralov.

3. Elementarne procesy v QED
- amplituda rozptylu a diferencialny ucinny prierez
- kinematika dvojcasticoveho rozptylu, nestabilne castice a sirka rozpadu
- rozptyl $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, kvadrat amplitudy rozptylu
- nepolarizovany rozptyl a jeho diferencialny ucinny prierez
- rozptyl $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$, kvadrat amplitudy rozptylu
- krizova symetria, Mandelstamove premenne, skrizene procesy
- Comptonov rozptyl $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$
- polarizacna suma pre fotony - Wardova identita
- Kleinova-Nishinova formula pre ucinny prierez nepolarizovaneho $e^- \gamma$ roztylu
- anihilacia paru $e^- e^- \rightarrow \gamma\gamma$ a krizova symetria, diferencialny ucinny prierez

1 Diracovo pole a relativisticka invariantnost

1. Lorentzove transformacie

Body Minkowskeho casopriestoru budeme znacit ako

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}), \tag{1.1}$$

kde $t = x^0$ oznacuje cas a $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ urcuje polohu v priestore. Skalarny sucin 4-vektorov $x = (x^\mu)$ a $y = (y^\mu)$ v Minkowskeho casopriestore je definovany vztahom

$$x.y = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu ,$$

kde

$$y_\mu = \eta_{\mu\nu} y^\nu , \quad y_\mu = \eta_{\mu\nu} y^\nu .$$

Index sme znizili resp. zvysili pomocou relativistckeho metrickeho tenzora $(\eta_{\mu\nu}) =$ diag$(1, -1, -1, -1)$ resp. inverzneho tenzora $(\eta^{\mu\nu}) =$diag$(1, -1, -1, -1))$: $\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$. Vo vyrazoch, v ktorych sa vyskytuje rovnaky horny a dolny index, napr. ν, automaticky scitame cez $\nu = 0, 1, 2, 3$. Tomuto sa hovori *sumacna konvencia.*

Uvazujme transformaciu lubovolnych dvoch vektorov

$$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu , \quad y^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu ,$$

ktora zachovava relativisticky skalarny sucin $x.y = x^T \eta y$. Zapisali sme ho v maticovom tvare: y oznacuje stlpec so 4 zlozkami y^μ, x^T riadok so 4 zlozkami x^μ a η je 4×4 matica so zlozkami $\eta_{\mu\nu}$. Zapisme aj uvazovane transformacie v maticovom tvare $x \mapsto x' = \Lambda x$ a $y \mapsto y' = \Lambda y$. Poziadavka invariantosti skalarne sucinu naklada podmienku na pripustne matice Λ:

$$x^T \eta y = x'^T \eta y' = x^T \Lambda^T \eta \Lambda y \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta .$$

Tu Λ^T je transponovana matica k matici Λ. Taketo matice tvoria Lieovu grupu, ktora sa nazyva Lorentzova grupa. Prvky Lorentzovej grupy, ktore mozno vyjadrit v exponencialnom tvare

$$\Lambda = \exp(-i\omega J) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\beta = (\exp(-i\omega J))^\alpha{}_\beta$$

odpovedaju *vlastnym* Lorentzovym transformaciam. Grupa vlastnych Lorentzovych transformacii sa zvykne oznacovat ako $SO(3, 1)$. Symbol ω exponente oznacuje realne cislo a J je 4×4 matica, ktora splna podmienku

$$J^T \eta + \eta J = 0 .$$

Tato podmienka je priamy dosledok (1.5) a (1.6).

Kazdu vlastnu Lorentzovu transformacie mozno ziskat zlozenim rotacii v priestore (na ich popis treba 3 parametre - 3 Eulerove uhly $\theta,\ \phi,\ \psi$) a boostov (prechodom do ineho systemu pohybujuceho sa rychlostou $\vec{v}$, co predstavuje tiez 3 parametre).

Vhodne parametrizaciu Lorentzovych transformacii $\omega_{\mu\nu}$ definujeme pomocou tramsformacii v $(\mu\nu)$-rovine v Minkowskeho priestore. Pre infinitezimalne transformacie (zadane velmi malymi $\omega_{\mu\nu}$), plati

$$x_\alpha \ \mapsto \ x_\alpha \ + \ \omega_{\alpha\beta}\, x^\beta\,, \quad \omega_{\alpha\beta} \ = \ -\omega_{\alpha\beta}\,.$$

Pretoze $\omega_{\mu\nu} \ = \ -\,\omega_{\mu\nu}$, $\mu\,,\nu \ = \ 0,1,2,3,4$, mame prave sest parametrov. Z druhej strany,

$$x_\alpha \ \mapsto \ \Big(\exp\,(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu})\Big)^{\alpha}_{\ \ \beta} x^\beta$$

$$= \ \Big(\delta^\alpha_\beta \ - \ \frac{i}{2}(J^{\mu\nu})^\alpha_{\ \ \beta} \ + \ \ldots\Big)\, x^\beta \ = \ x^\alpha \ - \ \frac{i}{2}(J^{\mu\nu})^\alpha_{\ \ \beta}\, x^\beta \ + \ \ldots\,.$$

Porovnanim s predchadzajucim vyrazom, vidime, ze sest matic 4×4 $J^{\mu\nu} \ = \ -\,J^{\mu\nu}$, ktore sa nazyvaju generatory Lorentzovych transformacii, maju svoje $\alpha\beta$ prvky zadane takto:

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \ = \ i\,\left(\delta^\mu_\alpha\,\delta^\nu_\beta \ - \ \delta^\nu_\alpha\,\delta^\mu_\beta\right)\,.$$

Lorentzova grupa je preto 6 parametricka a vo vseobecnosti mozeme pisat:

$$\omega J \ = \ \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu}\,, \quad \mu\,,\nu \ = \ 0,1,2,3,4\,.$$

Lahko sa mozno presvedcit, ze matice $J_{\mu\nu}$ splnaju komutacne vztahy pre generatory Lorentzovej grupy, t.j. definicne vztahy Lieovej algebry $so(3,1)$:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] \ = \ -\,i\,(\eta_{\nu\rho}J^{\mu\sigma} \ - \ \eta_{\mu\rho}J^{\nu\sigma} \ + \ \eta_{\mu\sigma}J^{\nu\rho} \ - \ \eta_{\nu\sigma}J^{\mu\rho})\,.$$

Poznamenajme este, ze plati

$$J^{\mu\nu}\,x^\rho \ = \ i\,(\eta^{\mu\rho}\,x^\nu \ - \ \eta^{\nu\rho}\,x^\mu)\,.$$

Tento vztah je ekvivalentny vztahu

$$x^\mu \ \mapsto \ \Lambda^\mu_{\ \ \nu}\,x^\nu\,, \quad \Lambda \ = \ \exp\,(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu})$$

ktory vztah hovori, ze stvorica $x \ = \ (x^\mu)$ sa transformuje ako relativisticky 4-vektor.

Relativisticke skalarne pole $\phi(x)$ je (realna alebo komplexna) funkcia definovana v Minkowskeho casopriestore: $x \ \mapsto \ \phi(x)$. Pri Lorentzovej transformacii Λ sa pole ϕ transformuje takto:

$$\phi(x) \ \mapsto \ T(\Lambda)\phi(x) \ = \ \phi(\Lambda^{-1}x)\,.$$

Tu Λ^{-1} oznacuje inverznu maticu k matici Λ. Symbol $T(\Lambda)$ oznacuje linearny operator definovany poslednou rovnostou.

Priradenie $\Lambda \mapsto T(\Lambda)$ je reprezentaciou Lorentzovej grupy, lebo "kopiruje" grupovy sucin:

$$T(\Lambda_1)\, T(\Lambda_2) \;=\; T(\Lambda_1 \Lambda_2)\,, \quad T(\mathbf{1}) \;=\; \mathbf{I}\,.$$

Symbol $\mathbf{1}$ oznacuje 4×4 jednotkovu maticu (odpovedajucu jednotke v grupe) a symbol I je jednotkovy operator odpovedajuci identickemu zobrazeniu: $\phi(x) \mapsto \phi(x)$.

Pri infinitezimalnej Lorentzovej transformacii $x_\alpha \;\mapsto\; x_\alpha \,+\, \omega_{\alpha\beta}\, x^\beta$ pole sa transformuje takto:

$$\phi(x) \;\mapsto\; \phi(\Lambda^{-1} x) \;=\; \phi(x_\alpha \,-\, \omega_{\alpha\beta}\, x^\beta)$$

$$=\; \phi(x) \;-\; \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu}\, (\mathcal{J}^{\mu\nu} \phi)(x)\,.$$

Ak porovname me Taylorov rozvoj prostredneho vyrazu do 1. radu s poslednym riadkom, obdrzime formulu pre generatory Lorentzovych transformacii $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, ktore na polia posobia ako diferencialne operatoru 1. radu:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} \;=\; -i\,(x^\mu\, \partial^\nu \;-\; x^\nu\, \partial^\mu)\,, \quad \partial^\nu \;=\; \eta^{\mu\nu}\, \partial_\nu\,,$$

kde $\partial_\nu \;=\; \partial_{x^\nu}$. Lahko sa mozno presvedcit, ze diferencialne operatory $\mathcal{J}^{\mu\nu} \;=\; -\mathcal{J}^{\nu\mu}$ opat splnaju komutacne vztahy pre generatory Lorentzovej grupy (definicne vztahy Lieovej algebry $so(3,1)$).

Viackomponentne relativisticke pole. Uvazujme n-komponentne pole

$$\psi(x) \;=\; \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

so zlozkami $\psi_a(x)$, $a \;=\; 1, \ldots, n$. Predpokladajme, ze pri Lorentzovej trasformacii Λ zlozky pola sa transformuju takto:

$$\psi_a(x) \;\mapsto\; S_a{}^b(\Lambda)\, \psi_b(\Lambda^{-1} x) \;\equiv\; (T(\Lambda)\, \psi(x))_a\,.$$

Zobrazenie $\psi(x) \mapsto T(\Lambda)\, \psi(x)$ generuje reprezentaciu Lorentzovej grupy, t.j.

$$T(\Lambda_1)\, T(\Lambda_2) \;=\; T(\Lambda_1\, \Lambda_2)\,, \quad T(\mathbf{1}) \;=\; I$$

prave vtedy, ked $\Lambda \;\mapsto\; S_a^b(\Lambda)$ je jej $(n \times n)$-maticova reprezentacia Lorentzovej grupy, t.j.

$$S_a{}^b(\Lambda_1)\, S_b{}^c(\Lambda_2) \;=\; S_a{}^c(\Lambda_1\, \Lambda_2)\,, \quad S_a{}^b(\mathbf{1}) \;=\; \delta_a^b\,.$$

Ako dolezity priklad moze sluzit *relativisticke vektorove pole* $V^\mu(x)$, ktore pri Lorentzovych transformaciach sa transformuje takto:

$$V^\mu(x) \;\mapsto\; \Lambda^\mu{}_\nu\, V^\nu(\Lambda^{-1}x)\,.$$

Castice a relativisticke polia. V ramci kvantovej fyziky volna relativisticka castica s hybnostou $\vec{p}$ a energiou $E_{\vec{p}}$ je popisana de Broglieho vlnovou funkciou

$$e^{-ip.x} \;=\; e^{-\,iE_p t\,+\,i\vec{p}.\vec{x}}\,, \quad E_p \;\equiv\; E_{\vec{p}} \;=\; \sqrt{\vec{p}^2 \,+\, m^2}\,,$$

kde m kludova hmota uvazovanej castice a kvoli zjednodusenie zapisu piseme E_p miesto $E_{\vec{p}}$. Subor takychto castic s roznymi hybnostami, ktore nemaju vnutorne stupne volnosti, je popisany relativistickym skalarnym polom

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\left(a_p\, e^{-ip.x} \;+\; b_p^*\, e^{+ip.x}\right)\,,\;\; p \;=\; (E_p,\, \vec{p})\,,$$

t.j. linearnou kombinaciou prislusnych de Broglieho vlnovych funkcii a komplexne zdruzenych vlnovych funkcii (ciselny faktor pred integralom a faktor $\sqrt{2E_p}$ v miere je len vhodnou konvenciou):

• prvy podintegralny clen popisuje subor volnych castic s hybnostou $\vec{p}$, komplexny koeficient a_p je umerny amplitude pravdepodobnosti, ze a-castica s touto hybnostou sa nachadza v subore,

• druhy podintegralny clen je linearnou kombinaciou zdruzenych vlnovych funkcii b-castic s hybnostou $\vec{p}$, koeficient b_p je umerny amplitude pravdepodobnosti, ze dana b-castica sa nachadza v subore.

Poznamka: Pre *komplexne* skalarne pole nie je ziadna vazba medzi koeficientami a_p a b_p. Mame dva druhy castic: a-castice a b-castice, ktore su *anticastice* k a-casticiam. Castice a

anticastice maju opacne znamienka vsetkych nabojov. Pre *realne* skalarne pole mame podmienku $a_p = b_p$ a len jeden druh castic: v tomto pripade castica a je identicka so svojou anticasticou, ich naboje su nulove.

Volne skalarne pole je riesenim Kleinovej-Gordonovej rovnice (K-G rovnica)

$$(\partial_\mu\, \partial^\mu \,+\, m^2)\phi(x) \;=\; 0\,.$$

Relativisticka invariantnost K-G rovnice. Pri Lorentzovej transformacii Λ sa pole ϕ transformuje takto: $\phi(x) \mapsto \phi_\Lambda(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$, kde

$$\phi(\Lambda^{-1}x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\left(a_p\, e^{-ip.\Lambda^{-1}x} \;+\; b_p^*\, e^{+ip.\Lambda^{-1}x}\right)\,.$$

Ak uvazime,

• ze $p.\Lambda^{-1}x \;=\; p^T\eta\,\Lambda^{-1}x \;=\; p^T\,\Lambda^T\eta\,x \;=\; (\Lambda p)^T\eta\,x$,

• a to, ze pri substitucii $p' \;=\; \Lambda p$

$$\frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \;=\; \frac{d^3\vec{p}'}{2E_{p'}}$$

tak mozeme pisat

$$\phi_\Lambda(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_{p'}}}\left(a'_{p'}\,e^{-ip'.x} \;+\; b'^*_{p'}\,e^{+ip'.x}\right)\,,$$

kde

$$a'_{p'} \;=\; \sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\,a_p\,,\quad b'_{p'} \;=\; \sqrt{\frac{E_{p'}}{E'_p}}\,b_p\,,\quad p' \;=\; \Lambda p\,.$$

Vidime, ze $\phi_\Lambda(x)$ je opat riesenim povodnej K-G rovnice

$$(\partial_\mu\,\partial^\mu \;+\; m^2)\phi_\Lambda(x) \;=\; 0\,.$$

so zmenenymi amplitudami pravdepodobnosti: mame reprezentaciu Lorentzovej grupy v priestore poli. V skutocnosti mame dve nezavisle unitarne reprezentacie odpovedajuce casticiam resp. anticasticiam: koeficienty a_p a b_p su nezavisle a unitarita plynie z toho, ze integralna miera je pozitivne definitna.

2. Diracova rovnica

Relativisticku rovnicu pre volnu casticu, K-G rovnicu, prvy napisal E. Schrödinger vyuzijuc to, ze pri kvantovani v Hamiltoniane treba nahradit energiu E a hybnost $\vec{p}$ diferencialnymi operatormi podla pravidla: $E \;\mapsto\; i\partial_t$ a $p_j \;\mapsto\; -i\partial_j$, kde $\partial_j \;=\; \partial_{x^j}$, $j \;=\; 1,2,3$. Pretoze mal problemy s relatistickou formulaciou problemu atomu vodika, pouzil nerelativisticku formu pre energiu elektronu v Coulombovskom poli protonu. Publikoval a riesil svoju znamu Schrodingerovu rovnicu.

Zanedlho nato publikovali relativisticku verziu kvantovej rovnice Klein a Gordon (bola znama aj V. A. Fockovi). To, ze K-G rovnica obsahuje casovu derivaciu v 2. rade (a z dovodov relatickej invariantnosti vystupuju aj derivacie podla polohy v 2. rade), vedie k roznym tazkostiam s kvantovo-mechanickou intepretaciou f ormalizmu.

Toto motivovalo P. A. M. Diraca hladat relatisticku rovnicu pre volnu casticu s hmotou m, ktora bude obsahovat derivacie podla priestorocasovych premennych v 1. rade. Dirac postuloval svoju rovnicu v tvare

$$(i\gamma^\mu\,\partial_\mu \;-\; m)\,\psi(x) \;=\; 0\,,\quad \partial_\mu \;=\; \partial_{x^\mu}\,,$$

kde koeficienty γ^μ su nezname konstantne objekty. Dirac i ch urcil z poziadavky aby exisovala rozumna casticova interpretacia rieseni jeho rovnice, t.j. aby riesenia Diracovej rovnice boli zaroven rieseniami K-G rovnice. Ak vynasobime Diracovu rovnicu operatorom $(i\gamma^\nu\,\partial_\nu\,+\,m)$, dostaneme rovnicu 2. radu

$$(i\gamma^\nu\,\partial_\nu\,+\,m)(i\gamma^\mu\,\partial_\mu\,-\,m)\,\psi(x)\;=\;0\,,$$

$$(\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\;+\;m^2)\,\psi(x)\;=\;0\,.$$

Pretoze, diferencialne operatory ∂_μ medzi sebou komututuju, mozme pisat

$$\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\;=\;\frac{1}{2}\,\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\,\partial_\nu\,\partial_\mu\,.$$

Vidime,ze posledna rovnica bude konsistentna s K-G rovnicou ak koeficienty γ^μ splnaju *antikomutacne* vztahy:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\;\equiv\;\gamma^\mu\,\gamma^\nu\;+\;\gamma^\nu\,\gamma^\mu\;=\;2\,\eta^{\mu\nu}\,,$$

lebo

$$\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\;=\;\frac{1}{2}\,\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\,\partial_\nu\,\partial_\mu\;=\;\eta^{\nu\mu}\,\partial_\nu\,\partial_\mu\;=\;\partial^\mu\,\partial_\mu\,.$$

Jedna sa o dobre zname definicne vztahy pre generatory Cliffordovej algebry:
- pre $\mu\neq\nu$ generatory antikomutuju: $\gamma^\mu\,\gamma^\nu\;=-\gamma^\nu\,\gamma^\mu$, a
- su normalizovane podmienkami: $(\gamma^0)^2\;=\;+1$ a $(\gamma^i)^2\;=\;-1$, $i\;=\;1,2,3$.

Algebru γ-matic mozno generovat 4×4 komplexnymi maticami, ktore sa nazyvaju Diracove matice. Vo Weylovej (chiralnej) baze su zadane v 2×2 blokovom zapise takto:

$$\gamma^0\;=\;\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \gamma^j\;=\;\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^j\\ -\sigma^j & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad j\;=\;1,2,3\,.$$

Vystupujuce prvky su vsetko 2×2 matice: $\mathbf{0}$ je nulova matica, $\mathbf{1}$ je jednotkova matica a σ^j, $j\;=\;1,2,3$, su zname Pauliho matice,

$$\sigma^1\;=\;\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2\;=\;\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^3\;=\;\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Poznamka: Dirac pouzil inu realizaciiu, γ-matic:

$$\gamma^0\;=\;\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix},\quad \gamma^j\;=\;\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^j\\ -\sigma^j & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad j\;=\;1,2,3\,.$$

Tato Diracova (standartna) realizacia je ekvivalentna Weylovej. V dalsom budeme pouzivat Weylovu reprezentaciu.

Suciny a linearne kombinacie γ-matic generuju algebru vsetkych 4×4 matic. Sestnast matic tvoriacich jej bazu sa zvykne vyberat takto:

$$\mathbf{1}\,,\;\;\gamma^\mu\,,\;\;S^{\mu\nu}\;=\;\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

$$\tilde{\gamma}^\mu \;=\; \gamma^5\,\gamma^\mu\,,\quad \gamma^5 \;=\; i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,,$$

kde indexy $\mu\,,\nu$ nadobudaju hodnoty 0,1,2,3:

• tu symbol **1** oznacuje 4×4 jednotkovu maticu (nezavadzame pre nu nove znacenie - z kontextu vzdy bude zrejme o aku jednotkovu maticu sa jedna),

• 4 matice γ^μ boli zavedene vyssie; pretoze

$S^{\mu\nu} \;=\; -S^{\nu\mu}$, mame 6 nezavislych $S^{\mu\nu}$ matic; treba este pridat 4 matice $\tilde{\gamma}^\mu$ a maticu $\tilde{\gamma}^4 \;=\; -i\gamma^5$.

Vo Weylovej baze tieto matice explitne maju tvar

$$S^{0j} \;=\; -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^j \end{pmatrix},\quad S^{ij} \;=\; \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^k \end{pmatrix} \;\equiv\; \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,\Sigma^k\,,$$

$$\tilde{\gamma}^0 \;=\; -\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\quad \tilde{\gamma}^j \;=\; -\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ \sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix},\quad \tilde{\gamma}^4 \;=\; i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Vsetky latinske indexy $i, j, j, \ldots$, nadobudaju hodnoty $1, 2, 3$ (sumacna konvencia sa predpoklada aj pre ne). Tieto matice su vybrate tak, ze vyrazy $\bar{\psi}(x)\,A\,\psi(x)$ su realne, v pripade, ze A je niektora zo 16 matic **1**, γ^μ, $S^{\mu\nu}$, $\tilde{\gamma}^\mu$ alebo $\tilde{\gamma}^4$.

Uloha: Najdite tvar tychto matic v Diracovej realizacii.

Vlastnosti γ-matic.

• Hermitovske zdruzenie

$$\gamma^{\mu\dagger} \;=\; \gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0 \quad\Leftrightarrow\quad \gamma^{0\dagger} \;=\; \gamma^0\,,\quad \gamma^{j\dagger} \;=\; \gamma^j\,,\quad j \;=\; 1,2,3\,.$$

• Vlastnosti matice γ^5

$$(\gamma^5)^2 \;=\; \mathbf{1}\,,\quad \gamma^{5\dagger} \;=\; \gamma^5\,,\quad \{\gamma^5,\gamma^\mu\} \;=\; 0\,,\quad [\gamma^5, S^{\mu\nu}] \;=\; 0\,.$$

Spinorove reprezentacie Lorentzovej grupy.

Pomocou antikomutacnych vztahov pre Diracove γ^μ matice, lahko mozno ukazat, ze matice $S^{\mu\nu}$, $\mu,\nu \;=\; 0,1,2,3$, splnaju komutacne vztahy Lieovej algebry L orentzovej grupy:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] \;=\; -\,i\,(\eta_{\nu\rho}S^{\mu\sigma} \,-\, \eta_{\mu\rho}S^{\nu\sigma} \,+\, \eta_{\mu\sigma}S^{\nu\rho} \,-\, \eta_{\nu\sigma}S^{\mu\rho})\,.$$

Mame, teda 4-rozmernu reprezentaciu Lorentzovej grupy v priestore $\mathbf{C}^4$, ktora je reduducibilna, lebo generatory $S^{\mu\nu}$ maju 2×2-blok diagonalny tvar:

• 2×2 matice v lavom hornom rohu tvoria 2-rozmernu spinorovu reprezentaciu Lorentzovej grupy (fundametalnu reprezentaciu grupy $SL(2, \mathbf{C})$ 2×2 matic s jednotkovym determinantom),

• 2×2 matice v pravom dolnom rohu tvoria 2-rozmernu konjugovanu spinorovu reprezentaciu Lorentzovej grupy (anti-fundametalnu reprezentaciu grupy $SL(2, \mathbf{C})$).

Linearne kombinanacie matic $S^{\mu\nu}$ (a ich exponenty) nemusia posobit len v priestore $\mathbf{C}^4$, ale mozu posobit aj v priestore matic. Ak A je 4×4 matica, potom $S^{\mu\nu}$ posobia ako komutatory (adjungovana alebo pridruzena reprezentacia):

$$A \;\mapsto\; [S^{\mu\nu}, A]\,.$$

Specialne mame,

$$[S^{\mu\nu}, \mathbf{1}] \;=\; 0\,, \quad [S^{\mu\nu}, \gamma^5] \;=\; 0\,.$$

Toto znamena, ze jednotkova matica $\mathbf{1}$ a matica γ^5 sa transformuju ako skalary pri pridruzenom posobeni $S^{\mu\nu}$.

Podobne vztahy

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \;&=\; (\eta_{\mu\rho}\,\gamma^\nu \;-\; \eta_{\nu\rho}\,\gamma^\mu)\,,\\ [S^{\mu\nu}, \tilde\gamma^\rho] \;&=\; (\eta_{\mu\rho}\,\tilde\gamma^\nu \;-\; \eta_{\nu\rho}\,\tilde\gamma^\mu)\,,\end{aligned}$$

vyjadruju to, ze stvorice γ^μ a $\tilde\gamma^\mu$) pri pridruzenom posobeni sa transformuju ako stvorvektory.

Nakoniec, komutacne vztahy pre $S^{\mu\nu}$, hovoria aj to, subor velicin $S^{\mu\nu}$ sa transformuje ako (antisymetricky) tenzor.

Transformacne vlastnosti Diracovho (spinoroveho) pola.

Postulujeme, ze pri Lorentzovej transformacii Λ, Diracovo pole $\psi(x)$ sa transformuje ako:

$$\psi(x) \;\mapsto\; S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)\,,$$

$$S(\Lambda) \;=\; S(\exp{(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,S^{\mu\nu})})\,, \quad \text{pre} \quad \Lambda \;=\; \exp{(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu})}\,.$$

Podla toho co bolo povedane, jedna sa o reprezentaciu Lorentzovej grupy v priestore spinorov $\psi(x)$.

Ukazeme ze, je vyhodne zaviest Diracovsky zdruzeny spinor

$$\bar\psi(x) \;=\; \psi(x)^\dagger\,\gamma^0 \;=\; (\psi_3^*(x),\, \psi(x)_4^*,\, \psi_1^*(x),\, \psi(x)_2^*)$$

(posledny vyraz plati vo Weylovej reprezentacii γ-matic). Ak $\psi(x)$ je riesenim Diracovej rovnice, potom Diracovsky zdruzeny spinor splnuje zdruzenu Diracovu rovnicu:

$$i(\partial_\mu\,\bar\psi)(x)\,\gamma^\mu \;=\; -\,m\,\bar\psi(x)\,.$$

Dokaz lahko plnie z Diracovej rovnice pre $\psi(x)$ zapisanej v tvare

$$i\gamma^\mu\,(\partial_\mu\,\psi)(x) \;=\; m\,\psi(x)\,.$$

Jej hermitovskym zdruzenim dostaneme

$$-i\partial_\mu\,\psi^\dagger(x)\,\gamma^{\mu\dagger} \;=\; m\,\psi^\dagger(x)\,.$$

Ak teraz tuto rovnicu vynasobime sprava maticou γ^0 a vyuzijeme vztahy

$$(\gamma^0)^2 \;=\; \mathbf{1}\,, \quad \gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0 \;=\; \gamma^{\mu\dagger}\,, \quad \psi^\dagger(x)\,\gamma^0 \;=\; \bar\psi(x)\,,$$

hned prideme k zdruzenej Diracovej rovnici.

Pri Lorentzovych transformaciach zdruzeny Diracov spinor sa transformuje takto:

$$\bar\psi(x) \;=\; \psi(x)^\dagger\,\gamma^0 \;\mapsto\; \psi(\Lambda^{-1}x)^\dagger\,S^\dagger(\Lambda)\,\gamma^0 \;=\; \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\gamma^0\,S^\dagger(\Lambda)\,\gamma^0\,.$$

Ak vyjadrime $S(\Lambda) \;=\; S(\exp{(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,S^{\mu\nu})})$ a vyuzijeme to, ze

$$\gamma^0\,S^{\mu\nu\,\dagger}\,\gamma^0 \;=\; -\,S^{\mu\nu}$$

dostaneme k vztahu $\gamma^0\,S^\dagger(\Lambda)\,\gamma^0 \;=\; S^{-1}(\Lambda)$. Toto uz dava hladany transformacny zakon pre zdruzeny Diracov spinor:

$$\bar\psi(x) \;\mapsto\; \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,S^{-1}(\Lambda)\,.$$

Transformacie bilinearnych vyrazov. Transformacne zakony spinorov a zdruzenych spinorov

$$\psi(x) \;\mapsto\; S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)\,, \quad \bar\psi(x) \;\mapsto\; \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,S^{-1}(\Lambda)\,,$$

dovoluju odvodit transformacne zakony bilinearnych vyrazov:

$$\begin{array}{rcl}
S(x) \;=\; \bar\psi(x)\,\psi(x) & \mapsto & \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; S(\Lambda^{-1}x) \\
P(x) \;=\; \bar\psi(x)\,i\gamma^5\,\psi(x) & \mapsto & \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,i\gamma^5\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; P(\Lambda^{-1}x) \\
V^\mu(x) \;=\; \bar\psi(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) & \mapsto & \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\psi(\Lambda^{-1}x), \gamma^\nu\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\,V^\nu(\Lambda^{-1}x) \\
A^\mu(x) \;=\; \bar\psi(x)\,\gamma^5\gamma^\mu\,\psi(x) & \mapsto & \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,\gamma^5\gamma^\nu\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\,A^\nu(\Lambda^{-1}x) \\
T^{\mu\nu}(x) \;=\; \bar\psi(x)\,S^\mu\nu\,\psi(x) & \mapsto & \Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma\,\bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,S^\rho\sigma\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; \Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma\,T^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)
\end{array}$$

1. Transformacne pravidla pre $S(x)$ a $P(x)$ hovoria, ze prislusne bilinearne vyrazy sa transformuju ako skalarne polia. Prvy je priamym dosledkom transformacnych pravidiel pre $\bar\psi(x)$ a $\psi(x)$, pri odvodeni druheho este treba vyuzit vztah $\gamma^5\,S(\Lambda) \;=\; S(\Lambda)\,\gamma^5$.

2. Transformacne pravidla pre $V^\mu(x)$ a $A^\mu(x)$ hovoria, ze prislusne bilinearne vyrazy sa transformuju ako vektorove polia. Okrem transformacnych pravidiel pre $\bar{\psi}(x)$ a $\psi(x)$, treba pri prvom vyuzit vztah

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu\,,$$

a pri druhom aj to, ze $S(\Lambda)$ komutuje s γ^5.

3. Transformacne pravidlo pre $T^{\mu\nu}(x)$ hovori, ze $T^{\mu\nu}(x)$ sa transformuje ako (antisymetricky) tenzor 2. radu. Pri odvodeni staci vyuzit explicitnu formulu generatorov $S^\mu\nu$ a formulu $S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$.

Dodatok - Fierzove identity

Relativisticka invariantnost Diracovej rovnice. Ukazeme, ze pole

$$\psi_\Lambda(x) \;=\; S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x)$$

je riesenim Diracovej rovnice

$$(i\gamma^\mu\,\partial_\mu \,-\, m)\,\psi_\Lambda(x) \;=\; 0\,,$$

Lavu stranu upravime nasledovne

$$(i\gamma^\mu\,\partial_\mu \,-\, m)\,S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; S(\Lambda)\,(i\Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu\,\partial_\nu \,-\, m)\,\psi(\Lambda^{-1}x)\,,$$

kde sme vyuzili vyssie uvedeny vztah (*). Zavedeme novu premennu $x' \;=\; \Lambda^{-1}x$ a vyjadrime parcialnu derivaciu

$$\partial'_\nu \;=\; \partial_{x'^\nu} \;=\; (\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu\,\partial_\mu \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\,\partial_\mu\,.$$

Tatoa rovnost je dosledkom vztahu $\eta\,\Lambda \;=\Lambda^{-1T}\eta$. Vidime, ze Diracova rovnica pre $\psi_\Lambda(x)$ je ekvivalentna rovici

$$S(\Lambda)\,(i\gamma^\nu\,\partial'_\nu \,-\, m)\,\psi(x') \;=\; 0\,.$$

Posledna rovnost plati v dosledku toho, ze $\psi(x)$ je riesenim Diracovej rovnice.

Casticove riesenia Diracovej rovnice. Riesenia hladame v tvare rovinnych vln, de Broglieho vlnovych funkcii pre volnu casticu s hmotou m, danou hybnostou $\vec{p}$ a energiou $E_p \;=\; \sqrt{\vec{p}^2 \,+\, m^2} \,>\, 0$:

$$\psi(x) \;=\; u(p)\,e^{-ip.x}\,,\quad p \;=\; (E_p, \vec{p})\,.$$

Po dosadeni $\psi(x)$ a vyuziti toho, ze $i\partial_\mu\, e^{-ip.x} \;=\; p_\mu\, e^{-ip.x}$, dostaneme pre spinor $u(p)$, algebraicku rovnicu

$$(\gamma^\mu\, p_\mu \;-\; m)\, u(p) \;=\; 0\,.$$

Ak 4-komponentny spinor $u(p)$ zapiseme pomocou dvoch 2-komponentnych spinorov $u_L(p)$ a $u_R(p)$

$$u(p) \;=\; \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix}\,,$$

a vyjadrime matice γ^μ vo Weylovej reprezentacii dostaneme sustavu dvoch zviazanych algebraickych rovnic (vynechavame argument v $u_{L,R}(p)$ a piseme strucne E namiesto E_p):

$$\begin{pmatrix} -m & E-\vec{p}.\vec{\sigma} \\ E+\vec{p}.\vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{rl} (E-\vec{p}.\vec{\sigma})\, u_R &=\; m\, u_L \\ (E+\vec{p}.\vec{\sigma})\, u_L &=\; m\, u_R \end{array}\,.$$

S vyuzitim vztahov

$$(E-\vec{p}.\vec{\sigma})\,(E+\vec{p}.\vec{\sigma}) \;=\; (E+\vec{p}.\vec{\sigma})\,(E-\vec{p}.\vec{\sigma}) \;=\; E^2 \;-\; \vec{p}^2 \;=\; m^2$$

lahko sa mozno presvedcit, ze riesenie algebraickych rovnic je dane ako

$$u_L(p) \;=\; \sqrt{E-\vec{p}.\vec{\sigma}}\,\xi\,, \quad u_R(p) \;=\; \sqrt{E+\vec{p}.\vec{\sigma}}\,\xi\,,$$

kde ξ je lubovolny *konstantny* 2-komponentny spinor. Druhe odmocniny $\sqrt{E\mp\vec{p}.\vec{\sigma}}$ chapeme v zmysle Taylorovych rozvojov

$$\sqrt{E\mp\vec{p}.\vec{\sigma}} \;=\; \sqrt{E}\,\sqrt{1\mp E^{-1}\vec{p}.\vec{\sigma}} \;=\; \sqrt{E}\,\left(1\,\mp\,\frac{1}{2}\,\frac{\vec{p}.\vec{\sigma}}{E}\;\;\ldots\right)\,.$$

Pretoze, vlastne hodnoty matice $E^{-1}\vec{p}.\vec{\sigma}$ su v absolutnej hodnote mensie ako 1, mocninny rozvoj v $(E^{-1}\vec{p}.\vec{\sigma})^n$ je dobtre definovany.

Linearne nezavisle spinory ξ su dva, oznacme ich ξ^s, $s \;=\; \pm 1/2$. Vyberieme ich ortonormalne, takze splnaju

$$\xi^{r\dagger}\xi^s \;=\; \delta^{rs}\,, \quad r, s \;=\; \pm 1/2\,.$$

Dostaneme potom 2 linearne nezavisle casticove riesenia Diracovej rovnice

$$u^s(p) \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{E-\vec{p}.\vec{\sigma}}\,\xi^s \\ \sqrt{E+\vec{p}.\vec{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \quad s \;=\; \pm 1/2\,,$$

ktore splnaju normalizacne podmienky

$$\bar{u}^s(p)\, u^s(p) \;=\; 2m\,\delta^{rs}\,.$$

Zdruzene riesenia, popisujuce anticastice s danou energiou $E_{\vec{p}}$ a hybnostou $\vec{p}$, hladame v tvare

$$\psi(x) \;=\; v(p)\, e^{+ip.x}\,, \quad p \;=\; (E_{\vec{p}}, \vec{p})\,.$$

Rovnakym postupom ako vyssie najdeme dve linearne nezavisle zdruzene (anticasticove) riesenia

$$v^s(p) \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \eta^s \\ -\sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \eta^s \end{pmatrix}, \quad s \;=\; \pm 1/2\,,$$

ktore linearne zavisia od ortonormalnej baze konstantnych spinorov η^s, $s = \pm 1/2$, t.j.

$$\eta^{r\dagger} \eta^s \;=\; \delta^{rs}\,, \quad r, s \;=\; \pm 1/2\,.$$

Upozornujeme, ze bazy $\{\xi^s\}$ a $\{\eta^s\}$ mozno volit uplne nezavisle. Riesenia $v^s(p)$ su normovane (az na znamienko) podobne ako resenia $u^s(p)$ a su na ne ortogonalne:

$$\bar{v}^s(p)\, v^s(p) \;=\; -2m\, \delta^{rs}\,,$$

$$\bar{u}^s(p)\, v^s(p) \;=\; \bar{v}^s(p)\, u^s(p) \;=\; 0\,.$$

Vseobecne riesenie Diracovej rovnice $\psi(x)$ je dane ako linearna kombinacia prislusnych casticovych riesni

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^s\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b_p^{s\dagger}\, v^s(p)\, e^{ipx} \right)\,.$$

Podobne prislusne Diracovsky zdruzene riesenie je dane ako

$$\bar{\psi}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_p^s\, \bar{v}^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; a_p^{s\dagger}\, \bar{u}^s(p)\, e^{ipx} \right)$$

Priklad: Dokazte vztahy

$$u^{r\dagger}(\vec{p})\, u^s(\vec{p}) \;=\; v^{r\dagger}(\vec{p})\, v^s(\vec{p}) \;=\; 2\, E_p\, \delta^{rs},$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p})\, v^s(-\vec{p}) \;=\; v^{r\dagger}(-\vec{p})\, u^s(\vec{p}) \;=\; 0\,.$$

Pouzili sme oznacenia $u^s(\vec{p}) = u^s(p)$ pre $p = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$, a podobne $v^s(-\vec{p}) = v^s(p')$ pre $p' = (E_{\vec{p}}, -\vec{p})$. Taketo oznacenie v dalsom budeme pouzivat vzdy, ked sa to hodi.

Spinove sumy - relacie uplnosti rieseni Diracovej rovnice. Budeme sa zaujimat o vypocet vyrazov

$$\sum_{s=\pm 1/2} u_a^s(p)\, \bar{u}_b^s(p)\,, \qquad \sum_{s=\pm 1/2} v_a^s(p)\, \bar{v}_b^s(p)\,,$$

kde indexy a, $b = 1, 2, 3, 4$, indexuju 4 zlozky spinorov $u^s(p)$, $v^s(p)$ a Diracovsky zdruzenych spinorov $\bar{u}^s(p)$, $\bar{v}^s(p)$. Uvedene sumy su teda 4×4 matice.

Vsimnime si najprv prvu sumu

$$\sum_s u^s_a(p)\, \bar{u}^s_b(p) \;=\; \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \xi^s \\ \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \xi^s \end{pmatrix}_a \left(\xi^{s\dagger} \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}},\, \xi^{s\dagger} \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}}\right)_b .$$

Ak uvazime relacie uplnosti $\sum_s \xi^s_\alpha\, \xi^{s\dagger}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, α, $\beta = 1, 2$, pre ortonormalnu bazu 2-komponentnych spinorov $\{\xi^s\}$, tak dostaneme

$$\sum_s u^s_a(p)\, \bar{u}^s_b(p) \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}} & \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}} \\ \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}} & \sqrt{E + \vec{p}.\vec{\sigma}}\, \sqrt{E - \vec{p}.\vec{\sigma}} \end{pmatrix}_{ab}$$

$$= \begin{pmatrix} m & E - \vec{p}.\vec{\sigma} \\ E + \vec{p}.\vec{\sigma} & m \end{pmatrix}_{ab} .$$

Ak este uvazime explicitny tvar γ-matic, spinovu sumu mozeme zapisat takto:

$$\sum_s u^s_a(p)\, \bar{u}^s_b(p) \;=\; (\gamma^\mu\, p_\mu \,+\, m\,\mathbf{1})_{ab} \;\Leftrightarrow\; \sum_s u^s(p)\, \bar{u}^s(p) \;=\; \gamma^\mu\, p_\mu \,+\, m\,\mathbf{1}\,,$$

kde $\mathbf{1}$ oznacuje 4×4 jednotkovu maticu. V druhej formuli sme nevypisali explicitne maticove indexy, tento zapis sa casto pouziva. Formuly pre druhu polarizacnu sa odvodzuju analogicky:

$$\sum_s v^s_a(p)\, \bar{v}^s_b(p) \;=\; (\gamma^\mu\, p_\mu \,-\, m\,\mathbf{1})_{ab} \;\Leftrightarrow\; \sum_s u^s(p)\, \bar{u}^s(p) \;=\; \gamma^\mu\, p_\mu \,-\, m\,\mathbf{1}\,.$$

Dodatok - Transformacne vlastnosti casticovych rieseni. Pri Lorentzovej transformacii $\Lambda = \exp(-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, J^{\mu\nu})$ Diracovo pole transformuje takto:

$$\psi(x) \;\mapsto\; S(\Lambda)\, \psi(\Lambda^{-1}x) \;=\; e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, S^{\mu\nu}}\, e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, \mathcal{J}^{\mu\nu}}\, \psi(x)$$

$$=\; e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, (\mathcal{J}^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})} .$$

Tu $S^{\mu\nu}$ oznacuje generatory Lorentzovej transformacie v spinorovej reprezentacii a $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ su generatory v x-reprezentacie (pozri rovnice ( ), ( )).

Na vseobecnu a-casticovu cast riesenia Diracovej rovnice

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_p\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; \ldots\right) .$$

posobme inverznou Lorentzovou transformaciou (je vec konvencie): $\psi(x) \;\mapsto\; S(\Lambda^{-1})\, \psi(\Lambda x)$,

• matica $S(\Lambda^{-1})$ posobi na len spinor $u^s(p)$, posobenie zapisme takto,

$$S(\Lambda^{-1})\, u^s(p) \;=\; \sum_{s'} D_{s's}(W(\Lambda,p)) u^{s'}(p)\,,$$

kde $(D_{ss'}(W(\Lambda,p)))$ je 2×2 matica, ktorej zavislost od Λ a p urcime za chvilu,

• ak este v integrale urobime podobne upravy ako pri skalarnom poli, tak po substitucii $p \mapsto p' = \Lambda p$, dostaneme transformacne pravidlo pre transformaciu koeficienta rozvoja a^s_p:

$$a^s_p \;\mapsto\; \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} \sum_{s'} a^{s'}_{\Lambda p}\, D_{s's}(W(\Lambda,p))\,.$$

Pre koeficienty rozvoja b^s_p plati analogicke pravidlo (pozri [Weinberg]).

Wignerova mala grupa. Wigner navrhol nasledujucu metodu ako urcit maticu $(D_{ss'}(W(\Lambda,p)))$:

• Najprv pre casticu s hmotou m zavedme standartnu kludovu 4-hybnost $k_0 = (m,\vec{0})$. Lorentzovou transformaciou (boostom) zadanou maticou $L^\mu{}_\nu(p)$ so zlozkami

$$L^0{}_0(p) \;=\; C(p)\,, \quad L^i{}_0(p) \;=\; L^0{}_i(p) \;=\; S(p)\,\hat{p}_i\,,$$
$$L^i{}_0(j) \;=\; \delta^i_j \,-\, \hat{p}_i\,\hat{p}_j \,+\, \hat{p}_i\,\hat{p}_j\,C(p)$$

prejdeme do systemu v ktorom castica ma hybnost $\vec{p}$, t.j. 4-hybnost $p = (E_p,\vec{p})$. Koeficienty $L^\mu{}_\nu(p)$ obsahuju veliciny definovane takto:

$$S(p) \;=\; \frac{|\vec{p}|}{m}\,, \quad C(p) \;=\; \sqrt{1 \,+\, S^2(p)} \quad \hat{\vec{p}} \,=\, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\,.$$

• Pre kazdu Lorentzovu transformaciu Λ uvazujme postupnost transformacii

$$k_0 \;\mapsto\; W(\Lambda,p)\,k_0 \;\equiv\; L^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,L(p)\,k_0 \;=\; L^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,p \;=\; k_0\,.$$

V prvom kroku sme vyuzili to, ze $L(p)\,k_0 \,=\, p$, v poslednom to, ze pre lubovolne p' plati $L^{-1}(p')\,p' \,=\, k_0$.

• Teda $W(\Lambda,p)\,k_0 \,=\, k_0$, cize transformacia $W(\Lambda,p)$ patri do grupy stability 4-vektora $k_0 \,=\, (m,\vec{0})$. Toto su ale prave obycajne rotacie v priestore, a teda $W(\Lambda,p) \in SO(3)$, kde $SO(3)$ oznacuje grupu priestorovych rotacii.

• 2×2 matica $D(W)$ je unitarna: $D^\dagger(W) \,=\, D^{-1}$ (v dosledku toho, ze rotacie v spinorovom priestore su generovane hermitovskymi maticami $S_k \,=\, \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\,S^{ij}$). Je ale dobre zname, ze unitarnej reprezentatacii grupy rotacii $N\times N$ maticami odpoveda spin $s = (N-1)/2$. V nasom pripade $N = 2$, takze Diracove castice maju spin $s \,=\, 1/2$.

Uvazujme transformaciu v priestore okolo osi $\vec{n} = (n^k)$ o uhol ω, kora je zadana parametrami $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} n_k$. Pre takuto transformaciu predchadzajuci vztah mozeme prepisat vo vektorovom znaceni takto:

$$\psi(x) \mapsto = e^{-\frac{i}{2}\vec{\omega}.(\vec{L}+\vec{S})},$$

kde $\vec{L}$ je znamy kvantovo-mechanicky operator orbitalneho momentu hybnosti a $\vec{S}$ je operator vnutorneho spinoveho momentu hybnosti. Explicitne oba momenty hybnosti maju zlozky

$$L_k = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk} x^i \partial_j , \quad S_k = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^k \end{pmatrix} .$$

Je ziaduce zdoraznit, ze pre volnu Diracovu casticu zachovava sa celkovy moment hybnosti $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ - nie zvlast orbitalny moment hybnosti $\vec{L}$ alebo spinovy moment hybnosti $\vec{S}$.

Kvantovanie Diracovho pola.

Diracov Hamiltonian. Hustotu Diracovho Lagrangianu, ktoreho Eulerove-Lagrangeove rovnice odpovedaju prave Diracovej rovnici, mozeme vybrat v tvare

$$\mathcal{L}_D(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x)\,.$$

Kanonicky zdruzena hybnost $\pi(x)$ k polu $\psi(x)$ je ziska derivovanim $\mathcal{L}$ podla $\dot{\psi} = \partial_0\psi$:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}} = i\,\bar{\psi}\,\gamma^0 = i\,\psi^\dagger\,.$$

Vidime, ze kanonicky zdruzena hybnost $\pi(x)$ nie je nezavisla, ale jednocho suvisi s Diracovsky zdruzenym polom $\bar{\psi}(x)$. V systemu su trivialne vazby, ktore nijako neovplyvnia vyklad a v dalsom sa nimi nebudeme zaoberat (pozri [Weinberg]). Hamiltonian uvazovaneho systemu je dany formulou

$$H = \int d^3\vec{p}\,(\pi\,\dot{\psi} - \mathcal{L}_D)$$

Jednoduchy vypocet dava

$$H_D = \int d^3\vec{x}\;\bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma}.\vec{\partial} + m)\psi(x)\,.$$

Prislusny vyraz sa nazyva sa *Diracov Hamiltonian* a pridavame mu index D.

Energia a hybnost Diracovho pola. Do Diracovho Hamiltonianu dosadime vseobecne riesenie Diracovej rovnice pre $\psi(x)$ a $\bar{\psi}(x)$:

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^s\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b_p^{s\dagger}\, v^s(p)\, e^{ipx}\right)$$

$$\bar{\psi}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_p^s\, \bar{v}^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; a_p^{s\dagger}\, \bar{u}^s(p)\, e^{ipx}\right)$$

Po dosadeni dostaneme

$$H_D \;=\; \frac{1}{(2\pi)^6}\int \frac{d^3\vec{p}d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}} \int d^3\vec{x} \sum_{s,s'} \left(b_{p'}^{s'}\, \bar{v}^{s'}(p')\, e^{-ip'x} \;+\; a_{p'}^{s'\dagger}\, \bar{u}^{s'}(p')\, e^{ip'x}\right)$$

$$\times \left(a_p^s\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b_p^{s\dagger}\, v^s(p)\, e^{ipx}\right)\;.$$

S pouzitim znameho vztahu

$$\int d^3\vec{x}\, e^{\pm i(\vec{p}\pm\vec{p}').\vec{x}} \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p}\pm\vec{p}')$$

integracia cez $d^3\vec{x}$ je trivialna a naviac hned mozeme integrovat cez $d^3\vec{p}'$. Ak uvazime este vztahy (pozri priklad)

$$u^{s'\dagger}(\vec{p})\, u^s(\vec{p}) \;=\; v^{s'\dagger}(\vec{p})\, v^s(\vec{p}) \;=\; 2\, E_{\vec{p}}\,\delta^{s's}\,, \quad u^{s'\dagger}(\vec{p})\, v^s(-\vec{p}) \;=\; v^{s'\dagger}(-\vec{p})\, u^s(\vec{p}) \;=\; 0\,.$$

po vynasobeni podintegralnych faktorov $(\ldots)\times(\ldots)$, dostaneme dva nulove prispevky a v zostavajucich dvoch clenoch mozeme vyscitat cez s'. Po tychto upravach dostaneme predbezny hladany vyraz

$$H_D \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^{s\dagger}\, a_p^s \;-\; b_p^s\, b_p^{s\dagger}\right)\;.$$

Poznamka: Pripomenme, ze analogicky vypocet energie (realneho) skalarneho pola dava

$$H \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\, \frac{1}{2}\left(a_p^\dagger\, a_p \;+\; a_p\, a_p^\dagger\right)\;.$$

Po kvantovani sa koeficienty $a_p \;=\; a_{\vec{p}}$ a $a_q^\dagger \;=\; a_{\vec{q}}^\dagger$ nahradia operatormi, ktore splnaju kanonicke komutacne vztahy pre anihilacne a kreacne operatory bozonoveho typu:

$$[a_p, a_q^\dagger] \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p}\,-\,\vec{q})\,,$$

$$[a_p, a_q] \;=\; [a_p^\dagger, a_q^\dagger] \;=\; 0\,.$$

Tieto operatory posobia vo Fockovom priestore $\mathcal{F}$, ktoreho bazu tvoria vsetky n-casticove mormovane stavy

$$|p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle \;\sim\; a^\dagger_{p_1}\, a^\dagger_{p_2}\, \ldots\, a^\dagger_{p_n} |0\rangle \,,$$

kde symbol $\sim$ oznacuje, ze na pravej strane sme explicitne nevypisali normalizacny faktor. Stav $|0\rangle$ je normovany vakuovy stav vo Fockovom priestore, $\langle 0|0\rangle \,=\, 1$, ktory neobsahuje ziadne castice a je definovany podmienkami

$$a_p\, |0\rangle \;=\; 0\,, \quad \text{pre vsetky } p \,=\, (E_p,\, \vec{p})\,.$$

Konzistentnost kvantovo-polneho formalizmu vyzaduje, aby energia a dalsie fyzikalne veliciny boli vyjadrene pomocou *normalneho sucinu* anihilacnych a kreacnych operatorov: vo vyrazoch vyjadrenych ako sucin tychto operatorov dame vsetky kreacne operatory $a^\dagger_q$ nalavo a anihilacne a_p napravo:

$$:a_p\, \ldots\, a^\dagger_q\, \ldots\, a^\dagger_{q'}\, \ldots\, a_{p'}: \;=\; a^\dagger_q\, \ldots\, a^\dagger_{q'}\, a_p\, \ldots\, a_{p'}, .$$

Prechod k normalnemu sucinu sme oznacili ako $:\ldots:$. Na pravej strane je najprv sucin vsetkych kreacnych operatorov vystupujucich v povodnom sucine a potom sucin vsetkych anihilacnych operatorov. Specialne,

$$:a_p\, a^\dagger_q: \,=\, :a^\dagger_q\, a_p: \;=\; a^\dagger_q\, a_p\,.$$

Kvantovo-polny vyraz pre energiu obsahujuci normalny sucin uz je dobre definovany vo Fockovom priestore

$$H \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\; :\left(a^\dagger_p\, a_p \;+\; a_p\, a^\dagger_p\right): \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\; :a^\dagger_p\, a_p: \;.$$

Stredna hodnota energie je nezaporna, pricom vo vakuovom stave je nulova: $\langle 0|\, H\, |0\rangle \;=\; 0$. Bez normalneho sucinu, by pritom Hamiltonian nebol definovany vo Fockovom ptiestore (stredne hodnoty by boli rovne $+\infty$).

Takyto postup ale nie je vhodny v pripade Diracovho Hamiltonianu, lebo s anihilacnymi a kreacnymi operatormi bozonoveho typu by sme dostali indefinitny zdola neohraniceny vyraz

$$H_D \;=\; \frac{1}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^{s\dagger}_p\, a^s_p \;-\; b^{s\dagger}_p\, b^s_p\right)\,.$$

Dirac nasiel genialne riesenie v tom, ze pre anihilacne a kreacne operatory vystupujuce v spinorovych poliach predpisal *antikomutacne* vztahy:

$$\{a^r_p, a^{s\dagger}_q\} \;=\; \{b^r_p, b^{s\dagger}_q\} \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p} \,-\, \vec{q})\, \delta^{rs}\,,$$

$$\{a_p^r, a_q^s\} \;=\; \{a_p^{r\dagger}, a_q^{s\dagger}\} \;=\; \{b_p^r, b_q^s\} \;=\; \{b_p^{r\dagger}, b_q^{s\dagger}\} \;=\; 0\,.$$
$$\{a_p^r, b_q^{s\dagger}\} \;=\; \{b_p^r, a_q^{s\dagger}\} \;=\; \{a_p^r, b_q^s\} \;=\; \{b_p^{r\dagger}, a_q^{s\dagger}\} \;=\; 0\,.$$

Specialne,

$$(a_p^r)^2 \;=\; (a_p^{s\dagger})^2 \;=\; (b_p^r)^2 \;=\; (b_p^{s\dagger})^2 \;=\; 0\,.$$

Uvedene anihilacne a kreacne operatory posobia vo Fockovom priestore $\mathcal{F}$, ktoreho bazu tvoria vsetky stavy

$$|(p_1, r_1), \ldots, (p_n, r_n); (q_1, s_1), \ldots, (q_m, s_m)\rangle \;\sim\; a_{p_1}^{r_1\dagger} \,\ldots\, a_{p_n}^{r_n\dagger}\, b_{q_1}^{s_1\dagger} \,\ldots\, b_{q_m}^{s_m\dagger}|0\rangle\,.$$

Tu $|0\rangle$ je normovany vakuovy stav vo Fockovom priestore definovany podmienkami

$$a_p^s\,|0\rangle \;=\; b_p^s\,|0\rangle \;=\; 0\,, \quad \text{pre } s \;=\; \pm 1/2 \text{ a } \textit{vsetky } p \;=\; (E_p, \vec{p})\,.$$

Vzhladom k tomu, ze kvadraty kreacnych (a aj anihilacnych) operatorov su nulove, v stavoch $|(p_1, r_1) \ldots; (q_1, s_1), \ldots\rangle$ vystupuje dany operator nanajvys len raz. Obdrzali sme *Pauliho princip*: obsadzovacie cisla Diracovskych castic su 0 alebo 1.

Dirac potom adekvatne modifikoval aj normalny sucin:

$$:a_p^r \ldots b_q^{s\dagger} \ldots a_{q'}^{r'\dagger} \ldots b_{p'}^{s'}: \;=\; \pm\, a_{q'}^{r'\dagger} \ldots b_q^{s\dagger}\, a_p^r \ldots bs'_{p'}\,,$$

kde, podobne ako v bozonovskom pripade,

• na pravej strane je najprv sucin vsetkych kreacnych operatorov vystupujucich v povodnom sucin a potom sucin vsetkych anihilacnych operatorov,

• *naviac* sa objavuje znamienko dane poctom transpozicii susednych operatorov pomocou ktorych povodny vyraz upravime na normalny. Specialne,

$$:b_q^{r\dagger}\, b_p^s: \;=\; -\; :b_p^s\, b_q^{r\dagger}: \;=\; b_q^{r\dagger}\, b_p^s\,.$$

S takto definovanym normalnym sucinom energia volneho Diracovho pola je suctom dvoch pozitivne definitnych clenov:

$$H_D \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \sum_s \;:\big(E_p\, a_p^{s\dagger}\, a_p^s \;-\; E_p\, b_p^s\, b_p^{s\dagger}\big):$$
$$\;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \sum_s \;\big(E_p\, a_p^{s\dagger}\, a_p^s \;+\; E_p\, b_p^{s\dagger}\, b_p^s\big)\;.$$

Operator hybnosti spinoroveho pola definujeme vztahom

$$\vec{P} \;=\; \int d^3\vec{x} \;:\bar{\psi}(x)(-\vec{\partial})\psi(x):,$$

kde $\bar{\psi}(x)$ a $\psi(x)$ su dane ako linearne kombinacie casticovych rieseni Diracovej rovnice. V definicii sme hned zaviedli normalny sucin. Analogicke upravy ako pouzite pri odvodeni formuly pre energiu daju

$$\vec{P} \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\,\sum_s\,\left(\vec{p}\,a_p^{s\dagger}\,a_p^s \;+\; \vec{p}\,b_p^{s\dagger}\,b_p^s\right)\,.$$

Zachovajuci sa elektricky naboj. Diracov Lagrangian $\mathcal{L}_D$ sa nemeni pri *globalnej kalibracnej transformacii* reprezentovanou konstantnou zmenou faze spinoroveho pola:

$$\psi(x)\;\mapsto\; e^{i\alpha}\,\psi(x)\,,\quad \bar{\psi}(x)\;\mapsto\; e^{-i\alpha}\,\bar{\psi}(x)\,,\quad \alpha\;-\;\text{realna konstanta}\,.$$

Na klasickej nekvantovej to ma za nasledok, ze *hustota prudu* $j^\mu(x)$ splnuje rovnicu kontinuity:

$$j^\mu(x)\;=\;e\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\,,\quad\Rightarrow\;\partial_\mu\,j^\mu(x)\;=\;0\,,$$

ak $\psi(x)$ a $\bar{\psi}(x)$ su rieseniami prislusnych Diracovych rovnic

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\,(\partial_\mu\,\psi)(x) \;&=\; m\,\psi(x)\,,\\ i(\partial_\mu\,\bar{\psi})(x)\,\gamma^\mu \;&=\; -\,m\,\bar{\psi}(x)\,. \end{aligned}$$

Potom,

$$\begin{aligned} \partial_\mu\,(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)) \;&=\; (\partial_\mu\,\bar{\psi})(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \;+\; \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,(\partial_\mu\,\psi)(x)\\ &=\; im\,\bar{\psi}(x)\,\psi(x) \;-\; im\,\bar{\psi}(x)\,\psi(x) \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

odkial uz plynie rovnica kontinuity pre prud $j^\mu(x)$. Pokial castice sa vyskytuju len v ohranicenej oblasti priestoru, t.j. $\psi(x) = 0$ a $\bar{\psi}(x) = 0$ pre $|\vec{x}| \geq R$, tak sa zachovava celkovy naboj pola (odpovedajuci prudu $j^\mu(x)$), t.j. velicina

$$Q(t)\;=\;e\int d^3\vec{x}\,j^0(x)\;=\;e\int d^3\vec{x}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^0\,\psi(x)\,,$$

nezavisi od casu $t = x_0$. Toto plynie zo zakona zachovania prudu:

$$\dot{Q}(t)\;=\;e\int_{|\vec{x}|<R} d^3\vec{x}\,\partial_0\,j^0(x)\;=\;-e\int_{|\vec{x}|<R} d^3\vec{x}\,\partial_i\,j^i(x)\;=\;e\int_{|\vec{x}|=R} dS^i j^i(x)\;=\;0\,.$$

Pri predposlednej uprave sme vyuzili Gaussovu vetu pre integraciu $\mathrm{div}\vec{j}(t,\vec{x})$ v guli o polomere R a to, ze prud je nulovy sfere o polomere R.

Po kvantovani definujeme naboj pola rovnakym vyrazom ale s normalnym sucinom poli:

$$Q(t)\;=\;e\int d^3\vec{x}\;:\bar{\psi}(x)\,\gamma^0\,\psi(x):\,,$$

Za $\bar{\psi}(x)$ a $\psi(x)$ sem dosadime linearne kombinacie casticovych rieseni Diracovej rovnice. Analogicke upravy ako pri odvodeni formuly pre energiu daju

$$Q(t) \;=\; \frac{e}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\,\sum_s \left(a_p^{s\dagger}\,a_p^s \;-\; b_p^{s\dagger}\,b_p^s\right)\,.$$

V dalsom zachovajuci sa prud $j^\mu(x) \;=\; e\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)$ stotoznime s elektromagnetickym prudom, a-castice s elektronmi a b-castice s pozitronmi. Konstanta e bude mat vyznam naboja elektronu a Q bude celkovy naboj pola.

Interpretacia volneho Diracovho pola. Stav pola s n casticami (elektronmi) a m anticasticami (pozitronmi) s danymi hybnostami a spinmi je definovany takto:

$$|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle \;\sim\; a_{p_1}^{r_1\dagger}\,\ldots\,a_{p_n}^{r_n\dagger}\,b_{q_1}^{s_1\dagger}\,\ldots\,b_{q_m}^{s_m\dagger}|0\rangle\,.$$

Ukazeme, ze sa jedna o vlastne stavy energie pola, hybnosti pola a naboja pola:

$$\begin{aligned}
&H_D\,|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\\
&= \left(\sum_{i=1}^n E_{p_i} \;+\; \sum_{j=1}^m E_{q_j}\right)|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\,,\\
&\vec{P}\,|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\\
&= \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \;+\; \sum_{j=1}^m \vec{q}_j\right)\;|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\,,\\
&Q\,|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\\
&= \;e\,(n-\,)\,|(p_1,r_1),\ldots,(p_n,r_n);(q_1,s_1),\ldots,(q_m,s_m)\rangle\,,
\end{aligned}$$

Tieto vztahy sa dosledkom komutacnych vztahov

$$[a_p^{s\dagger}a_p^s,\,a_{p'}^{s'\dagger}] \;=\; \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\,a_p^{s\dagger}\,,\quad [a_p^{s\dagger}a_p^s,\,a_{p'}^{s'}] \;=\; -\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\,a_{p'}^{s'\dagger}\,,$$

$$[b_p^{s\dagger}b_p^s,\,b_{p'}^{s'\dagger}] \;=\; \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\,b_p^{s\dagger}\,,\quad [b_p^{s\dagger}b_p^s,\,a_{p'}^{s'}] \;=\; -\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\,b_p^{s\dagger}\,.$$

Prvy z nich dostaneme takto:

$$[a_p^{s\dagger}a_p^s,\,a_{p'}^{s'\dagger}] \;=\; a_p^{s\dagger}a_p^s,\,a_{p'}^{s'\dagger} \;-\; a_{p'}^{s'\dagger}\,a_p^{s\dagger}a_p^s, \;=$$

$$a_p^{s\dagger}\,a_p^s,\,a_{p'}^{s'\dagger} \;+\; a_p^{s\dagger}\,a_{p'}^{s'\dagger}\,a_p^s, \;=\; a_p^{s\dagger}\,\{a_p^s,\,a_{p'}^{s'\dagger}\} \;=\; a_p^{s\dagger}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,.$$

Posledny vyraz uz je ekvivalentny hladanemu vyrazu (postupne, sme rozpisali komutator, dalej vyuzili to, ze kreacne operatory antikomutuju a potom sme pouzili kanonicky antikomutacny vztah medzi anihilacnym a kreacnym operatorom). Ostatne vztahy sa dokazuju obdobne.

My budeme potrebovat ich nasledujuce zovseobecnenie:

$$[a_p^{r\dagger} a_p^r,\, a_{p_1}^{r_1\dagger} \ldots a_{p_n}^{r_n\dagger}] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \delta(\vec{p}-\vec{p}_i)\, \delta^{rr_i}\, a_{p_1}^{r_1\dagger} \ldots a_{p_n}^{r_n\dagger}\,,$$

$$[b_q^{s\dagger} b_q^s,\, b_{q_1}^{s_1\dagger} \ldots b_{q_n}^{s_m\dagger}] \;=\; \sum_{j=1}^{m} \delta(\vec{q}-\vec{q}_j)\, \delta^{ss_j}\, b_{q_1}^{s_1\dagger} \ldots b_{q_m}^{s_n\dagger}$$

ktore je dosledkom vseobecnej identity $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ platnej pre komutatory operatorov.

Z poslednych dvoch vztahov uz plynu formule pre vlastne stavy operatorov a ich vlastne hodnoty uvedene na zaciatku odseku:

• Z nich vyplyva, ze celkova energia a hybnost systemu su konstantne (nemenia sa v case) a su rovne suctu energii resp. suctu hybnosti jednotlivych castic v danom vlastnom stave. Toto je typicke pre subory neinteragujucich castic: nie su ziadne vazbove energie, energia a hybnosti jednotlivych castic sa nemenia (vzajomna interakcia je nulova).

• Podobne aj celkovy sa v case nemei a je rovny rozdielu nabojov castic (elektronov) a anticastic (pozitronov): castice maju rovnaku hmotu ako anticastice (vztah medzi E_p a $\vec{p}$ je rovnaky pre castice aj anticastice), ale alekricky naboj maju opacneho znamienka (ak naboj elektronu je e, pozitron ma naboj $-e$).

Kanonicke antikomutacne vztahy pre Diracove pole. Cielom je dokazat antikomutatacne vztahy medzi volnymi spinorovymi poliami ψ a $\psi^\dagger$ v *rovnakom case*:

$$\{\psi_a(t,\vec{x}), \psi_b^\dagger(t,\vec{y})\} \;=\; \delta(\vec{x}-\vec{y})\, \delta_{ab}\,,$$

$$\{\psi_a(t,\vec{x}), \psi_b(t,\vec{y})\} \;=\; \{\psi_a^\dagger(t,\vec{x}), \psi_b^\dagger(t,\vec{y})\} \;=\; 0\,.$$

Dokazeme prvy antikomutacny vztah, dalsie sa dokazuju podobne. Do prveho vztahu najprv dosadime

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^s\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b_p^{s\dagger}\, v^s(p)\, e^{ipx} \right)\;, \quad x \;=\; (t, \vec{x})$$

$$\psi^\dagger(x') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \left(b_{p'}^{s'}\, v^{s'\dagger}(p')\, e^{-ip'x'} \;+\; a_{p'}^{s'\dagger}\, u^{s'\dagger}('p)\, e^{ip'x'} \right),\; x' \;=\; (t, \vec{y}),$$

a dostaneme

$$\{\psi_a(t,\vec{x}), \psi_b^\dagger(t,\vec{y})\} \;=\; \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}} \sum_{s,s'}$$

$$\{a_p^s\, u_a^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b_p^{s\dagger}\, v_a^s(p)\, e^{ipx},\, b_{p'}^{s'}\, v_b^{s'\dagger}(p')\, e^{-ip'x'} \;+\; a_p^{s\dagger}\, u_b^{s'\dagger}(p')\, e^{ip'x'}\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}} \sum_{s,s'}$$

$$\Big(\{a^s_p, a^{s'\dagger}_{p'}\}\, u^s_a(p)\, u^{s'\dagger}_b(p')\, e^{-ipx+ip'x'} \;+\; \{b^s_p, b^{s'\dagger}_{p'}\}\, v^s_a(p)\, v^{s'\dagger}_b(p')\, e^{+ipx-ip'x'} \Big)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}$$

$$\left(\sum_s u^s_a(p)\, u^{s'\dagger}_b(p')\, e^{i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})} \;+\; \sum_s v^s_a(p)\, v^{s'\dagger}_b(p')\, e^{-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}$$

$$\big((E_p\,\gamma^0 \;-\; \vec{\gamma}.\vec{p} \;+\; m)\gamma^0\, e^{i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})} \;+\; (E_p\,\gamma^0 \;-\; \vec{\gamma}.\vec{p} \;-\; m)\gamma^0\, e^{-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})} \big)_{ab}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p}\, e^{i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}\, \delta_{ab} \;=\; \delta(\vec{x}-\vec{y})\, \delta_{ab}\,.$$

Pri upravach sme postupne pouzili:

• antikomutacne kanonicke vztahy

$$\{a^s_p, a^{s'\dagger}_{p'}\} \;=\; \{b^s_p, b^{s'\dagger}_{p'}\} \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p}-\vec{q}')\, \delta^{ss'}\,,$$

• sumacne pravidla

$$\sum_s u^s_a(p)\, u^{s'\dagger}_b(p') \;=\; (E_p\,\gamma^0 \;-\; \vec{\gamma}.\vec{p} \;+\; m)\gamma^0\,,$$

$$\sum_s v^s_a(p)\, v^{s'\dagger}_b(p') \;=\; (E_p\,\gamma^0 \;-\; \vec{\gamma}.\vec{p} \;-\; m)\gamma^0\,,$$

• pri predposlednej uprave sme v integrale obsahujucom $\exp(-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y}))$ spravili zamenu $\vec{p} \mapsto \vec{p}$ a nakoniec sme vyuzili formulu

$$\int d^3\vec{p}\, \exp(i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})) \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{x}-\vec{y})\,.$$

Propagator Diracovho pola. Ako uvidime neskor, propagatory volnych poli maju klucovu ulohu pri zapocitani vzajomneho posobenia - interakcie medzi poliami. Najprv si pripomenieme jeho tvar pre skalarne pole, a potom ho odvodime pre Diravske pole.

Propagator pre skalarne pole. Uvazujme realne skalarne pole

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p\, e^{-ip.x} \;+\; a^\dagger_p\, e^{+ip.x} \right)\,, \quad p \;=\; (E_p, \vec{p})\,.$$

Jeho propagator je definovany ako stredna vakuova hodnota T-sucinu poli:

$$D_F(x-y) \;=\; \langle 0|\, T[\phi(x)\phi(y)]\, |0\rangle\, .$$

kde symbol $T[\phi(x)\phi(y)]$ oznacuje casovo usporiadany (time-ordered) sucin poli definovany takto:

$$T[\phi(x)\phi(y)] \;=\; \phi(x)\phi(y) \quad pre\ x_0 \,>\, y_0\, ,$$

$$T[\phi(x)\phi(y)] \;=\; \phi(y)\phi(x) \quad pre\ y_0 \,>\, x_0\, .$$

Uvazujme najprv pripad $x_0 > y_0$. Vtedy

$$D_F(x-y) \;=\; \langle 0|\, \phi(x)\phi(y)\, |0\rangle\, .$$

Ak sem dosadime rozkklady poli $\phi(x)$ a $\phi(y)$ do casticovych rieseni, tak dostaneme

$$D_F(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}}\, \langle 0|\, a_p\, a^\dagger_{p'}\, |0\rangle\, e^{-ipx\,+\,ip'x'}\, ,$$

kde sme uz uvazili, ze dalsie tri cleny neprispievaju, lebo

$$\langle 0|\, a_p\, a_{p'}\, |0\rangle \;=\; \langle 0|\, a^\dagger_p\, a^\dagger_{p'}\, |0\rangle \;=\; \langle 0|\, a^\dagger_p\, a_{p'}\, |0\rangle \;=\; 0\, .$$

Ak teraz vo vyraze pre propagator vyuzijeme kanonicky komutacny vztah

$$a_p\, a^\dagger_{p'} \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p}\,-\,\vec{p}') \;+\; a^\dagger_{p'}\, a_p\, ,$$

dostaneme prispevok od prveho je nulovy (opat $\langle 0|\, a_p\, a_{p'}\, |0\rangle \,=\, 0$) a prispieva len druhy clen od s δ-funkciou. Tato dovoluje previest integraciu cez $d^3\vec{p}'$, a po jej vykonani dostavame

$$D_F(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{-ip(x-x')}\, , \quad p \,=\, (E_p,\, \vec{p})\, .$$

Rovnakym postupom, pre $y_0 > x_0$ dostaneme

$$D_F(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{+ip(x-x')}\, , \quad p \,=\, (E_p,\, \vec{p})\, .$$

Nie je tazke ukazat, ze oba vyrazy mozeme vyjadrit jedinym explicitne relativisticky invariantnym vyrazom

$$D_F(x-y) \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2\,-\,m^2\,+\,i\varepsilon}\, ,$$

kde $\varepsilon > 0$ je male kladne cislo, pricom na konci vypoctov sa vzdy berie limita $\varepsilon \to 0+$.

Explicitna relativisticka invariantnost poslednej formule pre propagator je za cenu toho, ze p_0 uz nie je rovne E_p a mame o integraciu cez dp_0 naviac. V muvedenej formule pre propagator preto $p^2 \neq m^2$: hovori sa, ze 4-hybnost je mimo hmotovej nadplochy (*off-shell*). Naproti tomu rozdiel fyzikalna 4-hybnost $p = (E_p, \vec{p})$ splna $p^2 = m^2$: je na hmotovej nadploche (*on-shell*).

Propagator pre Diracove pole. Propagator Diracovho pola je definovany ako stredna vakuova hodnota T-sucinu poli:

$$S^F ab(x-y) \;=\; \langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle \,.$$

Tu symbol $T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]$ oznacuje casovo usporiadany (time-ordered) sucin fermionovych Diracovych poli, ktory je definovany obdobne ako T-sucin bozonovych poli, ale s tym rozdielom, ze kazda vymena dvoch poli meni znamienko:

$$T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] \;=\; \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) \quad \text{pre } x_0 > y_0 \,,$$

$$T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] \;=\; -\,\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) \quad \text{pre } y_0 > x_0 \,.$$

Uvazujme pripad $x_0 > y_0$ o dosadme do vyrazu pre propagator rozklady Diracovych poli

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_p\, u^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; b^{s\dagger}_p\, v^s(p)\, e^{ipx} \right) \,,$$

$$\bar{\psi}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b^s_p\, \bar{v}^s(p)\, e^{-ipx} \;+\; a^{s\dagger}_p\, \bar{u}^s(p)\, e^{ipx} \right)$$

Do strednej vakuovej hodnoty zo styroch prispevkov bude zase bude nenulovy len ten, ktory obsahuje anihilacny operator nalovo a kreacny napravo:

$$\langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle$$

$$= \; \frac{1}{(2\pi)^6}\int \frac{d^3\vec{p}\, d^3\vec{p}\,'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}} \; \sum_{s,s'} \langle 0|\, a^s_p\, a^{s'\dagger}_{p'}\, |0\rangle\, u^s_a(p)\, \bar{u}^{s'}_b(p')\, e^{-ipx + ip'x'} \,.$$

Vdalsom kroku vyuzijeme kanonicky antikomutacny vztah

$$a^s_p\, a^{s'\dagger}_{p'} \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,')\delta^{ss'} \;-\; a^{s'\dagger}_{p'}\, a^s_p \,.$$

Opat prispieva len prvy clen: pritomnost $\delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$ dovoluje integraciu cez $d^3\vec{p}\,'$ a $\delta^{ss'}$ umoznuje vyscitanie cez s'. Po tychto upravach dostaneme

$$\langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \sum_s u^s_a(p)\, \bar{u}^s_b(p)\, e^{-ip(x-x')} \,.$$

Vystupuje tu polarizacna suma takze mozme pisat

$$\langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, (\gamma^\mu p_\mu \,+\, m)_{ab}\, e^{-ip(x-x')}$$

$$= \; \big(i\gamma^\mu \partial^x_\mu \,+\, m\big)_{ab}\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{-ip(x-x')} \;=\; \big(i\gamma^\mu \partial^x_\mu \,+\, m\big)_{ab}\, D_F(x-x')\,,$$

kde $D_F(x-x')$ oznacuje vyraz pre skalarny propagator pre $x_0 \,>\, y_0$. Pri upravach sme vyuzili to, ze $i\partial^x_\mu \exp(-ip(x-x')) \,=\, p_\mu \exp(-ip(x-x'))$.

V pripade $y_0 \,>\, x_0$ obdobnym postupom dostaneme

$$\langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle$$

$$= \; -\frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{\sqrt{2E_p\, 2E_{p'}}} \sum_{s,s'} \langle 0|b^{s'\dagger}_{p'}\; b^s_p\, |0\rangle\, v^s_a(p)\, \bar{v}^{s'}_b(p')\, e^{+ipx\,-\,ip'x'}$$

$$= \; -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \sum_s u^s_a(p)\, \bar{u}^s_b(p)\, e^{-ip(x-x')}$$

$$= \; -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, (\gamma^\mu p_\mu \,-\, m)_{ab}\, e^{+ip(x-x')}\,.$$

Ak este vyuzijeme $i\partial^x_\mu \exp(+ip(x-x')) \,=\, -p_\mu \exp(-ip(x-x'))$, tak dostaneme

$$\langle 0|\, T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle \;=\; \big(i\gamma^\mu \partial^x_\mu \,+\, m\big)_{ab}\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{+ip(x-x')}$$

$$= \; \big(i\gamma^\mu \partial^x_\mu \,+\, m\big)_{ab}\, D_F(x-x')\,,$$

kde $D_F(x-x')$ oznacuje vyraz pre skalarny propagator pri$y_0 \,>\, x_0$.

Vidime, ze v oboch pripadoch sme dostali rovnake vyjadrenie cez $D_F(x-x')$, takze nakoniec mozeme pisat

$$S_F(x-x') \;=\; \big(i\gamma^\mu \partial^x_\mu \,+\, m\big)\; D_F(x-x') \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \frac{\gamma^\mu p_\mu \,+\, m}{p^2 \,-\, m^2 \,+\, i\varepsilon}\, e^{-ip(x-x')}\,.$$

Tu sme uz nevypisovali explicitne maticove indexy Diracovho propagatora (ani sme explicitne nevyznacili jednotkovu maticu pri hmote m).

2 Elektromagneticke pole

Pri popise elektromagnetickeho pola vydeme z Lagrangianu, v ktorom pole interaguje s vonkajsim zadanym zdrojom. Je to dolezite, lebo okrem pohybovych rovnic objavuju sa vazby, v ktorych vonkajsi zdroj je podstatny. Pokial by sme ho neuvazovali, cast uzitocnej informacie by sme stratili. Naviac, zvysledky, ktore ziskame budeme moct vyuzit aj v pripade, ze pole interaguje s prudom nabitych castic. V tomto pripade, elektromaneticke pole a subor castic sa budu navzajom ovplyvnovat - subor nabitych castic bude predstavovat dymamicky zdroj (a nie zadany vonkajsi zdroj).

Lagrangian elektromagneticke pola zadaneho 4-potencialom $A_\mu(x)$ interagujuceho s vonkajsim elektromagnetickou prudom $J^\mu(x)$ je dany ako

$$\mathcal{L}(A,J) \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \;-\; e\,J^\mu\,A_\nu\,. \tag{2.2}$$

Tu $F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu \,-\, \partial_\mu A_\nu$ oznacuje intenzitu elektromagnetickeho pola, ktora suvisi so zlozkami intemzity elektrickeho pola $\vec{E}$ a magnetickeho pola $\vec{B}$ takto

$$E^i \;=\; F^i_0 \;=\; \partial_0 A^i \,-\, \partial^i A_0 \;\Leftrightarrow\; \vec{E} \;=\; \nabla A_0 \,+\, \dot{\vec{A}}\,,$$

$$B^k \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{ij} \;\Leftrightarrow\; \vec{B} \;=\; \nabla\,\times\,\vec{A}\,.$$

Indexy i,j,k, nadobudaju hodnoty $1, 2.3$ (sumacna konvencia sa predpoklada), bodka nad symbolom oznacuje derivaciu podla casu $t \;=\; x^0$, t.j. $\dot{\vec{A}} \;=\; \partial_t\vec{A}$ a symbol ∇ oznacuje vektorovy diferencialny operator $\nabla \;=\; (\partial_{x^1},\partial_{x^2},\partial_{x^3}) \;=\; -(\partial^1,\partial^2,\partial^3)$. Este zavedieme hustotu naboja ρ a priestorovu hustotu prudu $\vec{J}$ vztahom $J^\mu \;=\; (\rho,\vec{J})$.

Maxwellove rovnice pre elektromagneticke pole

$$\partial_\mu\,F^{\mu\nu} \;=\; -\,e\,J^\nu\,,$$

sa ziskaju ako Eulerove-Lasgrangeove rovnice odpovedajuce Lagrangianu $\mathcal{L}(A,J)$. Pretoze, $F^{\mu\nu} \;=\; -F^{\nu\mu}$ a paricialne derivacie komutuju $\partial_\mu\,\partial_\nu \;=\; \partial_\nu\,\partial_\mu$, tak dostavame

$$\partial_\mu\,\partial_\nu\,F^{\mu\nu} \;=\; 0\,, \quad\;\Rightarrow\;\; \partial_\nu\,J^\nu \;=\; 0\,.$$

V poslednom kroku sme vyuzili Maxwellove rovnice: kvoli konzistentnosti s Maxwellovymi rovnicami hustota elektromagmetickeho prudu sa musi zachovavat. Z rovnice kontinuity vyplyva *zakon zachovania elektrickeho naboja.* V dalsom preto predpokladame, ze vonkajsi prud ma tuto zasadnu vlastnost.

Analyzujme Maxwellove rovnice podrobnejsie:

• *Gaussov zakon.* Uvazujme najprv pripad casovej zlozky $\nu = 0$. Pretoze v Lagrangiane $\mathcal{L}(A, J)$ nevystupuje $\partial_0 A^0 = \dot{A}_0$, tak prislusna rovnica nepredstavuje pohybovu rovnicu, ale vazbu *Gaussov zakon* (v diferencialnom tvare):

$$\nabla.\vec{E} = \triangle A_0 + \nabla.\dot{\vec{A}} = -e\,\rho\,,$$

kde $\triangle = \nabla.\nabla$. Ak vyuzijeme vztah,

$$\triangle \frac{1}{|\vec{x}) - \vec{y}|} = -\,4\pi\,\delta(\vec{x}) - \vec{y})$$

dostaneme (za predpokladu, ze hustota naboja je nulova pre velke $|\vec{x}|$):

$$A_0(x) \equiv A_0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y}\, \frac{e\rho(t, \vec{x}) + \nabla.\dot{\vec{A}}(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}\,.$$

Vidime, ze Gaussov zakon urcuje A_0 zlozku pola . Pre priestorove zlozky $\nu = i$, $1 = 1, 2, 3$. Maxwellove rovnice predstavuju pohybovu rovnicu, pre vektorovu cast $\vec{A}$ elektromagnetickeho potencialu:

$$dopisat$$

• *Energia pola - Hamiltonian.* Zlozky intenzity elektrickeho pola

$$E^i = \partial_0 A^i - \partial^i A_0 = \frac{\partial \mathcal{L}(A, J)}{\partial \dot{A}_i}\,,$$

predstavuju kanonicky zdruzene hybnosti potencialom pola A_i, $1 = 1, 2, 3$. Odpovedajuci Hamiltonian bude

$$H = \int d^3\vec{x}\,[\vec{E}.\dot{\vec{A}} - \mathcal{L}(A, J)]_{\dot{\vec{A}} \to \vec{E}}$$

$$= \int d^3\vec{x}\,[\vec{E}.\dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 + e\,\rho\,A_0 - e\,\vec{J}.\vec{A}]\,,$$

kde za A_0 treba dosadit horeuvedene riesenie Gauussovho zakona (*).

Do riesenia dosadime rozklad vektoroveho potencialu $\vec{A}$ na pozdlznu (longitudinalnu) a priecnu (tranzverzalnu) cast:

$$\vec{A} = \nabla\lambda + \vec{A}_\perp\,,$$

kde $\lambda = \lambda(t, \vec{x})$, je tak vybrata funkcia, ze $\vec{A}_\perp$ je priecna cast potencialu: $\nabla.\vec{A}_\perp - 0$, kym $\nabla\lambda$ predstavuje jeho pozdlznu cast. Pomocou takto zavedeneho rozkladu $\vec{A}$ riesenie pre A_0 nadobuda tvar:

$$A_0(t, \vec{x}) = -\dot{\lambda}(t, \vec{x}) + \frac{e}{4\pi} \int d^3\vec{y}\, \frac{\rho(t, \vec{x})}{|\vec{x}) - \vec{y}|}\,.$$

Poznamenajme, ze pre intenzitu elektrickehom pola dostame podobny rozklad na pozdlznu cat (prve dva cleny) a priecnu cast (treti clen):

$$\vec{E} \;=\; \nabla A_0 \;+\; \nabla\dot{\lambda} \;+\; \dot{\vec{A}}_\perp \,,$$

kde nakoniec treba dosadit za A_0 vyssie uvedenu formulu.

Dosadme teraz do Hamiltonianu rozklady na priecne a pozdlzne casti vektoroveho potencialu a intenzity pola:

$$H \;=\; \int d^3\vec{x}\,[\frac{1}{2}\,\dot{\vec{A}}_\perp^2 \;+\; \frac{1}{2}\,(\nabla\times\vec{A}_\perp)^2 \;-\; e\,\vec{J}.\vec{A}_\perp$$

$$+\;\frac{1}{2}\,(\nabla A_0 \;+\; \nabla\dot{\lambda})^2 \;-\; (\nabla A_0 \;+\; \nabla\dot{\lambda}).\nabla A_0 \;+\; e\,\rho\,A_0 \;-\; e\,\vec{J}.\nabla\lambda,.$$

• Prvy riadok obsahuje len priecnu cast vektoroveho potencialu $\vec{A}_\perp$ a jeho interakciu s priestorovou castou prudu $\vec{J}$.

• Ak vyuzijeme explicitny tvar A_0 potom prvy clen na druhom riadku mozno prepisat takto,

$$\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,(\nabla A_0 \;+\; \nabla\dot{\lambda})^2 \;=\; \frac{e^2}{8\pi}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\,\frac{\rho(t,\vec{x})\,\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}\;-\;\vec{y}|}\,,$$

ktory predstavuje *Coulombovsku energiu* vonkajsich nabojov.

• Vdaka Gaussovmu zakonu druhy clen na druhom riadku je rovny nule. Zostal este treti clen umerny λ. Ako ukazeme neskor, kalibracna invariantnost dovoluje polozit $\lambda \;=\; 0$, zvolit vektorovy potencial v *Coulombovskej kalibracii* tak, aby obsahoval len priecnu cast:

$$\vec{A} \;=\; \vec{A}_\perp \quad\Leftrightarrow\quad \nabla.\vec{A} \;=\; 0\,.$$

V Coulombovskej kalibracii Hamiltonian napokon dostavame v tvare

$$H \;=\; \int d^3\vec{x}\,[\frac{1}{2}\,\dot{\vec{A}}_\perp^2 \;+\; \frac{1}{2}\,(\nabla\times\vec{A}_\perp)^2]$$

$$-\,e\int d^3\vec{x}\,\vec{J}.\vec{A}_\perp \;+\; \frac{e^2}{8\pi}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\,\frac{\rho(t,\vec{x})\,\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}\;-\;\vec{y}|}\,,$$

Prvy riadok obsahuje len volne tranzverzalne pole $\vec{A}_\perp$ (lebo Hamiltonian je kvadraticky), druhy riadok predstavuje jeho interakciu s elektromagnetickym prudom $\vec{J}$ a Coulombovsku energiu vonkajsich nabojov.

Kvantovanie volneho elektromagnetickeho pola - Fotony

Ukazeme, ze po kvantovani volne tranzverzalne pole $\vec{A}$, $\nabla.\vec{A} = 0$, popisuje system neinteragujucich castic s nulovou hmotou - *fotonov*.

Uvazujeme pole volne, t.j. $J^\mu = (\rho, \vec{J}) = 0$. V Coulombovskej kalibracii pole fotonov je zadane ako

$$A = (A^0, \vec{A}), \quad \nabla.\vec{A} = 0 .$$

Potom

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \Box A^i - \partial^i \partial_\mu A^i = \Box A^i .$$

Posledny clen je nulovy, takze Maxwellove rovnice pre A^i sa redukuju na K-G rovnicu s nulovou hmotou m pre vektorovy potencial $\vec{A}$, ktoru musime doplnit podmienkou tranzverzality $\vec{A}$:

$$\Box \vec{A} = 0 , \quad \nabla.\vec{A} = 0 .$$

Riesenie tejto ulohy hladame v tvare rozvoja do rovinnych vln

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\sigma=1,2} [a_\sigma(k)\, \vec{e}_\sigma(k)\, e^{-ikx} + a^\dagger_\sigma(k)\, \vec{e}^{\,*}_\sigma(k)\, e^{+ikx}] ,$$

kde $k = (\omega_k, \vec{k})$, $\omega_k = |\vec{k}|$, co vyjadruje to, ze fotony maju nulovu kludovu hmotu. Dalej, $\vec{e}_\sigma(k)$ a $\vec{e}^{\,*}_\sigma(k)$ su dva komplexne polarizacne vektory, ktore berie normovane a kolme na $\vec{k}$:

$$\vec{e}_\sigma(k).\vec{e}^{\,*}_\sigma(k') = \delta_{\sigma\sigma'} , \quad \vec{k}.\vec{e}_\sigma(k) = \vec{k}.\vec{e}^{\,*}_\sigma(k') = 0 .$$

Posledna podmienka garantuje tranzvernalnost pola $\vec{A}$.

Kvantovanie spociva v tom, ze pre koeficienty $a_\sigma(k)$ a $a^\dagger_\sigma(k)$ rozkladu pola $\vec{A}(x)$ predpiseme komutacne vztahy pre anihilacne operatory $a_\sigma(k)$ a kreacne operatory $a^\dagger_\sigma(k)$ bozonoveho typu urcene komutacnymi vztahmi:

$$[a_\sigma(k), a^\dagger_{\sigma'}(k')] = (2\pi)^3\, \delta(\vec{k} - \vec{k},)\, \delta_{\sigma,\sigma'}$$

$$[a_\sigma(k), a_{\sigma'}(k')] = [a^\dagger_\sigma(k), a^\dagger_{\sigma'}(k')] = 0 .$$

anihilacne a kreacne operatory posobia vo Fockovom priestore fotonov generovanom posobenim kreacnych operatorov na vakuum:

$$|(k_1, \sigma_1), \dots (k_n, \sigma_n)\rangle \sim a^\dagger_{\sigma_1}(k_1) \dots {}^\dagger_{\sigma_n}(k_n)\, |0\rangle ,$$

kde vakuovy stav $|0\rangle$ je definovany obvyklym sposobom: $a_\sigma(k)\, 0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$.

Polarizacna suma. Polarizacne vektory $\vec{e}_\sigma(k)$ a $\vec{e}^{\,*}_\sigma(k)$, $\sigma = 1, 2$, tvoria spolu s vektorom $\vec{e}_0(k) = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$ uplny ortonormalny system vektorov v trojrozmernom pristore hybnost $\vec{k}$. Preto plati

$$e^i_0(k)\, e^j_0(k) + \sum_{\sigma=1,2} e^i_\sigma(k)\, e^{j*}_\sigma(k) = \delta^{ij} ,$$

odkial hned dostaneme *polarizacnu sumu* pre polarizacne vektory

$$\sum_{\sigma=1,2} e^i_\sigma(k) \;=\; \delta^{ij} \;-\; \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}\,.$$

Fotonovy propagator je ako vakuova stredna hodnota T-sucinu foronovych poli (priecneho elektromagnetickeho potencialu):

$$\langle 0|T[A^i_\perp(x)\, A^j_\perp(x')]|0\rangle \;=\; D^{ij}_C(x-x')\,.$$

• Pre $x_0 \;>\; x_0'$, podosadeni rozkladu pola do rovinnych vln dostaneme, dostaneme:

$$D^{ij}_C(x-x') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^6}\int \frac{d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega_k\, 2\omega_{k'}}}$$

$$\times \sum_{\sigma\,\sigma'} e^i_\sigma(k)\, e^{*j}_{\sigma'}(k')\, e^{-ikx-+ik'x'}\, \langle 0|\, a_\sigma(k)\, a^\dagger_{\sigma'}(k')\,|0\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\sigma e^i_\sigma(k)\, e^{j*}_\sigma(k)\, e^{-ikx(-x')}\,.$$

Tu sme vyuzili formulu $\langle 0|\, a_\sigma(k)\, a^\dagger_{\sigma'}(k')\,|0\rangle$ a nasledne integrovali cez $d^3\vec{k}$ vyscitali cez σ'.Ak teaz este vyuzijeme vzorec pre polarizacnu sumu, tak dostaneme:

$$D^{ij}_C(x-x') \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k}\left(\delta^{ij} \;-\; \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}\right) e^{-ikx(-x')}$$

$$= \left(\delta^{ij} \;-\; \triangle^{-1}\, partial^i \partial^j\right) \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k}\, e^{-ikx(-x')}\,.$$

• Pre $x_0' \;>\; x_0$, podobne dostaneme:

$$D^{ij}_C(x-x') \;=\; \left(\delta^{ij} \;-\; \triangle^{-1}\, \partial^i \partial^j\right) \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k}\, e^{-ikx(-x')}\,.$$

V oboch pripadoch posledna integracia presne odpoveda vyrazu pre propagator skalarne pola, takze ak prejdeme s hybnostou $k \;=\; (\omega_k, \vec{k})$ mimo hmotovu nadplochu a nahradime ju $k \;=\; (k_0, \vec{k})$, s lubovolnym k_0, tak obdrzime relativisticky invariantny vyraz pre fotonovy propagator:

$$D^{ij}_C(x-x') \;=\; \left(\delta^{ij} \;-\; \triangle^{-1}\, \partial^i \partial^j\right) \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 \;+\; i\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \left(\delta^{ij} \;-\; \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}\right) \frac{i}{k^2 \;+\; i\varepsilon}\, e^{-ikx(-x')}\,.$$

Lagrangian v kvantovej elektrodynamike (QED)

Pod kvantovou elektrodynamikou sa zvycajne rozumie system nabitych castic interagujucich s polom fotonov. Ako nabite castice budeme uvazovat elektrony a ich anticastice pozitrony, ktore su popisane Diracovskym polom $\psi(x)$. Lagrangian kvantovej elektrodynamiky (QED) sa berie v tvare

$$\mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi}) \;=\; -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \;+\; i\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\psi \;-\; m\,\bar{\psi}\psi$$
$$-\; e\,\bar{\psi}\,\gamma^{\nu}\,\psi\,A_{\nu}\,,$$

kde, odobne ako predtym. $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\mu}A_{\nu}$ oznacuje intenzitu elektromagnetickeho pola. Prvy riadok je suctom volnych Lagrangianov pre elektromagneticke a Diracovske pole, kym druhy popisuje interakciu elektromagnetickeho pola s prudom nabitych elektronov a pozitronov:

$$J^{\nu} \;=\; e\,\bar{\psi}\,\gamma^{\nu}\,\psi\,.$$

Pohybove Eulerove-Lagrangeove rovnice su:
• Maxwellove rovnice pre elektromagneticke pole

$$\partial_{\mu}\,F^{\mu\nu} \;=\; -\,e\,J^{\nu}\,,$$

s vyssie zadanym prudom J^{ν}, a
• Diracove rovnice pre polia ψ a $\bar{\psi}$

$$i\gamma^{\mu}\,(\partial_{\mu}\,\psi)(x) \;=\; m\,\psi(x) \;+\; e\,\gamma^{\mu}\,\psi(x)\,A_{m}u(x)\;,$$
$$i(\partial_{\mu}\,\bar{\psi})(x)\,\gamma^{\mu} \;=\; -\,m\,\bar{\psi}(x) \;-\; e\,\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\,A_{m}u(x)\,.$$

Z pohybovych rovnic pre ψ a $\bar{\psi}$ lahko dostaneme zakon zachovania prudu - rovnicu kontinuity: $\partial_{\mu}\,J^{\mu}(x) \,=\, 0$, ktora je nutna pre konzistentnost Maxwellovych rovnic. Rovnica kontinuity je ekvivalentna fundamentalnemu *zakonu zachovania celkoveho elektrickeho naboja*

$$Q(t) \;=\; e\int d^3\vec{x}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^{0}\,\psi(x)\,,$$

t.j. nezavisi od casu $t = x_0$: $\dot{Q}(t) = 0$.

Hamiltonian QED sa odvodzuje uplne rovnako ako vyssie (ked sme urcili energiu elektromagnetickeho pola interagujuceho s vonkajsim zdrojom):

$$H \;=\; \int d^3\vec{x}\,[\frac{1}{2}\,\dot{\vec{A}}_{\perp}^{2} \;+\; \frac{1}{2}\,(\nabla\times\vec{A}_{\perp})^{2}] \;+\; H_D$$

$$- e \int d^3\vec{x}\, \vec{J}.\vec{A}_\perp \; + \; \frac{e^2}{8\pi} \int d^3\vec{x} d^3\vec{y}\, \frac{\rho(t,\vec{x})\, \rho(t,\vec{y})}{|\vec{x} \, - \, \vec{y}|} \; - \; e \int d^3\vec{x}\, \vec{J}.\nabla\lambda \, .$$

Tu H_D je hamiltonian Diracovho pola

$$H_D \; = \; \int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}.\nabla \, + \, m)\psi$$

a $\vec{J}$ je priestorova hustota elektromagnetickeho prudu Diracovych castic

$$\vec{J} \, = \, e\, \bar{\psi}\, \vec{\gamma}\, \psi \, .$$

Posledny clen v Hamiltoniane, ktory zavisi od pozdlznej casti elektromagnetickeho pola $\nabla\lambda \; = \; \nabla\lambda(x)$, mozno eliminovat tym, ze zmenime fazu Diracovho pola a polozime:

$$\psi(x) \; = \; e^{-ie\lambda(x)}\psi'(x) \, , \quad \bar{\psi}(x) \; = \; e^{ie\lambda(x)}\bar{\psi}'(x) \, .$$

Pri tejto zamene Diracov Hamiltonian nadobudne tvar

$$H_D \; = \; \int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}'(-i\vec{\gamma}.\nabla \, + \, m)\psi' \; + \; e \int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}'\vec{\gamma}\psi'.\nabla\lambda \, .$$

Posledny clen sa ale prave kompenzuje s poslednym integralom v H zavisiacim od $\nabla\lambda$.

Vidime, ze Hamiltonian QED vzdy mozeme volit v tvare (miesto ψ' a $\bar{\psi}'$ piseme ψ a $\bar{\psi}$):

$$H \; = \; \int d^3\vec{x}\, [\frac{1}{2}\, \dot{\vec{A}}_\perp^2(x) \; + \; \frac{1}{2}\, (\nabla \times \vec{A}_\perp)^2(x)] \; + \; \int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma}.\nabla \, + \, m)\psi(x)$$

$$- \, e \int d^3\vec{x}\, \vec{J}(x).\vec{A}_\perp(x) \; + \; \frac{e^2}{8\pi} \int d^3\vec{x} d^3\vec{y}\, \frac{\rho(t,\vec{x})\, \rho(t,\vec{y})}{|\vec{x} \, - \, \vec{y}|} \, ,$$

Interpretacia je nasledovna:

• prvy riadok odpoveda Hamiltonianom volnych tranzverzalnych fotonov a volnych nabitych castic (elektronov a pozitronov),

• druhy riadok popisuje interakcie: prvy clen odpoveda interakcii nabitych castic s fotonmi a druhy reprezentuje vzajomnu Coulombovsku interakciu nabitych castic.

Kalibracna invariantnost. To, ze v Hamiltoniane QED sme dokazali eliminovat pozdlzne elektromagneicke pole a zostal nam system nabitych castic a tranzverzalnycg fotonov suvisi s lokalnou invariantnostou Lagrangianu QED.

Lahko sa mozno presvedcit, ze Lagrangian QED $\mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi})$ je invariantny voci *lokalnym kalibracnym transformaciam*

$$A_\mu(x) \; \mapsto \; A'_\mu(x) \; = \; A_\mu(x) \; + \; \partial_\mu\alpha(x) \, .$$

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\,\psi(x)\,, \quad \bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\,e^{-ie\alpha(x)}\,,$$

kde $\alpha(x)$ generuje realnu lokalnu (zavislu na x) zmenu faze Diracovho pola:
• cleny $\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$ a $m\,\bar{\psi}\psi$ su evidentne kalibracne invariantne,
• zmeny clenov $i\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\psi$ a $-e\,\bar{\psi}\,\gamma^{\nu}\,\psi\,A_{\nu}$ pri kalibracnych transformaciach sa navzajom vyrusia.

Poznamka. Vhodnym vyberom funkcie $\alpha(x)$ mozno dosiahnut to, ze potencial elemagnetickeho pola splna dodatocnu podmienku. Najcastejsie sa uvazuje kalibracie
• *Coulombova kalibracia* $\nabla.\vec{A} = 0$ - elektromagneticky potencial je tranzverzalny. Tuto kalibraciu sme uvazovali vyssie, ked sme eliminovali sme pozdlznu cast potencialu $\nabla\lambda$),
• *Lorentzova kalibracia* $\partial_{\mu}\,A^{\mu} = 0$. Toto je relativisticky invariantna kalibracia (podmienka na potencial sa nemeni pri prechode do ineho inercialneho systemu). S takouto kalibraciou sa stretneme neskor.

Poruchovy pocet

Interakcny obraz kvantovej mechaniky

"Otcovia" kvantovej mechaniky, Schrodinger, Heisenberg a Dirac, zanechali po sebe jej formulaciu - it obraz, v ktorom formulovali dynamiku kvantoveho systemu. Tento, obraz kvantoveho systemu je univerzalny a nezalezi na tom ci sa jedna o system s konecnym poctom castic (stupnov volnosti), alebo o kvantovopolny system s nekonecnym poctom castic (stupnov volnosti).

Schrodingerov obraz. Ak je dynamika systemu, jeho casovy vyvoj, zadany Hamiltonovym operatorom (kratko Hamiltonianom) H, potom casovy vyvoj systemu je popisany vlnovou funkciou - stavovym vektorom $|\psi(t)\rangle$ v Hilbertovm priestore. Stavovy vektor je riesenim casovej Schrodingerovej rovnice (vyberame sustavu jednotiek v ktorej Planckova konstanta $\hbar = 1$):

$$i\partial_t\,|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle\,.$$

Jedna sa do diferencialnu rovnicu 1. radu v t, podla predpokladu, s Hamiltonianom H explicitne nezavislym od casu. Formalne riesenie takejto rovnice je dane ako exponenta

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}\,|\psi\rangle\,.$$

Riesenie splna pociatocnu podmienku $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$.

V Schrodingerovom obraze je kazdej (beznej) fyzikalnej velicine ospoveda hermitovsky operatom explicitne nezavisly od casu. Casovy vyvoj fyzikalnej veliciny, odpovedajucej operatoru A, je dany ako stredna hodnota operatora A v stave $|\psi(t)\rangle$:

$$A(t) \;:=\; \langle\psi(t)|\, A\, |\psi(t)\rangle \;=\; \langle\psi|\, e^{iHt}\, A\, e^{-iHt}\, |\psi\rangle\,.$$

Heisenbergov obraz. V Heisenbergovom obraze casovy vyvoj nesu operatory $A_H(t)$ a stavy nezavisia od casu. Stredna hodnota fyzikalnej veliciny $A_H(t)$ v stave $|\psi\rangle$ je dana ako

$$A(t) \;:=\; \langle\psi|\, A_H(t)\, |\psi\rangle\,.$$

Porovnanim s formulou pre $A(t)$ v Schrodingerovom obraze dostanem pre $A_H(t)$ formulu:

$$A_H(t) \;=\; e^{iHt}\, A\, e^{-iHt}\,.$$

Operator $A_H(t)$ vyhovuje Heisenbergovej pohybovej rovnici

$$\partial_t\, A_H(t) \;=\; i[H, A_H(t)]\,,$$

doplnenej pociatocnou podmienkou $A_H(0) \;=\; A$. Heisenbergova rovnica obsahuje informaciu o dynamike systemu.

Formalne Heisenbergova rovnica je sice uplne ekvivalentna Schrodingerovej rovnici, ale v kvantovej mechanike sa castejsie vyuziva Schrodingerova rovnica: teoria parcialnych diferencialnych rovnic je lepsie prepracovana ako teoria operatorovych diferencialnych rovnic v Hilbertovom priestore.

Interakcny (Diracov) obraz. Najst exaktne riesenia Schrodingerovej pohybovej rovnice alebo Heisenbergovej pohybovej rovnice sa podari len v niekolko malo (dolezitych) pripadoch. Je preto prirodzene sformulovat obraz prisposobeny na priblizne urcenie dynamiky kvantoveho systemu. Interakcny obraz sformuloval Dirac a preto sa niekedy nazyva aj Diracov obraz. Postupuje sa takto:

• Najprv Hamiltonian systemu rozdelime na dve casti

$$H \;=\; H_0 \;+\; H_{int}\,,$$

pricom "volnym" Hamiltonianom H_0 popisuje neinteragujuce podsystemy, ktorych dynamika sa riesi exaktne,

• Interakcia medzi podsystemami je popisana "interakcnym" Hamiltonianom H_{int} a berie do uvahy postupne (iterativne) ako porucha.

Vo vyraze pre strednu hodnotu fyzikalnej veliciny $A(t)$ oblozime operator A jednotkovym operatorom zapisanym v tvare $\exp(iH_0t)\,\exp(-iH_0t)$:

$$A(t) \;=\; \langle\psi|\, e^{iHt}\, e^{iH_0t}\, e^{-iH_0t}\, A\, e^{iH_0t}\, e^{-iH_0t}\; e^{-iHt}\, |\psi\rangle\,.$$

Zavedieme teraz v interakcnom obraze operatory $A_I(t)$ odpovedajuce fyzikalnym velicinam a stavoveve vektory $|\psi_I(t)\rangle$ takto:

$$A_I(t) \ := \ e^{-iH_0 t}\, A\, e^{iH_0 t}\,,$$
$$|\psi_I(t)\rangle \ := \ e^{iH_0 t}\ e^{-iHt}\, |\psi\rangle\,.$$

• Vyraz pre $A_I(t)$ neznamena nic ine, ako to, ze casovy vyvoj operatorov $A_I(t)$ je *trivialny.* Pre operatory plati Heisenbergova pohybova rovnica s volnym Hamiltonianom H_0:

$$\partial_t\, A_I(t) \ = \ i[H_0, A_I(t)]\,.$$

Tato rovnica nezahrna v sebe interakciu medzi posystemami a je rovnaky ako pre "volne" podsystemy.

• Plna iformacia o interakciach v uvazovanom systeme je zakodovana v casovom vyvoji stavu $|\psi_I(t)\rangle$. S exponencialami v jeho definicii sa pracuje obtiazne. Preto najdeme pohybovu rovnicu pre stav $|\psi_I(t)\rangle$ v diferencialnom tvare.

Za tymto ucelom derivujme definicnu formulu pre $|\psi_I(t)\rangle$ podla casu:

$$i\partial_t\, |\psi_I(t)\rangle \ = \ i\partial_t\, (e^{iH_0 t}\, e^{-iHt}\, |\psi\rangle)$$
$$= \ -\, e^{iH_0 t}\, H_0\, e^{-iHt}\, |\psi\rangle \ + \ e^{-iH_0 t}\, H\, e^{-iHt}\, |\psi\rangle \ = \ e^{iH_0 t}\, H_{int}\, e^{-iHt}\, |\psi\rangle\,.$$

Ak vyadrime interakcny Hamiltoniam H_{int} v interakcnom obraze

$$H^I_{int}(t) \ = \ e^{-iH_0 t}\, H_{int}\, e^{iH_0 t}\,,$$

tak predchadzajucu rovnicu uz lahko prepiseme do tvaru *pohybovej rovnice stavu v interakcnom obraze*:

$$i\partial_t\, |\psi_I(t)\rangle \ = \ H^I_{int}(t)\, |\psi_I(t)\rangle\,.$$

Tuto rovnicu treba doplnit pociatocnou podmienkou $|\psi_I(0)\rangle \ = \ |\psi\rangle$. Samozrejme, pociatocnu podmienku mozno volit v lubovolnom case t_0: $|\psi_I(t_0)\rangle \ = \ |\psi_0\rangle$.

Takto formulovanu ulohu je vyhodne prepisat ako pohybovu rovnicu v integralnom tvare:

$$|\psi_I(t)\rangle \ = \ |\psi_0\rangle \ - \ i \int_{t_0}^{t} dt'\, H^I_{int}(t')\, |\psi_I(t')\rangle\,.$$

Pociatocna podmienka je evidentne splnena a derivovanim rovnice podla t sa mozno lahko presvedcit o splneni diferencialnej pohybovej rovnice stavu $|\psi_I(t)\rangle$.

Evolucny operator a S-matica. Integralnu evolucnu rovnicu mozeme riesit iteracne: zvolime stav $|\psi^0_I(t)\rangle \ = \ |\psi_0\rangle$ a dalsie stavy $|\psi^n(t)\rangle$, pre $n \ = \ 1, 2, \ldots,$, definujeme pomocou rekurentneho vztahu

$$|\psi^{n+1}_I(t)\rangle \ = \ |\psi_0\rangle \ - \ i \int_{t_0}^{t} dt'\, H^I_{int}(t')\, |\psi^n_I(t')\rangle\,.$$

Po iteraciach formalne riesenie integralnej pohybovej rovnice dostaneme v tvare:

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; |\psi_0\rangle$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_n\int_{t_0}^{t_n}dt_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{t_2}dt_1\,H^I_{int}(t_n)\,H^I_{int}(t_{n-1})\,\ldots\,H^I_{int}(t_1)\,|\psi_0\rangle\,.$$

Hovorime, o formalnom rieseni, lebo konvergencia iteracnej procedury nie je vobec trivialne.

Pre zjednodusenie zapisu, je vyhodne zaviest casovo-usporiadany T-*sucin* operatorov $A_1(t_1)$, $A_2(t_2)$, $\ldots$, $A_n(t_n)$ (zavislych od roznych casov $t_1, t_2, \ldots, t_n$) takto:

$$T[A_1(t_1)\,A_2(t_2)\,\ldots\,A_n(t_n)] \;=\; A_{i_1}(t_{i_1})\,A_{i_2}(t_{i_2})\,\ldots\,A_{i_n}(t_{i_n})\,,\ \text{kde}\ t_1\,>\,t_2\,>\,\ldots\,>\,t_n\,.$$

Pomocou tohto oznacenia mozme pisat

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_n\int_{t_0}^{t}dt_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{t}dt_1\,H^I_{int}(t_n)\,H^I_{int}(t_{n-1})\,\ldots\,H^I_{int}(t_1)\,|\psi_0\rangle$$

$$\equiv\; T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}dt'\,H^I_{int}(t')\right)\,|\psi_0\rangle\,.$$

Tu sme uvazili, ze v n-tom sucte mame $n!$ povodnych prispevkov odpovedajucich roznym casovym usporiadaniam, v poslednom riadku je definovana tzv. T-usporiadana exponenta.

Tuto rovnicu mozme zapisat tiez takto

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; U(t,t_0)\,|\psi_I(t_0)\rangle\,.$$

Tu sme zaviedli *evolucny operator* $U(t,t_0)$ vztahom

$$U(t,t_0) \;:=\; T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}dt'\,H^I_{int}(t')\right)$$

$$=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_n\int_{t_0}^{t}dt_{n-1}\ldots\int_{t_0}^{t}dt_1\,T[H^I_{int}(t_n)\,H^I_{int}(t_{n-1})\,\ldots\,H^I_{int}(t_1)]\,.$$

Evolucny operator ma nasledujuce dolezite vlastnosti:

• Prevadza stavovy vektor systemu $|\psi_I(t_0)\rangle$ v case t_0 na stavovy vektor systemu $|\psi_I(t_0)\rangle$ v case $t\;>\;t_0$, volba pociatocneho a konecneho casu je uplne lubolna.

• Evolucny operator definuje 1-parametricku grupu casoveho vyvoja systemu v Hilbertovom priestore stavov:

$$U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0) \;=\; U(t_2,t_0)\,,\quad U(t,t) \;=\; 1\,.$$

Je to pochopitelne, lebo evolucny operator odpoveda operatoru $\exp(-iHt)$ v interakcnom obraze.

Dolezite informacie o dynamike kvantoveho systemu poskytuju prechody z pociatocneho stavu $|i\rangle$ v case $t_i = -\infty$ do konecneho stavu $|f\rangle$ v case $t_f = +\infty$: amplituda takehoto prechodu je dana ako maticovy prvok operatora

$$S = \lim_{t_i \to -\infty \; t_f \to +\infty} U(t_f, t_i) \,.$$

Hladana amplituda pravdepodobnosti prechodu je dana ako

$$\langle f| \, S \, |i\rangle = \lim_{t_i \to -\infty \; t_f \to +\infty} \langle f| \, U(t_f, t_i) \, |i\rangle \,.$$

Takto definovany operator zaviedol Heisenberg a nazval ho S-maticou (S je od anglickeho slova "scattering" = rozptyl, resp. jeho nemeckeho ekvivalentu "Streuung"). Je vyznamny najma pre kvantovo-polny popis rozptylu castic.

Rozptylove procesy v teorii pola

Samo-interagujuce skalarne pole.

Uvazujme samo-interagujuce realne skalarne pole $\phi = \phi(x) = \phi^*(x)$ popisane hustotou Lagrangianu

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi \, \partial^\mu\phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \,.$$

Prva dva cleny kvadraticke vo ϕ popisuju volne pole, posledny kvarticky clen popisuje jeho samo-interakciu, λ je interakcna konstanta (faktor 4! odpoveda beznej konvencii).

Hamiltonian tohto polno-teoretickeho systemu je dany ako

$$H = \int d^3\vec{x} \, \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \,.$$

Uplne riesenie pohybovych rovnic s tymto Hamiltonianom predstavuje extremne tazky doteraz nevyrieseny problem. Rozdelime preto H na volnu kvadraticku cast a (kvarticky) zvysok popisujuci samo-interakciu: $H = H_0 + H_I$. Po kvantovani

$$H_0 = \int d^3\vec{x} \, \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \,,$$

$$H_I = \frac{\lambda}{4!} \int d^3\vec{x} \, \phi^4 \,.$$

Pole kvantujeme a prejdeme do interakcneho obrazu: fyzikalne veliciny su vyjadrene pomocou operatorov pola $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ v caso-priestorovom bode

$x = (t, \vec{x})$ a derivacii pola podla x. Casovy vyvoj polnych operatorov je dany volnym hamiltonianom H_0. Vseobecna volneho pola

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p\, e^{-ipx} \;+\; a_p^\dagger\, e^{ipx} \right]$$

je dana ako linearna kombinacia rovinnych vln

$$e^{\mp ipx} \;=\; e^{\mp i(E_p t \,-\, \vec{p}.\vec{x})} \,.$$

Toto garantuje, ze sa jedna o interakcny obraz (kvoli jednoduseniu zapisu vynechavame index I). Podstatne je to, ze 4-hybnost je na hmotovej nadploche: $p = (E_p, \vec{p})$ je 4-hybnost castice s hybnostou $\vec{p}$ a energiou $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Poznamka: Nezavisla premenna je 3-hybnost $\vec{p}$, takze by sme mali pisat $E_{\vec{p}}$ miesto E_p, a podobne $a_{\vec{p}}$, $a_{\vec{p}}^\dagger$ miesto a_p, $a_p^\dagger$. Zvacsa ale budeme pouzivat ako index 4-hybnost na hmotovej nadploche (specifikovanej hmotou prislusnej castice).

Koeficienty rozvoja a_p a $a_p^\dagger$ su anihilacne a kreacne operatory bozonoveho typu, ktore splnuju komutacne vztahy

$$[a_p, a_q^\dagger] \;=\; (2\pi)^3\, \delta(\vec{p} - \vec{q}) \,,$$

$$[a_p, a_q] \;=\; [a_p^\dagger, a_q^\dagger] \;=\; 0 \,.$$

Operator a_p a k nemu hermitovsky zdruzeny operator $a_p^\dagger$ posobia vo Fockovom priestore n casticovych stavov

$$|p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle \;=\; \sqrt{2E_{p_1}\, 2E_{p_2}\, \ldots\, 2E_{p_n}}\, a_{p_1}^\dagger\, a_{p_2}^\dagger\, \ldots\, a_{p_n}^\dagger\, |0\rangle \,.$$

Pokial niektore z hybnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ su rovnake, prava strana obsahuje normalizacny faktor. Symbol $|0\rangle$ oznacuje *vakuum, (vakouvy stav)* t.j. stav bez castic. Vakuovy stav je definovany podmienkami

$$a_p\, |0\rangle \;=\; 0 \;\; \text{pre vsetky } p \text{ na hmotovej nadploche} \,.$$

Hermitovskym zdruzenim dostaneme ekvivalentne podmienky

$$\langle 0|\, a_p^\dagger \;=\; 0 \;\; \text{pre vsetky } p \text{ na hmotovej nadploche} \,.$$

Amplituda rozptylu.

Predpokladajme, ze system je v case t_0 v pociatocnom (*inicialnom*) stave popisanom vektorom vo Fockovom priestore

$$|i\rangle \;=\; |p_1, \ldots, p_n\rangle \;=\; \sqrt{2E_{p_1}\, \ldots\, 2E_{p_n}}\, a_{p_1}^\dagger\, \ldots\, a_{p_n}^\dagger\, |0\rangle \,.$$

V tomto stave $|i\rangle$ system obsahuje n castic s hybnostami $p_1, \ldots, p_n$.

Hladajme amplitudu pravdepodobnosti prechodu v case t do koncoveho stave, vo vseobecnosti, m castic s hybnostami $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$:

$$|f\rangle \;=\; |p'_1, p'_2, \ldots, p'_m\rangle \;=\; \sqrt{2E_{p'_1}\, \ldots\, 2E_{p'_m}}\, a^\dagger_{p'_1}\, \ldots\, a^\dagger_{p'_m}\, |0\rangle\,.$$

Hladana amplituda pravdepodobnosti je zrejme dana ako

$$\langle f|\, U(t,t_0)|i\rangle\,.$$

V procesoch rozptylu castic s kratko-dosahovou interakciou:

• v pociatocnom stave mame niekolko vzdialenych neinteragujucich volnych castic,

• tieto sa zrazia, velmi kratky cas spolu interaguju a rozptylia sa,

• po roztyle mame v koncovom stave iny system volnych rozptylenych neinteragujucich volnych castic.

V obdobi pred zrazkou a po zrazke castice (prakticky) neinteraguju a meni sa len faza amplitudy pravdepodobnosti, takze pravdepodobnost prechodu je (prakticky) konstantna. Pre popis rozptylovych procesov

$$p_1 \,+\, p_2 \,+\, \ldots \,+\, p_n \;\longrightarrow\; p'_1 \,+\, p'_2 \,+\, \ldots \,+\, p'_m$$

podstatna je amplituda pravdepodobnosti prechodu

$$\langle f|S|i\rangle \;=\; \lim_{t\to+\infty,\, t_0\to-\infty} \langle f|\, U(t,t_0)|i\rangle\,.$$

Prislusne amplitudy su vlastne maticove prvky S-matice, operatora vo Fockovom priestore, ktory zaviedol Heisenberg:

$$S \;\equiv\; \mathbf{1} \,+\, i\,T \;=\; \lim_{t\to+\infty,\, t_0\to-\infty} U(t,t_0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_n \int dt_{n-1} \ldots \int dt_1\, T[H_{int}(t_n)\, H_{int}(t_{n-1})\, \ldots\, H_{int}(t_1)]\,. \quad (2.3)$$

Posledny riadok predstavuje poruchovy rozvoj pre S-maticu (vsetky integraly sa beru od $-\infty$ po $+\infty$).

Vlastne rozptylove procesy ale popisuju maticove prvky (T-matice) operatora, v ktorom sme z S-matice odclenili jednotkovy operator $\mathbf{1}$, lebo prispieva len do procesov, v ktorych nenastane rozptyl (pociatocny stav je rovnaky ako koncovy stav). Poruchovy rozvoj pre T-maticu, dostaneme tak, ze v (1.2) scitame cez $n = 1, 2, \ldots$.

Do poruchoveho rozvoja (1.2) dosadme vyraz pre interakcny hamiltonian samo-integajuceho pola

$$H_I \;=\; \frac{\lambda}{4!} \int d^3\vec{x}\; :\phi^4:\,.$$

Pretoze sa jedna o operator vo Fockovom priestore, zaviedli sme operaciu normalneho usporiadania: pole rozvinieme do rovinnych vln a potom v kazdom monome dame kreacne operatory nalavo a anihilacne napravo (bez normalneho usporiadania stredna vakuovava hodnota H_I by divergovala). Poruchovy rozvoj pre S-maticu teraz mozeme prepisat takto:

$$S \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_n \int d^4x_{n-1} \ldots \int d^4x_1 \, T[\mathcal{L}_{int}(x_n)\, \mathcal{L}_{int}(x_{n-1}) \,\ldots\, \mathcal{L}_{int}(x_1)]\,. \tag{2.4}$$

Vsetky integraly sa beru cez cely Minkowskeho priestor a integrand

$$\mathcal{L}_{int}(x) \;=\; -\,\frac{\lambda}{4!}\, :\phi^4(x):$$

reprezentuje hustotu interakcneho Lagrangianu pre kvarticky samo-interagujuce skalarne pole.

Operacia T-usporiadania v integrandoch v (1.3) sice zdanlivo narusuje relativisticku invariantnost, ale nie to tak - relativisticka pricinnost (udalosti v bodoch x a y sa neovplyvnuju, pokial $(x-y)^2 < 0$) garantuje relativisticku invariantnost (1.3).

Vyjadrenie (1.3) pre S-maticu je relativisticky invariantne: S-matica je skalarny operator a take budu aj amplitudy prechodu pri vhodnej (relativistickej) normalizacii stavov vo Fockovom priestore. V konecnom dosledku budu relativisticky invariantne ucinne prierezy rozptylovych procesov.

Wickova veta sa tyka efektivneho vypoctu strednych vakouvych hodnot vyrazov typu

$$\langle 0| T\,[A_1(x_1)\, A_2(x_2) \,\ldots\, A_n(x_n)] |0\rangle\,, \tag{2.5}$$

kde kazdy z faktorov je normalnym sucinom n_j poli $\phi(x)$ v danom priestorocasovom bode:

$$A_j(x) \;=: \phi(x) \ldots \phi(x):\,, \quad n_j \;-\; \text{faktorov}\,.$$

Na mocninu pola n_j v jednotlivych faktorov nie je ziadne obmedzenie.

Zavedma Wickovu kontrakciu (sparovanie) poli $\phi(x)$ a $\phi(y)$ v dvoch roznych bodoch

$$\phi(x)\,\phi(y) \;=\; \langle 0|\, T[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle \;=\; D_F(x-y)\,. \tag{2.6}$$

Nejedna sa o nic ine ako Feynmanov propagator volnych poli (je si ale dobre uvedomit, teraz uvazujeme preto volne polia, ze pracujeme v interakcnom obraze).

Wickova veta pre vypocet (1.5) nebudeme dokazovat. Uvedme si jej znenie:

$$\langle 0| T\,[A_1(x_1)\, A_2(x_2) \,\ldots\, A_n(x_n)] |0\rangle$$

$$= \sum \langle 0| \dots : \phi(x_i) \dots \phi(x_i) : \dots : \phi(x_j) \dots \phi(x_j) : \dots |0\rangle \,, \qquad (2.7)$$

kde scitame cez *vsetky mozne sparovania* poli medzi roznymi normalnymi faktormi (v ramci daneho faktora polia nekontrahujeme):

• clen vo Wickovej sume je nulovy ak zostanu niektore polia nesparovane,

• pokial su vsetky polia v clene sparovane, prispevok je rovny prislusnemu sucinu propagatorov.

Wickovu vetu aplikujme na vypocet poruchoveho prispevku n-radu do amplitudy prechodu:

$$S_{fi}^{(n)} = \frac{i^n}{n!} \sqrt{2E_{p'_1} \dots 2E_{p'_m} \, 2E_{p_1} \dots 2E_{p_n}}$$

$$\langle 0| T[a_{p'_f} \dots a_{p'_1} \int d^4x_n \dots \int d^4x_1 \, \mathcal{L}_{int}(x_n) \dots \mathcal{L}_{int}(x_1) \, a^\dagger_{p_1} \dots a^\dagger_{p_i}] |0\rangle \,.$$

Z definicie S-matice vyplyva, ze koncovy stav $|f\rangle$ sa berie *po* vsetkych casovych udajoch $t_1, \dots t_n$ vystupujucich v integraloch, kym pociatocny stav $|f\rangle$ sa berie *pred* nimi. Preto je konzistentne zahrnut pod T-sucin anihilacne operatory v koncovom stave nalavo a kreacne operatory zaciatocnom stave napravo.

Pri vypocte prispevku do $S_{fi}^{(n)}$ objavia sa kontrakcie troch typov:

• Medzi poliami $\phi(x)$ a $\phi(y)$ vystupujucimi v integrandoch $\mathcal{L}_{int}(x)$ a $\mathcal{L}_{int}(y)$ - odpovedajuca kontrakcia je dana ako propagator

$$\phi(x)\,\phi(y) = \langle 0| T[\phi(x)\phi(y)] |0\rangle = D_F(x-y) \,,$$

• Medzi polom $\phi(x)$ a anihilacnym operatorom v koncovom stave resp. kreacnym operatorom v pociatocnom stave - prislusne kontrakcie su dane ako

$$a_{p'}\,\phi(x) = \sqrt{2E_{p'}} \, \langle 0| a_{p'}\phi(x) |0\rangle = e^{-ipx} \,,$$

$$\phi(x)\,a^\dagger_p = \sqrt{2E_p} \, \langle 0| \phi(x)\, a^\dagger_p |0\rangle = e^{ipx} \,.$$

• Medzi anihilacnym operatorom v koncovom stave a kreacnym operatorom v pociatocnom stave: $a_{p'} a^\dagger_p \sim \delta(\vec{p}' - \vec{p})$. Tato kontrakcia odpovoveda pripadu, ked niektora z castic sa rozptylu nezucastnuje - taketo procesy neuvazujeme.

Feynmanove diagramy. Feynman navrhol nazornu reprezentaciu jednotlivych poruchovch prispevkov do amplitudy rozptylu pomocou diagramov. Diagram sa sklada z vonkajsich a vnutornych liniek a vertexov.

Feynmanove pravidla x-priestore.

a. *Vonkajsie linky.* Castici s hybnostou p v pociatocnom resp. koncovom stave priradime ciaru *vonkajsi linku* s vyznacenou polohou x na pravom resp. lavom konci, ktoremu v sulade s Wickovou vetou, odpoveda prispevok

e^{-ipx} v pociatocnom stave resp. e^{ipx} v koncovom stave.

b. *Vnutorne linky.* Kontrakcii poli $\phi(x)$ a $\phi(y)$ priradime usecku *vnutorny link* s koncovymi bodmi x a y, ktorej prispevok je rovny *propagatoru*

$$D_F(x-y) \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \, \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ikx} \,.$$

c. *Vertexy.* Interakcnemu Lagrangianu $-(\lambda/4!)\ :\phi^4(x):$ priradime vrchol *vertex* v bode x, z ktoreho vychadzaju 4 ciary (tolko ciar, aka je mocnina pola v interakcnom Lagrangiane). Prispevok vertexu je $-\lambda\ :\phi^4(x):$

Postup pri vypocte n-teho poruchoveho prispevku procesu

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_i \;\longrightarrow\; p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_f$$

je nasledovny:

• Najprv zostavime *pred-diagram* (cas ide zlava do prava):

nakreslime n vertexov v bodoch $x_1, \ldots, x_n$ so 4 ciarami,

nalavo od vertexov nakreslime i linkov s hybnostami $p_1, \ldots, p_i$ castic vstupujucich do procesu,

napravo od vertexov nakreslime f linkov s hybnostami $p'_1, \ldots, p'_f$ rozptylenych castic.

• Z pred-diagramu dostaneme *Feynmanov diagram* tak, ze

$i + f$ vonkajsich linkov pospajame s linkami vychadzajucimi z vertexov,

pospajame medzi sebou zostavajuce linky vychadzajuce z vertexov (kazdy link vychadzajuci z vertexu musi byt sparovany).

• Diagramu priradime funkciu poloh vertexov, ktora zavisi na hybnostiach castic vstupujuciach do procesu a vystupujucich z neho:

vonkajsim linkom priradime kontrakcie $e^{\mp ipx}$ a vnutornym linkom propagatory $D_F(x_i - x_j)$,

za vertex v bode x_i napiseme $-i\lambda \int d^4x_i$ a vykoname vsetky integracie cez $dx_1, \ldots, dx_n$

Takto ziskame prispevok daneho diagramu ako funkciu hybnosti castic v pociatocnom a koncovom stave:

• Prispevok od daneho diagramu vydelime faktorom za jeho symetriu. Blizsie sa nimi nebudeme zaoberat, lebo v elektrodynamike symetricke faktory su rovne 1, takze ich nie je potrebne uvazovat.

• Scitame prispevky od vsetkych suvislych diagramov s n vertexami. Toto da prispevok do amplitudy roztylu $\mathcal{M}_{fi}$ v n-tom rade poruchoveho poctu.

Feynmanove pravidla p-priestore.

Integracia $dx_1, \ldots, dx_n$ cez polohy vertexov je elementarna, lebo sa jedna o integraly typu $\int dx e^{iPx}$. Feynman navrhol pravidla konstrukcie diagramov tak, ze uvedena integracia je automaticky zahrnuta:

a. *Vonkajsie linky.* Castici s hybnostou p v pociatocnom resp. koncovom stave priradime ciaru *vonkajsi linku* s vyznacenou hybnostou p, ktorej odpoveda prispevok

1 v pociatocnom aj koncovom stave.

b. *Vnutorne linky.* Vnutornemu linku priradime usecku *vnutorny link* so zadanou hybnostou k, ktorej prispevok je rovny *propagatoru* Fourierovej transformacii propagatora $D_F(x-y)$:

$$\tilde{D}_F(k) \;=\; \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, , \tag{2.8}$$

kde $\varepsilon > 0$ a vo vysledku nakoniec vezmeme limitu $\varepsilon \to 0$.

c. *Vertexy.* Interakcnemu Lagrangianu $-(\lambda/4!)\ :\phi^4(x):$ priradime *vertex*, z ktoreho vychadzaju 4 ciary s vyznacenymi hybnostami $k_1, \ldots, k_4$.

Zostavenie Feynmanovho diagramu n-teho poruchoveho prispevku je analogicke ako predtym:

• Najprv zostavime *pred-diagram* (cas ide zlava do prava):

nakreslime n vertexov so 4 ciarami, ktorym priradime hybnosti $k_1, \ldots, k_4$,

nalavo od vertexov nakreslime i linkov s hybnostami $p_1, \ldots, p_i$ castic vstupujucich do procesu,

napravo od vertexov nakreslime f linkov s hybnostami $p'_1, \ldots, p'_f$ rozptylenych castic.

• Z pred-diagramu dostaneme *Feynmanov diagram* tak, ze

$i + f$ vonkajsich linkov pospajame s linkami vychadzajucimi z vertexov,

pospajame medzi sebou zostavajuce linky vychadzajuce z vertexov (kazdy link vychadzajuci z vertexu musi byt sparovany).

• Diagramu priradime funkciu, ktora zavisi na hybnostiach castic vstupujuciach do procesu a vystupujucich z neho:

vonkajsim linkom priradime 1 a vnutornym linkom propagatory $\tilde{D}_F(k)$,

vertexu priradime $-i\lambda\, \delta(k_1, \pm \ldots \pm k_4)$, δ-funkcia garantuje zakon zachovania hybnost vo vertexe (vo vetexe hybnosti vchadzajuce/vychadzajuce berieme s kladnym/zapornym znamienkom).

• Vykoname vsetky integracie cez hybnosti na vnutornych linkoch: cast hybnosti je fixovana zakonom zachovania hybnosti vo vertexoch, cez zostavajuce neurcene hybnosti treba integrovat. Tymto ziskame prispevok daneho diagramu ako funkciu hybnosti castic v pociatocnom a koncovom stave.

• Scitame prispevky od vsetkych suvislych diagramov s n vertexami (ak treba uvazime faktory za symetriu diagramov). Toto da prispevok do amplitudy roztylu $\mathcal{M}_{fi}$ v n-tom rade poruchoveho poctu, ktora suvisi S-maticovym prvkom takto:

$$S_{fi} \;=\; \delta_{fi} \;+\; i\,\mathcal{M}_{fi}\,(2\pi)^4\delta(P'_f \;-\; P_i)\,, \tag{2.9}$$

kde $P'_f \;=\; p'_1 + \ldots + p'_m$ resp. $P_i \;=\; p_1 + \ldots + p_n$ oznacuje sucet hybnosti castic v koncovom resp. pociatocnom stave. Faktor $(2\pi)^4\delta(P'_f - P_i)$ vyjadruje zakon zachovania celkovej 4-hybnosti pri rozptyle castic (je univerzalny, takze je ho vyhodne explicitne vynat z $\mathcal{M}_{fi}$).

Kvantova elektrodynamika v Coulombovej kalibracii

V tejto casti aplikujeme poruchove metody na kvantovo-polny system popisany QED Hamiltonianom v Coulombovej kalibracii:

$$H \;=\; \int d^3\vec{x}\,\bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma}.\nabla \;+\; m)\psi(x) \;+\; \int d^3\vec{x}\,[\frac{1}{2}\,\dot{\vec{A}}_{\perp}^{2}(x) \;+\; \frac{1}{2}\,(\nabla\times\vec{A}_{\perp})^2(x)]$$

$$-\;e\int d^3\vec{x}\;\vec{J}(x).\vec{A}_{\perp}(x) \;+\; \frac{e^2}{8\pi}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\,\frac{\rho(t,\vec{x})\,\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}\;-\;\vec{y}|}\,.$$

V prvom riadku mame Hamiltoniany volnych fermionov s hmotou m a nabojom $\pm e$ (elektronov a pozitronov) a volnych tranzverzalnych fotonov s nulovou hmotou. V druhom riadku prvy clen odpoveda interakcii nabitych castic s fotonmi a druhy reprezentuje vzajomnu Coulombovsku interakciu nabitych castic.

Fermiony v interakcnom obraze su popisane volnymi Diracovskymi poliami $\psi(x)$ a $\bar{\psi}(x)$, ktore mozme rozlozit do rovinnych vln

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left(b^s_p\,u^s(p)\,e^{-ipx} \;+\; c^{s\dagger}_p\,v^s(p)\,e^{ipx}\right)$$

$$\bar{\psi}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left(c^s_p\,\bar{v}^s(p)\,e^{-ipx} \;+\; b^{s\dagger}_p\,\bar{u}^s(p)\,e^{ipx}\right)\,,$$

kde b^s_p a $b^{s\dagger}_p$ su anihilacne a kreacne operatory vo Fockovom priestore fermionove typu, ktore popisuju *elektrony* so 4-hybnostou $p \;=\; (E_p,\vec{p})$, $E_p \;=\; \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$, a spinom $s \;=\; \pm 1/2$. Podobne, c^s_p a $c^{s\dagger}_p$ su fermionovske anihilacne a kreacne operatory typu, ktore popisuju anti-elektrony = *pozitrony*.

Vonkajsie fermionove linky

Elektron v pociatocnom stave:

$$\psi(x)\,\sqrt{2E_p}b_p^{s\dagger} \;=\; \sqrt{2E_p}\langle 0|\,\psi(x)\,b^{s\dagger_p}\,|0\rangle \;=\; u_s(p)\,e^{ipx}$$

Elektron v koncovom stave:

$$\sqrt{2E_p}b_p^{s}\,\bar{\psi}(x) \;=\; \sqrt{2E_p}\langle 0|\,b_p^s\,\bar{\psi}(x)\,|0\rangle \;=\; \bar{u}_s(p)\,e^{-ipx}$$

Pozitron v pociatocnom stave:

$$\bar{\psi}(x)\,\sqrt{2E_p}c_p^{s\dagger} \;=\; \sqrt{2E_p}\langle 0|\,\bar{\psi}(x)\,c_p^{s\dagger}\,|0\rangle \;=\; \bar{v}_s(p)\,e^{-ipx}$$

Pozitron v koncovom stave:

$$\sqrt{2E_p}c_p^{s}\,\psi(x) \;=\; \sqrt{2E_p}\langle 0|\,c_p^s\,\psi(x)\,|0\rangle \;=\; v_s(p)\,e^{ipx}$$

Vnutorne fermionove linky su dane Feynmanovym propagatorom

$$S_F(x-y) \;=\; \langle 0|\,T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\,|0\rangle \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p.\gamma+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,e^{-ip(x-y)}\,.$$

Fermionove kontrakcie $\langle 0|T[\psi(x)\psi(y)]|0\rangle$ a $\langle 0|T[\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)]\,|0\rangle$ su nulove.

Fotony v interakcnom obraze su popisane ako subor tranzverzalnym (priecnym) vektorove pole bozonov s nulovou hmotou:

$$\vec{A}_\perp(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_\sigma\left(a_k^\sigma\,\vec{e}_\sigma(k)\,e^{-ikx} \;+\; a_k^{\sigma\dagger}\,\vec{e}_\sigma^{\,*}(k)\,e^{ikx}\right)\,, \tag{2.10}$$

kde 4-hybnost fotonu je dana ako $k\;=\;(\omega_k,\vec{k})$, $\omega_k\;=\;|\vec{k}|$, komplexne polarizacne vektory su ortonomalne a tranzverzalne $\vec{e}_\sigma(k)\,.\,\vec{k}\;=\;\vec{e}_\sigma^{\,*}(k)\,.\,\vec{k}\;=\;0$. Anihilacne a kreacne operatory splnaju standartne komutacne vztahy bozonoveho typu:

$$[a_\sigma(k),a_{\sigma'}^\dagger(k')] \;=\; (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k},)\,\delta_{\sigma\sigma'}$$

pricom anihilacne operatory navzajom komutuju a podobne aj kreacne operatory.

Vonkajsie fotonove linky

Foton v pociatocnom stave

$$\vec{A}_\perp(x)\,\sqrt{2\omega_k}a_k^{\sigma\dagger} \;=\; \sqrt{\omega_k}\langle 0|\,\vec{A}_\perp(x)\,a_k^{\sigma\dagger}\,|0\rangle \;=\; \vec{e}_\sigma(k)\,e^{-ikx}$$

Foton v koncovom stave Foton v pociatocnom stave

$$\sqrt{2\omega_k}a_k^\sigma\,\vec{A}_\perp(x) \;=\; \sqrt{\omega_k}\langle 0|\,a_k^\sigma\,\vec{A}_\perp(x)\,|0\rangle \;=\; \vec{e}_\sigma^{\,*}(k)\,e^{ikx}$$

Vnutorne fotonove linky su dane propagatorom transverzalnych fotonov

$$D_C^{ij}(x-y) \;=\; \langle 0|\, T[A_\perp^i(x)\, A_\perp^j(y)]\, |0\rangle$$

$$= \;\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{i}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta^{ij} - \frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)\, e^{-ip(x-y)}$$

Verexy su zadane interakcnym Hamiltonianom

$$H_{int} \;=\; -\, e\int d^3\vec{x}\; \vec{J}(x).\vec{A}_\perp(x) \;+\; \frac{e^2}{8\pi}\int d^3\vec{x} d^3\vec{y}\, \frac{\rho(t,\vec{x})\,\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}\,-\,\vec{y}|}\,,$$

kde $\vec{J}(x) = \bar{\psi}(x)\vec{\gamma}\psi(x)$ a $\rho(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$. Prvy clen opisuje interakciu nabitych castic (elektronov a pozitronov) s transverzalnymi fotonmi a druhy clen Coulombovu interkciu medzi nabitymi casticami

Vertex 1 odpovedajuci prvemu clenu v interakcnom Hamiltoniane pripiseme vyraz

$$-\, e\,\gamma^j\int d^4x\,\ldots$$

Priradime mu vertexovy diagram specifikovany 1 bodom x, z ktoreho vychadzaju dve orientovane fermionove linky (jedna smerom *do* a druha smeron *von* z vertexu) a fotonova opatrena indexom j. Sucasne sme explicitne vyznacili potrebnu integraciu cez d^4x.

Vertex 2 odpovedajuci druhemu clenu v interakcnom Hamiltoniane pripiseme vyraz

$$\frac{e^2}{8\pi}e\int dt\, d^3\vec{x}\, d^3\vec{y}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ldots \;=\; \frac{e^2}{8\pi}e\int d^4x\, d^4y\,\frac{\delta(x^0-y^0)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ldots$$

Priradime mu vertexovy diagram specifikovany 2 bodmi x a y, z kazdeho z bodov vychadza dve orientovane fermionove linky (jedna smerom *do* a druha smeron *von* z vertexu), vertexy su spojene (ciarkovanou) useckou odpovedajucou integralnemu jadru $(x^0-y^0)/|\vec{x}-\vec{y}|$ zodpovednemu za okamzitu Coulombovu interakciu. Opat sme explicitne vyznacili integracie cez d^4x a d^4y.

Propagator elektromagnetickeho pola

Feynmanove pravidla QED v Coulombovskej kalibracii mozno podstatne zefektivnit rozborom poruchoveho rozvoja amplitudy pruzneho rozptylu elektronov do 2. mocniny v parametre e (= naboj elektron). Jedna sa o proces s dvoma elektronmi v pociatocnom aj koncovom stave:

$$|i\rangle \;=\; |p_1,s_1;p_2,s_2\rangle \;\longrightarrow\; |f\rangle \;=\; |p_1',s_1';p_2',s_2'\rangle$$

Poznamenajme, ze nie je ziadny prispevok umerny e. Prispevky umerne e^2 su dvoch typov:

• Prispevok druheho radu poruchoveho poctu v 1. clene umerneho e v interakcnom Hamiltoniane, ktory popisuje interakciu nabitych castic s fotonmi, a

• prispevok prveho radu poruchoveho poctu v 2. clene umerneho e^e v interakcnom Hamiltoniane, ktory odpoveda vyajomnej Coulombovej interakcii nabitych castic.

Wickova veta dava

$$S_{fi}^{(2)} = \sum{}' \frac{(ie)^2}{2}\langle f| \int d^4x d^4y \; :\bar{\psi}(x)\gamma^i\psi(x): \; D_C^{ij}(x-y) \; :\bar{\psi}(y)\gamma^j\psi(y): \; |i\rangle$$

$$+ \sum{}' (-i)\frac{e^2}{8\pi}\langle f| \int d^4x d^4y \; :\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x): \; \frac{x^0-y^0}{|\vec{x}-\vec{y}|} \; :\bar{\psi}(y)\gamma^0\psi(y): \; |i\rangle \,.$$

V prvom clene sme explicitne vypisali kontrakciou medzi fotonmi $A_\perp^i(x)A_\perp^j(y) = D_C^{ij}(x-y)$. Symbol $\sum'$ oznacuje kontrakcie Diracovho pola s elektronmi v pociatocnom a koncovom stave, ktore su identicke v oboch clenoch.

V prvom clene mame vyraz

$$e^2 \; :\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x): \; D_C^{ij}(x-y) \; :\bar{\psi}(y)\gamma_j\psi(y):$$

kym, v druhom mame rovnaky vyraz

$$e^2 \; :\bar{\psi}(x)\gamma_0\psi(x): \; D_C^{00}(x-y) :\bar{\psi}(y)\gamma_0\psi(y):$$

v ktorom γ_i a γ_j su nahradene γ_0 a $D_C^{ij}(x-y)$ je nahradene

$$D_C^{00}(x-y) \equiv \frac{-i}{4\pi}\frac{\delta(x^0-y^0)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \,.$$

Zo struktury QED interakcneho Hamiltonianu, je evidentne, ze bez ohladu na rad poruchoveho poctu a uvazovany proces plati: vzdy ked sa objavi prispevok s $D_F^{ij}(x-y)$, tak je pritomny rovnaky prispevok s $D_F^{00}(x-y)$.

Fotonovy propagator v Coulombovskej kalibracii. Uvedeny rozbor naznacuje nasledujucu modifikaciu Feynmanovych pravidiel:

Vnutorne fotonove linky. Spojime funkcie $D_C^{ij}(x-y)$ a $D_C^{00}(x-y)$ do spolocneho Feynmanovho propagatora fotonov v x-reprezentacii v Coulombovej kalibracii $D_C^{\mu\nu}(x-y)$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$:

$$D_C^{00}(x-y) = \frac{-i}{4\pi}\frac{\delta(x^0-y^0)}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{-i}{\vec{k}^2}\,e^{-ik(x-y)} \,,$$

$$D_C^{0j}(x-y) = D_C^{j0}(x-y) = 0 \,,$$

$$D_C^{ij}(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\left(\delta^{ij}\;-\;\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)\,\frac{i}{k^2\,+\,i\varepsilon}\,e^{-ik(x-y)}\,. \tag{2.11}$$

V p-reprezentacii fotonovy propagator v Coulombovej kalibracii je dany ako:

$$\tilde{D}_C^{00}(k) \;=\; \frac{-i}{\vec{k}^2}\,, \qquad \tilde{D}_C^{0j}(k) \;=\; \tilde{D}_C^{j0}(k) \;=\; 0\,,$$

$$\tilde{D}_C^{ij}(k) \;=\; \frac{i}{k^2\,+\,i\varepsilon}\left(\delta^{ij}\;-\;\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)\,. \tag{2.12}$$

Poznamka: Pri odvodzovani integralnej formule pre $D_C^{00}(x-y)$ vyuzili sa zname vztahy

$$\delta(x^0-y^0) \;=\; \frac{1}{2'pi}\int dk^0\,e^{-ik^0(x^0-y^0)}\,, \quad \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \;=\; \frac{1}{2\pi^2}\int d^3\vec{k}\,\frac{1}{\vec{k}^2}\,e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}$$

Vertex v QED. Zavedieme *jeden* vertex

$$-\,e\,\gamma^\mu\int d^4x\,\ldots$$

Priradime mu vertexovy diagram zadany polohou x, z ktoreho vychadzaju dve orientovane fermionove linky (jedna smerom *do* a druha smeron *von* z vertexu) a fotonova opatrena indexom $\mu\;=\;0,1,2,3$. Po zostaveni Feynmanovho diagramu integrujeme cez d^4x.

Takyto vertex odpoveda hustote interakcneho Lagrangianu

$$\mathcal{L}_{int} \;=\; -e\;:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\,A_\mu(x): \tag{2.13}$$

Efektivne sa Coulombova interakcia medzi nabitymi casticami nahradila sprostredkovanou interakciou s pozdlznym elektromagnetickym polom. Toto pole ale len generuje Coulombovsku interakciu medzi nabitymi casticami a nezodpovedaju mu "nove" volne castice - pozdlzne fotony. Nemodifikuju sa preto ostavajuce Feynmanove pravidla

- predpis pre vonkajsie a vnutorne fermionove linky,
- predpis pre vonkajsie linky transverzalnych fotonov.

Kalibracna invariantnost fotonoveho propagatora. Ukazeme, ze poruchovy vypocet amplitudy rozptylu sa nemeni pri *kalibracnej transformacii* propagatora

$$D_C^{\mu\nu}(x-y) \;\rightarrow\; D^{\mu\nu}(x-y) \;\equiv\; D_C^{\mu\nu}(x-y)\,+\,\partial^\mu\chi^\nu(x-y)\,+\,\partial^\mu\chi^\nu(x-y)\,, \tag{2.14}$$

kde $\chi^\mu(z)$ je lubovolna funkcia premennej $z\;=\;x-y$.

Tvrdenie je dosledkom toho, ze propagator $D_C^{\mu\nu}(x-y)$ *vzdy* vystupuje v jednotlivych clenoch poruchoveho poctu nasledovne:

$$\int d^4x\ldots d^4y\;:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):\;\ldots\;D_C^{\mu\nu}(x-y)\;\ldots\;:\bar{\psi}(y)\gamma^j\psi(y):$$

Po kalibracnej transformacii pribudnu dva podobne cleny. Prvy z nich

$$\int d^4x \dots d^4y \ : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : \ \partial^\mu \chi^\nu(x-y) \ \dots \ : \bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y) :$$

$$= \ - \int d^4x \dots d^4y \ : \partial^\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)) : \ \chi^\nu(x-y) \ \dots \ : \bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y) : = \ 0 \, ,$$

kde sme cez d^4x integrovali per-partes (za predpokladu, ze oblast $x \to \infty$ neprispieva) a vyuzili rovnicu kontinuity elektromagnetickeho prudu $\partial^\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)) = 0$.

Z analogickych dovodov je nulovy aj druhy clen

$$\int d^4x \dots d^4y \ : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : \ \partial^\nu \chi^\mu(x-y) \ \dots \ : \bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y) :$$

$$= \ - \int d^4x \dots d^4y \ : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : \ \chi^\mu(x-y) \ \dots \ : \partial^\nu(\bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)) : = \ 0 \, .$$

Kalibracna transformacia (1.13) fotonoveho propagatora v p-reprezentacii je dana ako

$$\tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) \ \to \ \tilde{D}^{\mu\nu}(k) \ = \ \tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) \ + \ k^\mu \, \tilde{\chi}^\nu \ + \ k^\nu \, \tilde{\chi}^\mu \, , \tag{2.15}$$

kde $\tilde{\chi}^\mu$ oznacuje Fourierovu transformaciu funkcii $\chi^\mu(z)$.

Fotonovy propagator vo Feynmanovej kalibracii. Vyberme teraz funkcie $\tilde{\chi}^\mu$ takto:

$$\tilde{\chi}^0 \ = \ \frac{ik^0}{k^2 \, \vec{k}^2} \, , \quad \tilde{\chi}^j \ = \ \frac{-k^j}{k^2 \, \vec{k}^2} \, .$$

Po prevedeni prislusnej kalibracnej transformacie, propagator $\tilde{D}_C^{\mu\nu}(k)$ prejde na explicitne relativisticky fotonovy propagator vo Feynmanovej kalibracii v p-reprezentacii:

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \ = \ \frac{-i \, \eta_{\mu\nu}}{k^2 \, + \, i\varepsilon} \, . \tag{2.16}$$

V x-reprezentacii Feynmanovemu propagatoru odpoveda funkcia

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{-i \, \eta_{\mu\nu}}{k^2 \, + \, i\varepsilon} \, e^{-ik(x-y)} \, . \tag{2.17}$$

Vo Feynmanovej kalibracii vertexu sa odpoveda diagram s jednym vrcholom, z ktoreho vychadzaju dve orientovane fermionove linky (jedna smerom *do* a druha smeron *von* z vertexu) a fotonova linka opatrena indexom μ. Vertexovemu diagramu je priradeny vyraz

$$-i \, e \, \gamma^\mu \, .$$

• V p-reprezentacii linkam vertexu su pripisane 4-hybnosti castic, ktore splnaju zakon zachovania 4-hybnosti castic;

• V x-reprezentacii vertexovemu vrcholu je priradena poloha x, cez ktoru je potrebne integrovat.

Feynmanova kalibracia znamenala obrovsky pokrok, nielenze je relativisticky invariantna, ale pravidla pre vypocet diagramov su ovela kompaktnejsie ako v Coulombovej kalibracii.

Poznamka: Bezne su aj ine relativisticke kalibracie fotonoveho propagatora. Casto sa pouziva aj kalibracia, v ktorej fotonovy propagator

$$\tilde{D}_{\xi}^{\mu\nu}(k) \;=\; \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon}\left(\eta_{\mu\nu} - \xi\,\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right) \tag{2.18}$$

zavisi od ciselneho parametra ξ. Pripad $\xi = 0$ odpoveda Feymannovej kalibracii, hodnota $\xi = 1$ zase Landauovej kalibracii.

Pravidla pre vypocet Feynmanovych diagramov pre samo-interagujuce skalarne pole a QED vo Feynmanovej kalibracii su zhrnute v Tabulke.