Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského

Peter Prešnajder

ELEMENTÁRNY KALKULUS

****

Autor textu: Peter Prešnajder

Autor obrázkov: Marián Klein

Názov: ELEMENTÁRNY KALKULUS

Recenzent: Denis Kochan

Učebný text k prednáške: Matematika (1)

Študijný odbor: 9.2.9 Aplikovaná informatika

Rok vydania: 2008

Miesto vydania: Bratislava

Vydanie: prvé

Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK

Tlač: PACI Computer Studio, Svätoplukova 8, 972 01 Bojnice

Náklad: 150

ISBN 978-80-89186-38-9

Úvod

Prehľad. Tieto poznámky obsahujú podklady k prednáške Matematika 1 na špecializácii Aplikovaná informatika: jedná sa o 12 dvojhodinových prednášok doplnených dvojhodinovými cvičeniami (ich členenie nie je definitívne). Poznámky obsahujú nasledujúce témy:

1. Reálne čísla

2. Elementárne funkcie

3. Limita číselnej postupnosti, číselné rady

4. Limita funkcie, spojitosť a derivácia

5. Využitie derivácií: L'Hospitalovo pravidlo, priebeh funkcie, Taylorov rozvoj funkcie

6. Integrovanie a jeho aplikácie: Neurčitý integrál, určitý integrál, obyčajné diferenciálne rovnice

Motivácia. Aj keď v informatike sa pracuje najmä metódami diskrétnej matematiky a algebry, je veľmi užitočné ovládať aj základy analýzy a geometrie. Tieto aspekty sa prejavujú najmä v aplikáciách numerických a informatických metód. Často treba skúmať, simulovať alebo modelovať rôzne procesy, zobrazovať ich alebo prenášať do virtuálneho sveta počítačov. Na doplnenie treba uviesť, že aj v rámci diskrétnej matematiky, pri formuláciách problémov alebo ich analýze je užitočné mať základné vedomosti zo "spojitej matematiky".

Zvyčajne, alebo aspoň veľmi často, skúmaný problém má svoj matematický alebo fyzikálny popis v rámci "klasickej" analýzy a geometrie. Cieľom prednášok Matematika 1 je dať nevyhnutné základy analýzy a naučiť sa ich aj prakticky využívať (podobne predmet Matematika 2 bude poskytovať základné poznatky z lineárnej algebry). Pojmový aparát bude preto budovaný len v nevyhnutnej miere. Dôraz bude kladený na praktické ovládanie metód, t.j. priebežné precvičovanie naučených poznatkov, riešenie najprv jednoduchých a potom (trochu) zložitejších problémov. Nakoniec dobrá rada: samotný učebný text ani prednášky nestačia - treba sa popasovať s príkladmi na cvičeniach, doplnkových cvičeniach, individuálne.

Poznámka: Ospravedlňujem sa za preklepy, ktoré budú postupne odstraňované. Ďakujem za každé upozornenie. Poznamenávam, že v texte sa používajú štandartné označenia goniometrických a cyklometrických funkcií, kým v obrázkoch sú to LATEXove označenia:

Funkcia	Text	Obrázky
tangens	$\mathrm{tg}\, x$	$\tan x$
cotangens	$\mathrm{cotg}\, x$	$\cot x$
arctangens	$\mathrm{arctg}\, x$	$\arctan x$
arccotangens	$\mathrm{arccotg}\, x$	$-$

Literatúra.

Učebnice.

1. I. Kluvánek, L. Mišík, J. Švec: Matematika pre štúdium technických vied, Alfa, Bratislava, 1961.

2. Ch. B. Morrey, jr: University Calculus with Analytic Geometry, Addison-Wesley Publ. Comp., 1964.

3. J. B. Zeľdovič: Vyššia matematika pre začiatočníkov, Alfa, Bratislava, 1973.

Zbierky úloh.

1. Z. Kubáček, J. Valášek: Cvičenia z matematickej analýzy I a II, skriptum UK Bratislava, 1994.

2. J. Eliáš, J. Horváth, J. Kazan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť, Alfa, Bratislava, 1966.

3. B. P. Demidovič: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu, Nauka, Moskva, 1977.

Prehľady.

1. I. N. Bronštejn, K. A. Semenďajev: Príručka matematiky, SNTL, Bratislava, 1961.

2. Malá encyklopédia matematiky, Obzor, Bratislava, 1978.

Kapitola 1

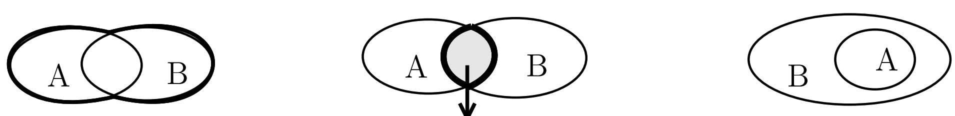
Reálne čísla

Budeme predpokladať, že intuitívny pojem množiny a základných operácií s nimi sú známe. Zopakujme si ich:

(i) *Množina* $\mathbf{A}$ je súbor určitých objektov, pričom o každom objekte vieme rozhodnúť či do nej patrí alebo nie. Obyčajne budeme postupovať tak, že objekty patriace do množiny jednoducho vymenujeme

$$\mathbf{A} \;=\; \{a, b, \dots, z\}\ ,$$

alebo do zátvoriek $\{\dots\}$ napíšeme presnú charakteristiku objektov patriacich do množiny. Ak objekt a patrí do $\mathbf{A}$, tak píšeme $a \in \mathbf{A}$.



Zjednotenie $A \cup B$ Prienik $A \cap B$ A je podmnožinou B $A \subset B$

Obr. 1 a,b,c

(ii) *Zjednotenie* $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ dvoch množín $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je súbor objektov patriacich aspoň do jednej z množín $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \ = \ \{$všetky x také, že $x \in \mathbf{A}$ alebo $x \in \mathbf{B}\}$;

Prienik $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ dvoch množín $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je súbor objektov patriacich do oboch množín $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ súčasne:

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \ = \ \{$všetky x také, že $x \in \mathbf{A}$ a súčasne $x \in \mathbf{B}\}$.

Podmnožina. Množina $\mathbf{A}$ je podmnožinou množiny $\mathbf{B}$, ak každý prvok množiny $\mathbf{A}$ patrí aj do množiny $\mathbf{B}$. Samozrejme, množina $\mathbf{B}$ môže mať aj rôzne ďalšie prvky, (pozri Obr. 1).

Množina celých čísiel. Začnime náš výklad množinou celých čísiel $\mathbf{Z} \ = \ \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, na ktorej je definované sčítanie $(n, m) \mapsto n + m$ a násobenie $(n, m) \mapsto n \,.\, m$ s obvyklými vlastnosťami

(i) komutatívnosť súčtu a súčinu:

$$n + m \ = \ m + n \, , \ n \,.\, m \ = \ m \,.\, n \ ,$$

$$\text{pritom } n + 0 \ = \ n \, , 1 \,.\, n = n \ ;$$

(ii) asociatívnosť súčtu a súčinu:

$n + (m + k) \ = \ (n + k) + m \, , \ n \,.\, (m \,.\, k) \ = \ (n \,.\, m) \,.\, k \ ,$

(iii) distributívnosť súčtu a súčinu: $n \,.\, (m + k) \ = \ n \,.\, m + n \,.\, k \ .$

(iv) záporný prvok: rovnica $n + x \ = \ 0$ má práve jedno riešenie $x \ = \ -n$. Množina s vlastnosťami (i)-(iv) sa nazýva *okruh.* Teda množina celých čísiel $\mathbf{Z}$ je okruh.

Poznamejme, že často sa zvykne písať súčin skrátene bez bodky uprostred: $n \, m \ \equiv \ n \,.\, m$. Túto konvenciu budeme tiež využívať.

Čísla $\mathbf{Z}_+ = \{+1, +2, \dots\}$ sa nazývajú kladné celé čísla, pričom miesto $+1, +2, \dots$ jednoducho píšeme $1, 2, \dots$; čísla $\mathbf{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$ sú záporné celé čísla. Miesto $n + (-m)$ sa zvykne písať $n - m$. Poznamenajme, že platí $-n = (-1)\,.\,n$, podobne $n = -(-n)$.

Ak platí $(n-m) \in \mathbf{Z}_+$ hovoríme, že číslo n je väčšie ako číslo m, zapisuje sa to ako $n > m$ (prípadne $m < n$ - m je menšie ako n):

- pre ľubovoľné dve *rôzne* celé čísla platí buď $n > m$ alebo $m > n$,
- ak $n > m$ a $m > k$ potom $n > k$.

To znamená, že množina celých čísiel je *lineárne usporiadaná*. Číslo $n+1$ je *nasledovník* čísla n (najbližšie celé číslo väčšie ako n).

Matematická indukcia. Čísla $\mathbf{N} = \{0, +1, +2, \dots\}$ sa nazývajú prirodzené čísla. Množina prirodzených čísiel $\mathbf{N}$ je najmenšia množina, ktorá má nasledujúce dve vlastnosti:

$$(i)\ 0 \in \mathbf{N}\ ,$$

$$(ii)\ \text{Ak } n \in \mathbf{N} \text{ potom aj } n+1 \in \mathbf{N}\ .$$

Táto vlastnosť je základom overovania formúl (dôkazu vzorcov) závislých na prirodzenom čísle n pomocou metódy *matematickej indukcie*:

(i) Overíme formulu S_n pre $n = 0$,

(ii) Za predpokladu, že platí S_n dokáže sa platnosť S_{n+1}.

Príklad: Overiť pomocou matematickej indukcie súčtovú formulu pre konečný aritmetický rad

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} n \equiv 0 + 1 + 2 + \dots n = \frac{1}{2}n(n+1)\ .$$

Riešenie: (i) Pre $n = 0$ máme $S_0 = 0$, čo je zrejme správne; (ii) Pre súčet S_{n+1} postupne dostaneme:

$$S_{n+1} \;=\; S_n \;+\; (n+1) \;=\; \frac{1}{2}n(n+1) \;+\; (n+1) \;=\; \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\;.$$

Posledný výraz je presne súčtový vzorec pre $n+1$: za predpokladu jeho platnosti pre n, overili sme ho pre $n+1$.

Základom úspešného výsledku bola už správna formula pre S_n, my sme len overovali, že naozaj je správna. Keby sme nemali správnu formulu k dispozícii, museli by sme ju "uhádnuť" alebo odvodiť. V danom prípade to ale nie je ťažké:

$$S_n \;=\; 0+1+2+\ldots n$$
$$=\; \frac{1}{2}[(0+1+2+\cdots+n) \;+\; (n\;+\;n-1\;+\cdots+1+0)]$$
$$\frac{1}{2}[(0+n)+(1+n-1)+\cdots+(n+0)] \;=\; \frac{1}{2}n(n+1)\;.$$

Množina racionálnych čísiel. Množinu racionálnych čísiel $\mathbf{Q}$ tvoria triedy ekvivalencie dvojíc celých čísiel (n, m), $m \neq 0$, ktoré budeme zapisovať ako *zlomky* $\frac{n}{m}$ (prípadne v texte ako n/m): zlomky n/m a n'/m' sa rovnajú (sú ekvivalentné) práve ak platí

$$n\,m' \;=\; m\,n' \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n}{m} \;=\; \frac{n'}{m'}\;. \tag{1}$$

Toto napríklad nastane ak $n' = n.k$ a $m' = m.k$, t.j.

$$\frac{n}{m} \;=\; \frac{n.k}{m.k}\;.$$

Teda zlomky môžeme krátiť: vždy možno vykrátiť *čitateľa* n aj *menovateľa* m tak, že n a m sú nesúdeliteľné. Naopak, niekedy môže byť vhodné zlomky rozširovať.

Ak zlomok $n/1$ (presnejšie s ním ekvivalentnú triedu) identifikujeme s číslom $n \in \mathbf{Z}$, tak množina celých čísiel $\mathbf{Z}$ bude podmnožinou množiny racionálnych čísiel $\mathbf{Q}$. Poznamenajme, že platí

$$\frac{n}{m} \; = \; n \, . \, \frac{1}{m} \; = \; \frac{1}{m} \, . \, n \; ,$$

$$\frac{-n}{m} \; = \; \frac{n}{-m} \; = \; (-1) \, . \, \frac{n}{m} \; = \; -\frac{n}{m} \; .$$

V množine racionálnych čísiel $\mathbf{Q}$ definujeme sčítanie a násobenie zlomkov nasledovne:

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} \; = \; \frac{n.q \, + \, m.p}{m \, . \, q} \; , \; \frac{n}{m} . \frac{p}{q} \; = \; \frac{n \, . \, p}{m \, . \, q} \; . \tag{2}$$

Pre operácie sčítania a násobenia zlomkov platí:

(i) komutatívnosť súčtu a súčinu: $r \, + \, s \; = \; s \, + \, r \; , \; r \, . \, s \; = \; s \, . \, r \; ,$

(ii) asociatívnosť súčtu a súčinu:

$r \, + \, (s + t) \; = \; (r + s) \, + \, t \; , \; r \, . \, (s.t) \; = \; (r.s) \, . \, t \; ,$

(iii) distributívnosť súčtu a súčinu: $r \, . \, (s + t) \; = \; r.s \, + \, r.t \; ,$

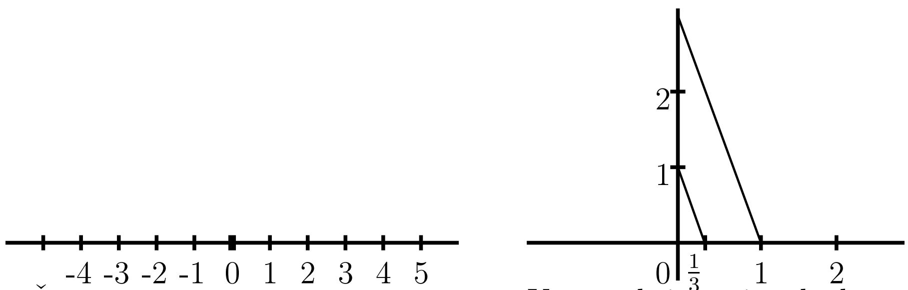
(iv) záporný prvok: ku každému racionálnemu číslu $r \; = \; n/m$ existuje práve jedno racionálne číslo $x \; = \; -r \; = \; -n/m$, ktoré rieši rovnicu $r + x \; = \; 0$,

(v) inverzný prvok: ku každému *nenulovému* racionálnemu číslu $r \; = \; n/m \; \neq \; 0$ existuje práve jedno racionálne číslo $y \; = \; r^{-1} \; = \; m/n$, ktoré rieši rovnicu $r.y \; = \; 1$.

Teda množina racionálnych čísiel je okruh s vlastnosťami (i)-(iv) a má ešte jednu dôležitú vlastnosť (v) naviac. Takáto množina sa nazýva *teleso.*

Znázornenie celých a racionálnych čísiel.

Celé čísla budeme znázorňovať ako body na číselnej osi: nakreslíme si priamku a na nej zvolíme počiatok - bod $n = 0$, smerom doprava (doľava) v jednotkovej vzdialenosti od počiatku vyznačíme bod $+1$ (-1), dvojkovej vzdialenosti smerom doprava (doľava) vyznačíme bod $+2$ (-2), atď. (pozri Obr. 2a).



Číselná os s celými číslami

Konštrukcia racionálneho čísla $r = \frac{1}{3}$

Obr. 2 a,b

Zlomku n/m, $m \neq 0$, jednoduchou geometrickou konštrukciou priradíme bod na číselnej osi:

• Nakreslíme dve na seba kolmé číselné osi - na "vodorovnú" číselnú os nanesieme hodnotu n (čitateľa) a kolmú číselnú os nanesieme hodnotu $m \neq 0$ (menovateľa).

• Nanesenými bodmi vedieme priamku p a bodom $+1$ na kolmej osi s ňou rovnobežnú priamku p'; priamka p' pretne vodorovnú os práve v bode n/m.

Ak je zlomok kladný priesečník odpovedajúci racionálnemu číslu n/m je napravo od bodu 0 na vodorovnej osi, ak je záporný je od bodu 0 naľavo. Toto priradenie bodu na číselnej osi racionálnemu číslu má tú príjemnú vlastnosť, že ekvivalentným zlomkom je priradený ten istý bod.

Iné možné vyjadrenie *celého čísla* n je jeho zápis v dekadickom zápise pomocou číslic $0, 1, \ldots, 9$: kladné k-ciferné číslo $AB...Z$, $A \neq 0$, je zadané ako

$$n \ = \ A \,.\, 10^k \ + \ B \,.\, 10^{k-1} \ + \ \ldots \ Z \ .$$

Teraz *racionálnemu číslu* $r \ = \ n/m$ priradíme dekadický zápis príslušného podielu dvoch celých čísiel (vypočítaný pomocou bežného algoritmu). Ilustrujme si tento postup na niekoľkých jednoduchých zlomkoch tvaru $1/m$:

(a) $\frac{1}{2} \ = \ 1:2 \ = \ 0,500... \ = \ 0,5\overline{0}$. Po prvom delení máme nulový zvyšok a ďalšie delenie by dávalo len samé 0;

(b) $\frac{1}{3} \ = \ 1:3 \ = \ 0,333... \ = \ 0,\overline{3}$. Ako je zvykom, opakujúce sa číslo alebo skupina čísiel v podieloch (a) aj (b) je v poslednom zápise vyznačená čiarou nad opakujúcim sa súborom čísiel ($\overline{0}$ sa nezvykne explicitne vyznačovať);

(c) $\frac{1}{7} \ = \ 1:7 \ = \ 0,142857142857... \ = \ 0,\overline{142857}$. V tomto prípade máme postupne zvyšky po delení: 1, 4, 2, 8, 5, 7, potom sa objaví opäť 1 a zvyšky sa začnú opakovať. Je si treba uvedomiť, že je to nevyhnutné: všetky zvyšky po delení musia byť menšie ako $m \ = \ 6$ a nanajvýš po siedmych krokoch musia sa objaviť dva rovnaké zvyšky a nastane opakovanie.

Rovnaký argument platí pre ľubovoľný zlomok: *každému číslu* $r = n/m \in$ $\mathbf{Q}$ *je priradený dekadický rozvoj* **s periódou** *na konci* $r = A...B, C...D\overline{E...F}$:

• časť dekadického rozvoja pred desatinnou čiarkou sa nazýva celou časťou čísla r a značí sa $[r] = A...B$,

• za desatinnou čiarkou môže byť najprv neperiodická časť $C...D$, po ktorej nasleduje perióda $\overline{E...F}$ nanajvýš dĺžky m,

• perióda $\overline{0}$ sa explicitne nevyznačuje; číslo $A...B, C...D\overline{9}$ s $D < 9$ sa identifikuje s číslom $A...B, C...D'$ s poslednou číslicou $D' = D+1$. Napríklad, $0,\overline{9} = 1$ alebo $2,1\overline{9} = 2,2$.

Príklad: Konečný geometrický rad je definovaný ako súčet

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n \equiv 1 + q + ... + q^n .$$

Dokážte súčtovú formulu

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} , \text{ pre } q \neq 0 .$$

Riešenie: Vyjdeme jednak zo vzťahu

$$S_{n+1} = 1 + q + \ldots q^{n+1} = S_n + q^{n+1} ,$$

a tiež zo vzťahu

$$S_{n+1} = 1 + q + \ldots q^{n+1} = 1 + q(1 + \cdots + q^n) = 1 + q.S_n .$$

Porovnaním, pravých strán obdržíme hľadaný súčtový vzorec.

Poznámka 1: V prípade $q < 1$ je užitočné prepísať súčtový vzorec geometrického radu takto:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}, \quad .$$

Pre veľké n druhý člen bude malý (napríklad, ak $q = 10^{-k}$, prvý člen dá číslo, ktoré ktoré sa bude líšiť od S_n nanajvýš na k-tom desatinnom mieste). Toto motivuje nasledujúcu definíciu: Pri $q < 1$ súčet *nekonečného geometrického radu* je rovný

$$S(q) \equiv 1 + q + q^2 + \ \ldots = \frac{1}{1 - q} , \ q < 1 . \tag{3}$$

K súčtovému vzorcu (3) pre nekonečný geometrický rad sa vrátime neskôr.

Poznámka 2: Aplikujme teraz súčtový vzorec pre nekonečný geometrický rad na číslo zadané v dekadickom zápise

$$r \;=\; A...B, C...D\overline{E...F}r \;=\; A...B, C...D \;+\; 0, 0\ldots 0\overline{E...F}\;.$$

Číslo $A...B, C...D$ je evidentne racionálne, ukážme že taká je aj jeho periodická časť $0, 0\ldots 0\overline{E...F}$ (počet núl za desatinnou čiarkou sa rovna počtu cifier $C...D$). Ako $a \;=\; 0, 0\ldots 0E...F$ označíme prvú časť periódy, jej druhá časť bude $a.q$, tretia $a.q^2$, atď; tu $q \;=\; 10^{-k}$, kde k je rovné počtu cifier v perióde $E...F$. Podľa súčtového vzorca periodická časť je rovná racionálnemu číslu:

$$0, 0\ldots 0\overline{E...F} \;=\; a.(1 \;+\; q \;+\; q^2 \;+\; \ldots) \;=\; \frac{a}{1 \;-\; q}\;.$$

Lineárne usporiadanie racionálnych čísiel. V ďaľšom bez ujmy na obecnosti racionálne číslo berieme s kladným menovateľom v tvare $r \;=\; n/m$, $m \;>\; 0$:

• Racionálne číslo r je kladné $r \;>\; 0$ ak $n \;>\; 0$; r je záporné $r < 0$ ak $n < 0$; (kladné resp. záporné racionálne čísla sa zobrazujú sa kladnú pravú časť resp. zápornú ľavú časť číselnej osi);

• Hovoríme, že $r \in \mathbf{Q}$ je väčšie $s \in \mathbf{Q}$ práve ak $r - s \;>\; 0$, zapisujeme to ako $r \;>\; s$. Číslo r je menšie ako s ak $s - r \;>\; 0$, zapisujeme to ako $r \;<\; s$ alebo $s \;>\; r$;

• Pre ľubovoľné dve *rôzne* racionálne čísla r a s platí buď $r \;>\; s$ alebo $s \;>\; r$; usporiadanie je *tranzitívne*: ak $r \;>\; s$ a $s \;>\; t$ potom $r \;>\; t$;

• Množina racionálne čísiel je *hustá*: medzi dvoma racionálnymi číslami $r \;>\; s$ vždy existuje racionálne číslo t také, že $r \;>\; t \;>\; s$.

• Ak $r > s$ a $t > 0$ potom $r.t > s.t$; ak $r > s$ a $t < 0$ potom $r.t < s.t$; špeciálne pre $r > s$ dostaneme $-r < -s$.

Teda množina racionálnych čísiel $\mathbf{Q}$ je lineárne usporiadané teleso: na číselnej osi menšie racionálne číslo je naľavo od väčšieho, kladné resp. záporné racionálne čísla sa zobrazujú sa kladnú pravú časť resp. zápornú ľavú časť číselnej osi.

Poznámka: Vzťah $r > s$ sa nazýva *ostrá nerovnosť*. *Neostrá nerovnosť*

$r \geq s$ znamená $r > s$ alebo $r = s$;

analogicky

$r \leq s$ znamená $r < s$ alebo $r = s$.

Množina reálnych čísiel. Množinu racionálnych čísiel je potrebné rozšíriť, aby bolo možné riešiť (niektoré) algebraické rovnice. Ako príklad uvažujme rovnicu

$$x^2 = 2 .$$

Predpokladajme, že jej riešením je racionálne číslo $x = n/m \in \mathbf{Q}$ s nesúdeliteľnými $n, m \in \mathbf{Q}$ (t.j. vykrátili sme všetky spoločné faktory v n a m). Po dosadení do rovnice dostaneme

$$\frac{n^2}{m^2} = 2 \text{ alebo } n^2 = 2m^2 .$$

Pravá strana je párne číslo a preto musí byť $n = 2k$. Po dosadení do posledného vzťahu dostaneme $2k^2 = m^2$, takže aj m musí byť párne: obe čísla n a m sú párne a prišli sme k sporu s ich predpokladanou nesúdeliteľnosťou. Vidíme, že rovnica $x^2 = 2$ nemá racionálne riešenia. Pretože riešenie x

rovnice $x^2 = 2$ nie je racionálne, jeho dekadický rozvoj *nemôže* byť s periódou na konci.

Množinu *reálnych čísiel* $\mathbf{R}$ definujeme ako čísla, ktoré majú všeobecný dekadický rozvoj $x = A...B, CD...$:

- čísla s periódou na konci sú racionálne,
- ostatné čísla sú iracionálne.

Poznámka: Čísiel v $\mathbf{R}$ je oveľa viac ako racionálnych čísiel $\mathbf{Q}$. Dajú sa ale ľubovoľne presne aproximovať číslami z $\mathbf{Q}$. Napríklad, stačí zobrať z dekadického rozvoja $x = A...B, C_1...C_n... \in \mathbf{R}$ jeho celú časť a prvých n číslic za desatinnou čiarkou, t.j. $x_n = A...B, C_1...C_n \in \mathbf{Q}$. Zrejme $0 < x - x_n < 10^{-n}$. Podrobnejšie sa budeme takýmito otázkami zaoberať neskôr.

Množina reálnych čísiel $\mathbf{R}$ je *usporiadané pole*:

- V $\mathbf{R}$ sú definované komutatívne asociatívne a vzájomne distributívne operácie sčítania a násobenia (vlastnosti (i)-(iii));
- Rovnice $x + a = 0$ a $by = 1$ (pri $b \neq 0$), majú práve jedno riešenie $x = -a$ resp. $y = b^{-1}$ (vlastnosti (iv)-(v));
- V $\mathbf{R}$ máme lineárne usporiadanie $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$ s obdobnými vlastnosťami ako v množine racionálnych čísiel.

Intervaly na reálnej osi. Ohraničené intervaly na reálnej osi sú podmnožiny $\mathbf{R}$ zadané dvomi reálnymi číslami $a \leq b$ ako:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x \leq b\} \ \text{– uzavretý interval}\ ,$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x < b\} \ \text{– zhora otvorený polouzavretý interval}\ ,$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R};\ a < x \leq b\} \ \text{– zdola otvorený polouzavretý interval}\ ,$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a < x < b\} \ \text{– otvorený interval}\ .$$

Okrem toho sa definujú zhora neohraničené intervaly:

$$[a, \infty) \; = \; \{x \in \mathbf{R};\; x \; \leq \; a\} \; - \text{zhora neohraničený uzavretý interval} \;,$$

$$(a, \infty) \; = \; \{x \in \mathbf{R};\; x \; \leq \; a\} \; - \text{zhora neohraničený otvorený interval} \;.$$

Zdola neohraničené intervaly $(-\infty, a] \; = \; \{x \in \mathbf{R};\; x \geq a\}$ a $(-\infty, a) \; = \; \{x \in \mathbf{R};\; x > a\}$ sú definované obdobne; nakoniec sa zvykne definovať neohraničený interval (zdola aj zhora) $(-\infty, \infty) \; = \; \mathbf{R}$.

Kapitola 2

Funkcie

Hovoríme, že f je *reálna funkcia* na podmnožine $D_f \subset \mathbf{R}$ reálnej osi, ak každému $x \in D_f$ je priradené reálne číslo $f(x) \in \mathbf{R}$. Píšeme,

$$f: \ D_f \ \to \mathbf{R} \ , \text{ alebo } x \in D_f \ \mapsto \ f(x) \in \mathbf{R} \ .$$

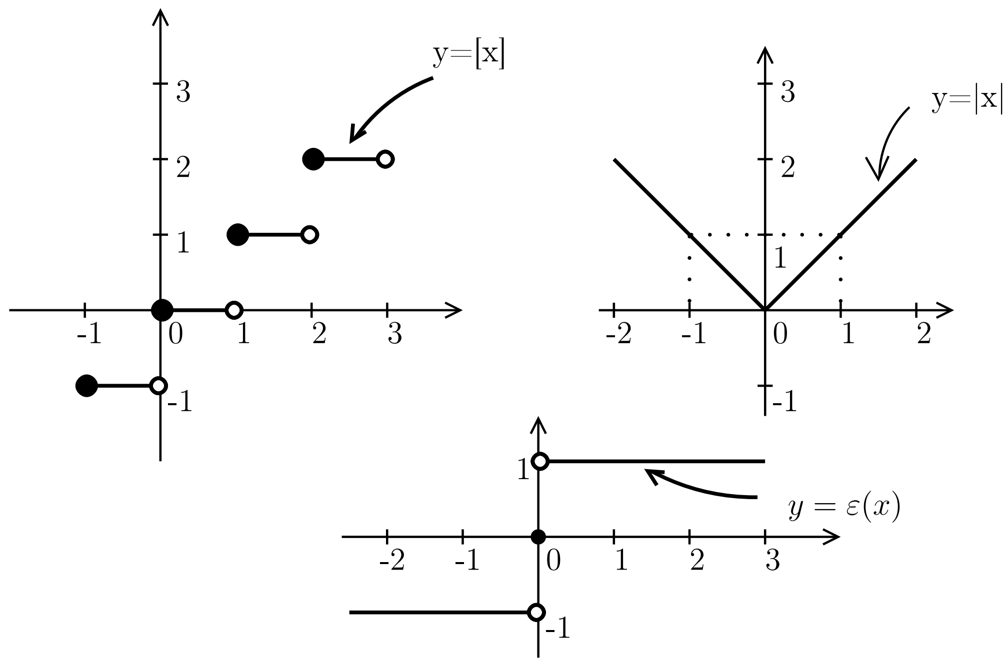
Množina D_f sa nazýva definičný obor funkcie f a množina $R_f = \{y = f(x);\, x \in D_f\}$ sa nazýva obor hodnôt funkcie f.

Graf funkcie. V rovine (na papieri alebo tabuli) nakreslíme reálnu x-ovú os a jej počiatkom vedieme na ňu kolmú y-ovú os. Každý bod roviny bude takto charakterizovaný dvojicou reálnych čísiel $[x; y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^2$.

Na x-ovej osi vyznačíme definičný obor a každému $x \in D_f$ priradíme reálne číslo $y = f(x)$ na y-ovej osi. Množina dvojíc bodov $G_f = \{[x; f(x)] \in \mathbf{R}^2\}$ sa nazýva *graf funkcie*.

Prehľad funkcií.

Niektoré neelementárne funkcie.



Obr. 3 a,b,c

1. Celá časť čísla $[x]$ je definovaná ako najväčšie celé číslo $n \leq x$, t.j. pre $x \in [n, n+1)$ je $[x] = n$. Napríklad, pre číslo $x = A...B, D... \in \mathbf{R}$ máme $[x] = A...B$.

2. Abslútna hodnota $|x|$ *čísla* x je definovaná takto:

$$|x| = x \text{ pre } x \geq 0 \ , \ |x| = -x \text{ pre } x \leq 0 \ , \tag{4}$$

Ekvivalentne, $|x| = \max\{x, -x\}$ (najväčšie z čísiel x a $-x$).

3. Znamienková funkcia (signum x) značieva sa ako $\varepsilon(x)$ (alebo $\mathrm{sgn}(x)$). Je definovaná takto:

$$\varepsilon(x) = 1 \text{ pre } x > 0, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad \varepsilon(x) = -1 \text{ pre } x < 0. \tag{5}$$

Jednoducho s ňou súvisí Heavisideova funkcia $\theta(x) = \frac{1}{2}[1 + \varepsilon(x)]$. Grafy funkcií $[x]$, $|x|$ a $\varepsilon(x)$ sú na Obr. 3.

**4. Pre prirodzené n symbol $n!$ (n-faktoriál) je definovaný takto: $0! = 1$, $n! = 1.2.3\ldots(n-1).n$. Gamma funkcia* $\Gamma(x)$ je definovaná pomocou integrálu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{x-1} \ , \text{ pre } x > 0, \tag{6}$$

Možno ukázať, že pre prirodzené čísla platí $\Gamma(n+1) = n!$. Teda $\Gamma(x)$ rozširuje faktoriál na všetky reálne kladné čísla. Čo sa za týmto skrýva dozvieme sa koncom semestra.

Elementárne funkcie.

Celočíselné mocniny a polynómy.

Funkcia x^n, n je prirodzené číslo. Definičný obor funkcie je celá reálna os $D = \mathbf{R}$: pre všetky $x \in \mathbf{R}$ kladieme $x^0 \equiv 1$ (x^0 je funkcia identicky rovná 1), kým pre prirodzené kladné číslo n kladieme

$$x^n = x...x \ , \ n\text{-násobný súčin } x\text{-ov} \ . \tag{7}$$

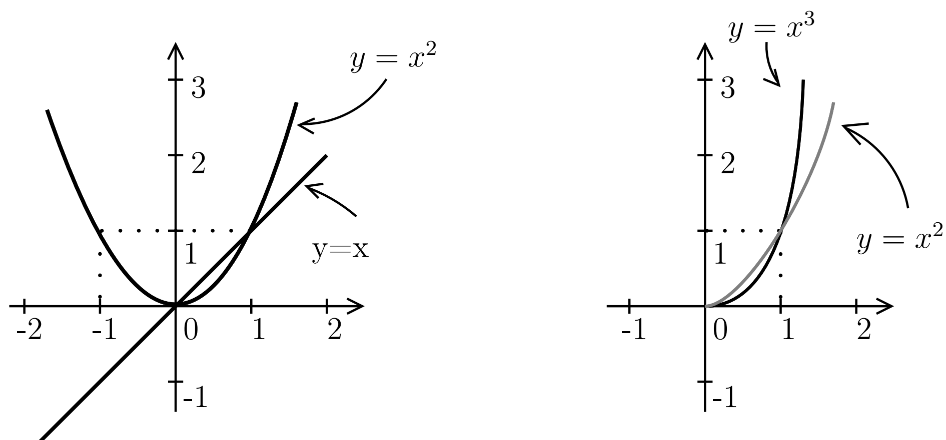
Funkcia x^n má nasledovné vlastnosti:

- Ak $x \neq 0$ potom $x^n \neq 0$,
- $x^n \,.\, x^m = (x...x).(x...x) = x^{n+m}$ (v prvej zátvorke je n-násobný a v druhej m-násobný súčin),
- $(x^n)^m = x^n...x^n = x^{nm}$ (v druhom kroku máme m-násobný súčin x^n),
- $(xy)^n = x^n\, y^n$,
- *Binomický rozvoj.* Platí formula

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^k\, y^{n-k} \,, \tag{8}$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{9}$$



Obr. 4 a,b

Grafy funkcií $y = f(x) = x$ a $y = g(x) = x^2$ sú znázornené na Obr.4a: graf funkcie $y = x$ je priamka prechádzajúca počiatkom, kým $y = x^2$ je parabola v hornej polrovine prechádzajúca počiatkom symetrická okolo y-

ovej osi. Graf funkcie $y = x^n$ pre $x > 0$ je podobný grafu funkcie $y = x^2$ (pozri Obr.4b, kde sú nakreslené grafy funkcií x^2 a x^3).

Polynóm n-tého stupňa $p(x)$. Je to funkcia na $D = \mathbf{R}$ zadaná formulou

$$p(x) \; = \; a_n\, x^n \; + \; a_{n-1}\, x^{n-1} + \; ... \; + \; a_1 x \; + \; a_0 \; , \tag{10}$$

kde $a_0, a_1, ..., a_n$ sú pevne dané reálne čísla, pričom $a_n \neq 0$.

Funkcia x^{-n}. Jej definičný obor tvoria všetky nenulové body na reálnej osi $D = \{x \in \mathbf{R};\, x \neq 0\} = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$. Je definovaná ako riešenie rovnice

$$y\,.\,x^n \; = \; 1 \; , \; x \neq 0 \; . \tag{11}$$

Pri $x \neq, 0$ vzťahy

$$x^n \neq, 0 \; , \; x^n . x^m \; = \; x^{n+m} \; , \; (x^n)^m \; = \; x^{nm} \; , \tag{12}$$

platia pre ľubovoľné celočíselné mocniny. Špeciálne, $x^{-n} = x^{-1} ... x^{-1}$ je n-násobný súčin x^{-1}.

Racionálna funkcia je definovaná ako podiel dvoch (reálnych) polynómov

$$f(x) \; = \; \frac{p(x)}{q(x)} \tag{13}$$

m-tého a n-tého stupňa:

$$p(x) \; = \; a_m x^m + \; \ldots \; + \; a_1 x \; + \; a_0, \tag{14}$$

$$q(x) \; = \; x^n + \; \ldots \; + \; b_1 x \; + \; b_0 \tag{15}$$

(bez ujmy obecnosti sme položili $b_n = 1$). Aby sme určili definičný obor využijeme (bez dôkazu) tvrdenie z teórie algebraických rovníc, podľa ktorého polynóm $q(x)$ má nasledujúci rozklad:

$$q(x) \;=\; (x-x_1)\,...\,(x-x_l)\,.\,[(x-c_1)^2+d_1^2]\,...\,[(x-c_k)^2+d_k^2]\;,\; d_1 \neq 0,..,d_n \neq 0\;, \tag{16}$$

pričom $n \;=\; l+2k$ (môže byť $l \;=\; 0$ alebo $k \;=\; 0$). Čísla $x_1,\, ...\,, x_l \;\in\; \mathbf{R}$ sú práve reálne korene polynómu $q(x)$. Definičný obor racionálnej funkcie $p(x)/q(x)$ tvoria všetky reálne čísla nerovnajúce sa koreňom polynómu $q(x)$: $D \;=\; \{x \in \mathbf{R};\, x \;\neq\; x_1, ..., x \neq\; x_l\}$.

Pokiaľ, polynóm $p(x)$ má nižší stupeň ako $q(x)$ a $q(x)$ má vyššie uvedený rozklad na koreňové faktory, tak racionálna funkcia $p(x)/q(x)$ môže byť rozložená na parciálne zlomky takto:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \;=\; \frac{a_1}{x-x_1} \;+\; ... \;+\; \frac{a_l}{x-x_l}$$

$$+\; ... \;+\; \frac{\alpha_1.x+\beta_1}{(x-c_1)^2+d_1^2} \;+\; ... \;+\; \frac{\alpha_k.x+\beta_k}{(x-c_k)^2+d_k^2}\;. \tag{17}$$

Túto formulu možno dokázať matematickou indukciou.

Zložená a inverzná funkcia.

Zložená funkcia. Uvažujme dve reálne funkcie

$$f : D_f \;\to\; \mathbf{R},\quad g : D_g \;\to\; \mathbf{R}, \tag{18}$$

pričom budeme predpokladať, že obor hodnôt funkcie f je podmnožinou definičného oboru funkcie g:

$$R_f = \{y \;=\; f(x);\, x \in D_f\} \;\subset\; D_g\;. \tag{19}$$

Ak $R_f \subset D_g$, má zmysel na D_f uvažovať zložené zobrazenie

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) ,$$

ktoré definuje *zloženú funkciu* $g \circ f : D_f$ *to* $\mathbf{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ x \in D_f . \tag{20}$$

Poznámka: Pokiaľ, R_f nie je podmnožinou D_g, niekedy pomôže zúžiť definičný obor D_f funkcie f na podmnožinu $D'_f \subset D_f$, tak aby $R'_f = \{y = f(x); x \in D'_f\}$ už bolo podmnožinou D_g.

Príklad 1.: Nech $f(x) = x^3 - 1$ a $g(x) = x^2 + 2$, potom zložená funkcia bude

$$(g \circ f)(x) = (x^3 - 1)^2 + 2 = x^6 - 2x^3 + 3 .$$

Pretože $D_g = \mathbf{R}$, definičný obor zloženej funkcie môže byť celá reálna os: $D_{g \circ f} = \mathbf{R}$.

Príklad 2.: Nech $f(x) = 1 - x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Pretože $D_g = [0, +\infty)$, tak zložená funkcia

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2} ,$$

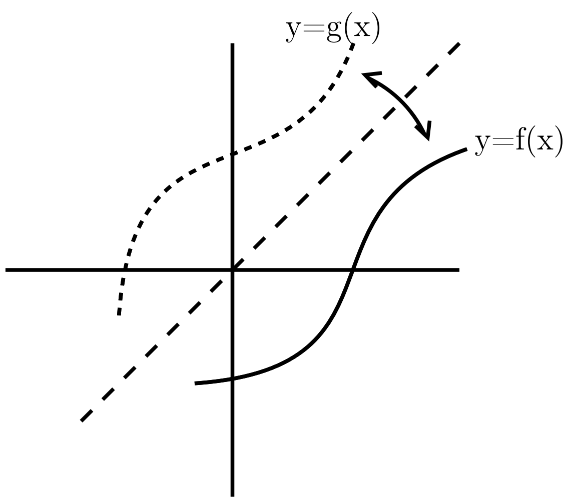
bude mať definičný obor $D_{g \circ f} = [-1, +1]$.

Inverzná funkcia. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je *prostá* na podmnožine $D' \subset D_f$, ak pre jej dva ľubovoľné rôzne body x_1 a x_2 z D' sú rôzne ich obrazy $f(x_1)$ a $f(x_2)$:

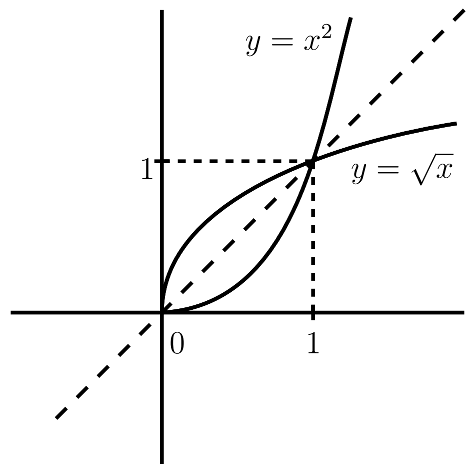
$$x_1, x_2 \in D', \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) .$$

Medzi $x \in, D'$ a $y \in R' = \{y = f(x); x \in D'\}$ máme jedno-jednoznačné priradenie $x \leftrightarrow y = f(x)$: ku každému $y \in R'$ najdeme práve jedno $x \in D'$, pre ktoré $y = f(x)$.

Príklad: Z grafov funkcie $y = x$ a $y = x^2$ vidíme, že funkcia $y = x$ je prostá na $\mathbf{R}$, kým funkcia $y = x^2$ je prostá na $[0, +\infty]$ (alebo $[-\infty, 0]$), ale nie je prostá na žiadnej väčšej podmnožine reálnej osi.



Graf funkcie g(x) inverznej k f(x)



Graf funkcie $y = x^2$
a inverznej $y = \sqrt{x}$

Obr. 5a,b

K funkcii $y = f(x)$ prostej na množine D', môžeme definovať na $R' = \{y = f(x); x \in D'\}$ *inverznú funkciu* $y = g(x)$, ktorá má nasledujúcu vlastnosť:

$$\text{Bodu } x' = f(x) \in R' \text{ priraďuje } g(x') = x \; . \tag{21}$$

Vo všeobecnosti medzi funkciou a k nej inverznou platí:

$$(g \circ f)(x) \ = \ g(f(x)) \ = \ x \ , \ \text{pre } x \in D' \ ,$$

$$(f \circ g)(x) \ = \ f(g(x)) \ = \ x \ , \ \text{pre } x \in R' \ . \tag{22}$$

Grafom inverznej funkcie je množina bodov

$$G_g \ = \ \{[x'; g(x')] \ = \ [f(x); x]\},$$

t.j. oproti G_f je x-ová súradnicová os vymenená s y-ovou osou: G_g dostaneme z G_f tak, že graf G_f otočíme okolo priamky $y = x$ (pozri Obr. 5a).

Odmocnina.

Funkcia $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ (n-á mocnine) je pre $x \geq 0$ jednoznačne zobrazuje množinu $D_f = [0; +\infty)$ na $R_f = [0; +\infty)$ (pozri Obr. 5b). Preto existuje inverzná funkcia, ktorá sa nazýva n-tá odmocnina a značí sa ako $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ alebo $g(x) = \sqrt[n]{x}$ s definičným oborom $D_g = [0; +\infty) = R_f$. Teda platí:

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} \ = \ x \ \text{ pre } x \geq 0 \ ,$$

$$(x^{\frac{1}{n}})^n \ = \ x \ \text{ pre } x \geq 0 \ . \tag{23}$$

Racionálna a reálna mocnina. Keď už máme definovanú odmocninu $x^{\frac{1}{n}}$, $x \geq 0$, tak môžme vypočítať mocninu čísla $x > 0$ na racionálne číslo $r = m/n$ takto:

$$x^r \ = \ (x^m)^{\frac{1}{n}} \ = \ (x^{\frac{1}{n}})^m. \tag{24}$$

Oba spôsoby výpočtu x^r dávajú rovnaký výsledok. Poznamenajme, že pokiaľ exponent $r > 0$, tak uvedené formuly môžme použiť aj pre $x = 0$ (pritom $0^r = 0$).

Pre racionálne mocniny platia vzťahy

$$x^r.x^s = x^{r+s}, \ (x.y)^r = x^r.y^r, \ (x^r)^s = x^{rs}, \tag{25}$$

ktoré zovšeobecňujú analogické vzťahy platné pre celé čísla.

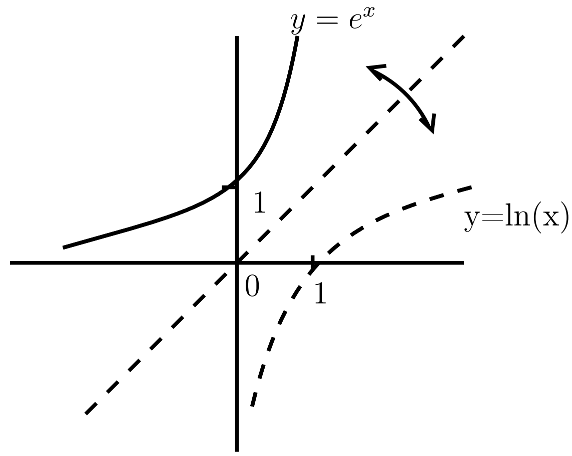
Poznámka. Pretože, reálne čísla možno ľubovoľne presne aproximovať racionálnymi číslami, tak pojem mocniny x^a kladného čísla x možno rozšíriť aj na reálne exponenty $a \in \mathbf{R}$. Formuly (25) pre $x^a.x^b$, $(x.y)^a$, $(x^a)^b$ sú rovnaké ako pre racionálne exponenty. Presnejšia argumentácia vyžaduje pojem limity a bude uvedená neskôr.

Exponenciálna funkcia a logaritmus.

*Exponenciálna funkcia.*V definícii reálnej mocniny x^a pre $x > 0$ a $a \in \mathbf{R}$, vymeníme úlohy x a a a budeme uvažovať pri kladnom $a > 0$ *exponenciálnu funkciu* a^x definovanú na celej číselnej osi $x \in \mathbf{R}$. Táto funkcia spĺňa nasledujúci vzťah (dôsledok prvej rovnice v (25)).

$$a^x.a^y = a^{x+y}, \ a > 0 \text{ pevne zvolené}, \tag{26}$$

ktorý platí pre ľuboľné reálne čísla x a y (číslo a sa nazýva základom a číslo x exponentom).



Obr. 6

Medzi exponenciálnymi funkciami význačné postavenie má Eulerova exponenta zadaná nekonečným radom:

$$\mathrm{e}^x \;=\; 1 \;+\; \frac{x}{1!} \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{27}$$

Neskôr ukážeme, že exponenciálny rad má definovaný súčet pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Jeho základom je Eulerova konštanta

$$\mathrm{e} \;=\; \mathrm{e}^1 \;=\; 1 \;+\; \frac{1}{1!} \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; ... \;=\; 2,718282... \;. \tag{28}$$

Teraz sa formálne presvedčíme, že funkcia e^x spĺňa požadovanú rovnicu

$$\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^y \;=\; \mathrm{e}^{x+y} \;. \tag{29}$$

Postupne máme:

$$\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^y \;=\; (1 \;+\; \frac{x}{1!} \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;).(1 \;+\; \frac{y}{1!} \;+\; \frac{y^2}{2!} \;+\; \frac{y^3}{3!} \;+\; ... \;)$$

$$=\; 1 \;+\; \frac{1}{1!}(x+y) \;+\; \frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2) \;+\; \frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \;+\; ...$$

$$= 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Na základe rovnice (29) tiež máme $\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = e^0 = 1$, takže

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots . \tag{30}$$

Funkcia e^x je rastúca a kladná na celej číselnej osi (jej graf je na Obr. 6):

(i) Pretože, $x > y > 0$ implikuje $x^n > y^n > 0$, tak e^x je rastúca pre $x > 0$,

(ii) pre $x < 0$ to zase vyplýva zo vzťahu $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$.

Funkcia e^x nadobúda všetky kladné hodnoty: jej obor hodnôt je nevlastný interval $(0, +\infty)$.

Logaritmus. *Prirodzený logaritmus* $\ln x$ je definovaný ako funkcia inverzná k e^x. Teda, funkcia $\ln x$ je definovaná pre $x > 0$, pričom:

$$\ln \mathrm{e}^x = x, \; x - \text{reálne},$$

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x, \; x - \text{reálne a kladné}. \tag{31}$$

Na celom svojom definičnom obore logaritmus je rastúca funkcia (pozri Obr. 6). Ďalej platí:

$$\ln(x.y) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^a) = a.\ln x. \tag{32}$$

Teraz už ľahko vyjadríme ľubovoľnú exponenciálnu funkciu a^x pomocou Eulerovej exponenty

$$a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x.\ln a}. \tag{33}$$

Vidíme, že k tomu aby sme vypočítali a^x stačí dosadiť do vzorca pre e^y preškálovaný argument $y = x.\ln a$. Poznamejme ešte že, pre reálnu mocninu platí $x^a = \mathrm{e}^{a.\ln x}$.

Poznámka 1. Logaritmická funkcia redukuje násobenie dvoch reálnych čísiel a a b na sčítanie ich logaritmov $\ln a$ a $\ln b$ (podstata logaritmického pravítka):

$$a.b \;=\; \mathrm{e}^{\ln a}.\mathrm{e}^{\ln b} \;=\; \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}.$$

Komplexné čísla

Teleso reálnych čísiel $\mathbf{R}$ rozšírime o nový matematický objekt o *imaginárnu jednotku* i: jej sčítanie s reálnym číslom a násobenie reálnym číslom definujeme tak, že pre všetky reálne čísla a, b platí

$$\mathrm{i} + a \;=\; a + \mathrm{i}\,,\; (\mathrm{i} + a) + b \;=\; \mathrm{i} + (a + b)\,,\; \mathrm{i} + 0 \;=\; \mathrm{i}\,, \tag{34}$$

$$\mathrm{i}\,.\,a \;=\; a\,.\,\mathrm{i}\,,\; (\mathrm{i}\,.\,a)\,.\,b \;=\; \mathrm{i}\,.\,(a\,.\,b)\,,\; \mathrm{i}\,.\,1 \;=\; \mathrm{i}\,, \tag{35}$$

$$(a + b)\,.\,\mathrm{i} \;=\; a\,.\,\mathrm{i} + b\,.\,\mathrm{i}\,,\; \mathrm{i}^2 \;=\; -1\,. \tag{36}$$

Posledný vzťah $\mathrm{i}^2 \;=\; -1$ definuje násobenie imaginárnej jednotky samej so sebou a podstatne ju odlišuje od reálnych čísiel (pre ktoré vždy platí $a^2 \;\geq\; 0$).

Definícia: Množinu komplexných čísiel $\mathbf{C}$ tvoria čísla tvaru

$$c \;=\; a + b.\mathrm{i}\,, \quad a, b \;-\; \text{reálne čísla}\,.$$

V tejto formuli *imaginarna jednotka* i má vlastnosti (34)-(36). Súčet $c + c'$ a súčin $c.c'$ dvoch komplexných čísiel $c \;=\; a + b.\mathrm{i}$ a $c' \;=\; a' + b'.\mathrm{i}$ sú definované vzťahmi:

$$c + c' \;=\; (a + a') \,+\, (b + b').\mathrm{i}\,,$$
$$c\,.\,c' \;=\; (a.a' - b.b') \,+\, (a.b' + a'.b).\mathrm{i}\,.$$

Poznámky:

1) Ku každému komplexnému číslu $c \;=\; a + b.\mathrm{i}$ definujeme *komplexne združené* číslo $\bar{c} \;=\; a - b.\mathrm{i}$. Reálne čísla

$$\mathrm{Re}\, c \;:=\; \frac{1}{2}(\bar{c} \,+\, c) \;=\; a\,,$$
$$\mathrm{Im}\, c \;:=\; \frac{i}{2}(\bar{c} \,-\, c) \;=\; b\,,$$

nazývajú sa *reálnou časťou* a *imaginárnou časťou* komplexného čísla. Komplexné čísla, s nulovou imaginárnou časťou, pre ktoré $c \;=\; \bar{c} \;=\; a$, identifikujeme s reálnymi číslami.

2) *Absolútna hodnota (modul)* komplexného čísla $c \;=\; a + b.\mathrm{i}$ je definovaná ako nezaporné reálne číslo zadané vzťahom:

$$|c| \;=\; \sqrt{c.\bar{c}} \;=\; \sqrt{a^2 \,+\, b^2}\,.$$

Komplexné číslo $c \;=\; 0$ práve vtedy ak $|c| \;=\; 0$, t.j. $\mathrm{Re}\, c \;=\; a \;=\; 0$ a súčasne $\mathrm{Im}\, c \;=\; b \;=\; 0$.

3) Ku každému komplexnému číslu $c \;=\; a + b.\mathrm{i}$ existuje práve jedno *zaporné číslo* $-c \;=\; (-a) + (-b).\mathrm{i} \;=\; -a - b.\mathrm{i}$, pre ktoré platí $c + (-c) \;=$

$c - c = 0$. Pre každé komplexné číslo $c = a + b.\mathrm{i} \neq 0$ existuje práve jedno *inverzné číslo*

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{|c|^2} = \frac{a - b.\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,.\,\mathrm{i}\,,$$

pre ktoré platí $c.c^{-1} = 1$.

4) Na základe tohto jednoducho sa možno presvedčiť, že komplexné čísla **C** tvoria *teleso*, podobne ako ho tvoria racionálne čísla **Q** a reálne čísla **R**:

• operácie sčítania a násobenia komplexných čísiel sú *komutatívne* a *asociatívne*, a tiež vzájomne *distributívne*,

• ku každému komplexnému číslu existuje *zaporné číslo* a ku každému komplexnému číslu rôznemu od 0 existuje *inverzné číslo.*

• Komplexné čísla, na rozdiel od racionálnych a reálnych čísiel, nemožno prirodzene lineárne usporiadať.

5) Každé komplexné číslo $z = x + y.\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ možno identifikovať s bodom $[x; y]$ v rovine reálnych čísiel $\mathbf{R}^2$:

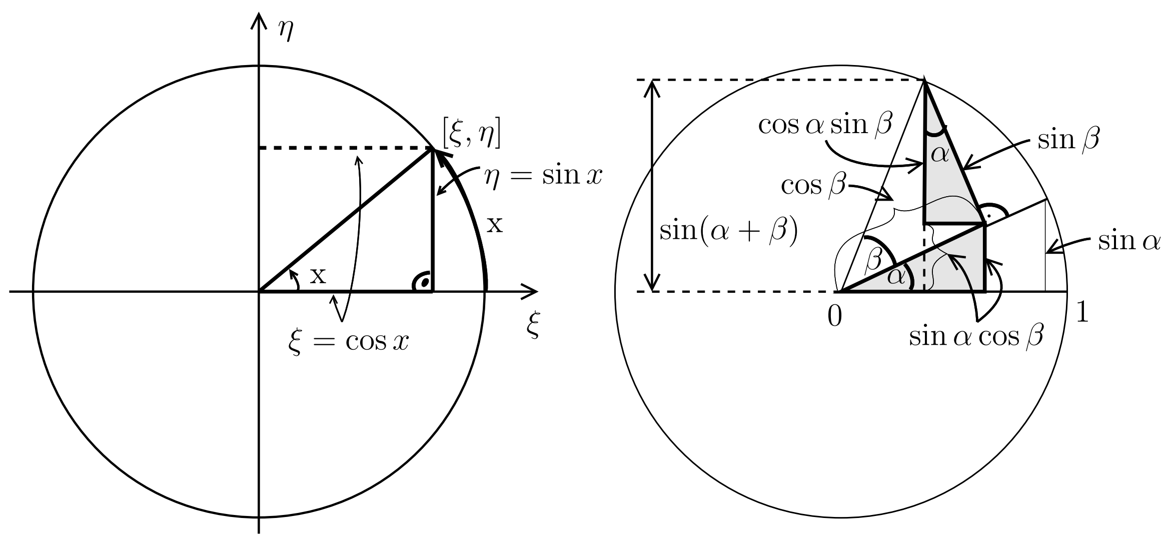
• Na vodorovnú x-ovú os v rovine nanášame reálnu časť komplexného čísla, na kolmú y-ovú os nanášame jeho imaginárnu časť. Komplexnému číslu $z = 0$ odpovedá počiatok v rovine.

• Komplexné číslo $z = x + y.\mathrm{i}$ môžme tiež identifikovať s vektorom ("šipkou") $\mathbf{z}$ v rovine $\mathbf{R}^2$ s koncovym bodom $[x; y]$, ktorá vychádza z počiatku. Vektor $\mathbf{z}$ odpovedajúci z ma dĺžku $|z|$ a zviera s x-vou osou uhol ζ zadaný formulou $\mathrm{tg}\,\zeta = \frac{x}{y}$ (podrobnejšie si to všimneme neskôr).

• Pri znazornení pomocou vektorov v rovine, súčtu komplexných čísiel c

a z odpovedá súčet vektorov **c** a **z**. Ak komplexné číslo z násobime komplexným číslom c, tak súčinu $c \,.\, z$ odpovedá vektor dĺžky $|c|.|z|$, ktorý zviera s x-vou osou uhol $\gamma + \zeta$ (ζ a γ označujú uhly, ktoré s x-ovou osou zvierajú vektory c a z).

Goniometrické funkcie.



Obr. 7a,b

Uvažujme v rovine $\mathbf{R}^2$ (s navzájom kolmými číselnými osami ξ a η) kružnicu C o polomere 1. Body na C parametrizujme uhlom x, ktorý nanášame od bodu $(1; 0)$ na kružnicu v kladnom smere (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Uhly zadávame v radiánoch: $180^o = \pi$, kde $\pi = 3,141592...$ je Ludolfovo číslo, t.j. $1^o = \pi/180$ (špeciálne $90^o = \pi/2$).

Podľa definície goniometrických funkcií z pravouhlého trojuholníka vyznačeného na Obr. 7a máme

$$\sin x = \frac{\text{protiľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \eta \ ,$$

$$\cos x = \frac{\text{priľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \xi \ . \tag{37}$$

Z obrázku vidno, že funkcie $\sin x$ a $\cos x$ nadobúdajú špeciálne hodnoty

$$\sin 0 = 0 \ , \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \ ,$$

$$\cos 0 = 1 \ , \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \ . \tag{38}$$

Tiež jednoducho možno ukázať, že platia súčtové (presnejšie, rozdielové) vzorce

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \ ,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \ . \tag{39}$$

Dôkaz týchto vzorcov je naznačený na Obr. 7b. Zo špeciálnych hodnôt (38) a súčtových vzorcov (39) plynú všetky formulky pre goniometrické funkcie. Zhrňme tie základné:

(i) Ak v súčtových vzorcoch položíme $x = 0$, získameme nepárnosť funkcie sinus a párnosť funkcie cosinus:

$$\sin(-y) = -\sin y \ , \ \cos(-y) = \cos y \ , \tag{40}$$

(ii) Ak v súčtových vzorcoch položíme $y = x$, obdržíme známu rovnicu (*Pytagorova veta* pre trojuhoník s jednotkovu preponou):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \tag{41}$$

(iii) Ak položíme $x = \frac{\pi}{2}$ a využijeme (i) dostaneme základný vzťah medzi funkciami sinus a cosinus:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - y) \ = \ \cos y \ , \ \cos(\frac{\pi}{2} - y) \ = \ \sin y \ , \tag{42}$$

(iv) Ak v súčtových vzorcoch položíme $y = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ a použijeme ich dvakrát dostaneme zmenu znamienka funkcií sinus a cosinus pri zmene argumentu o π:

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) \ &= \ \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \ = \ \cos(x + \frac{\pi}{2}) \ = \ -\sin x \ , \\ \cos(x+\pi) \ &= \ \cos(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \ = \ -\sin(x + \frac{\pi}{2}) \ = \ -\cos x \ , \end{aligned} \tag{43}$$

(v) Nakoniec, ak predchádzajúci vzťah aplikujeme dvakrát dostaneme periodičnosť funkcií sinus a cosinus pri zmene argumentu o 2π:

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) \ &= \ \sin(x+\pi+\pi) \ = \ -\sin(x+\pi) \ = \ \sin x \ , \\ \cos(x+2\pi) \ &= \ \cos(x+\pi+\pi) \ = \ -\cos(x+\pi) \ = \ \cos x \ . \end{aligned} \tag{44}$$

Okrem goniometrických funkcií $\sin x$ a $\cos x$ zavádzujú sa aj ďalšie:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \ &= \ \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{definovaná pre } x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots \\ \operatorname{cotg} x \ &= \ \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{definovaná pre } x \neq 0, \pm\pi, \ldots \end{aligned} \tag{45}$$

Z ich definičných oborov sme museli vynať body na číselnej osi, v ktorých $\cos x = 0$ resp. $\sin x = 0$. Ich základné vlastnosti plynú ľahko z formuliek funkcie $\sin x$ a $\cos x$, ktoré sú uvedené vyššie. Napríklad, funkcie $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ sú periodické s periódou π:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) \ = \ \operatorname{tg} x \,, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) \ = \ \operatorname{cotg} x \ . \tag{46}$$

Úplne podobne možno odvodiť zo súčtových vzorcov rôzne ďalšie vzťahy medzi goniometrickými funkciami.

Poznámka: Uvažujme funkciu

$$E(x) \;=\; \cos x \,+\, \mathrm{i}\, \sin x\,.$$

Použitím súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie dostaneme

$$E(x)\,E(y) \;=\; (\cos x \,+\, \mathrm{i}\, \sin x)\,(\cos y \,+\, \mathrm{i}\, \sin y)$$

$$=\; (\cos x\, \cos y \,-\, \sin x\;\, \sin y) \,+\, \mathrm{i}\,(\sin x\, \cos y \,+\, \cos x\, \sin y)$$

$$=\; \cos(x+y) \,+\, \mathrm{i}\, \sin(x+y) \;=\; E(x+y)\,.$$

Teda funkcia $E(x)$ je exponenta, ktorú možno vyjadriť pomocou Eulerovej exponenciálnej funkcie. Platia dôležité *Moivre*ove vzorce

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \;=\; \cos x \,+\, \mathrm{i}\, \sin x\,, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} \;=\; \cos x \,-\, \mathrm{i}\, \sin x\,.$$

Obrátené *Moivre*ove vzťahy sú

$$\cos x \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \,+\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}\,, \quad \sin x \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \,-\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2\mathrm{i}}\,.$$

Teraz pomocou rozvojov (27) a (30) pre funkcie e^{x} a e^{-x} dostaneme rovnako dôležité rozvoje pre goniometrické funkcie $\cos x$ a $\sin x$:

$$\cos x \;=\; 1 \,-\, \frac{x^2}{2!} \,+\, \frac{x^4}{4!} \,-\, \dots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,. \tag{47}$$

$$\sin x \;=\; x \,-\, \frac{x^3}{3!} \,+\, \frac{x^5}{5!} \,-\, \dots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{48}$$

Cyklometrické funkcie.

Cyklometrické funkcie sú funkcie inverzné ku goniometrickým. Funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ sú monotónne (rastúce alebo klesajúce na vhodných intervaloch dĺžky π. Ich štandartná voľba je nasledovná:

(i) Funkcia $\sin x$ je rastúca na intervale $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, pričom jej obor hodnôt je interval $(-1, +1)$. Funkcia $\arcsin x$, inverzná k $\sin x$ je určená vzťahmi (pozri Obr. 8a, funkcia $\sin x$ je vyznačená plnou čiarou a funkcia $\arcsin x$) čiarkovane):

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{pre } x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}), \\ \sin(\arcsin x) &= x \quad \text{pre } x \in (-1, +1). \end{aligned}$$

Podobne, funkcia $\operatorname{tg} x$ je rastúca na intervale $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, jej obor hodnôt je interval $(-\infty, +\infty)$. Inverzná funkcia $\operatorname{arctg} x$ spĺňa vzťahy (pozri Obr. 8b, funkcia $\operatorname{tg} x$ je vyznačená plnou čiarou a funkcia $\operatorname{arctg} x$ čiarkovane):

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x\ ,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}), \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x\ ,\ x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

(ii) $\cos x$ a $\operatorname{cotg} x$ sú klesajúce na intervale $(0, \pi)$. Ich obory hodnôt sú $(-1, +1)$ resp. $(-\infty, +\infty)$. Vďaka reláciam

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)\ ,\ \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$$

príslušné inverzné funkcie sú dané vzťahmi:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,\ x \in (-1, +1),$$

$$\operatorname{arccotg} x \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x,\;\; x \in (-\infty, +\infty).$$

Základné vzťahy pre cyklometrické funkcie:

$$\arcsin x \;=\; -\arcsin(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arccos x \;=\; \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x \;=\; \pi - \arccos(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arcsin x \;=\; \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x \;=\; -\operatorname{arctg}(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x \;=\; \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arccotg} x \;=\; \pi - \operatorname{arccotg}(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \;=\; \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

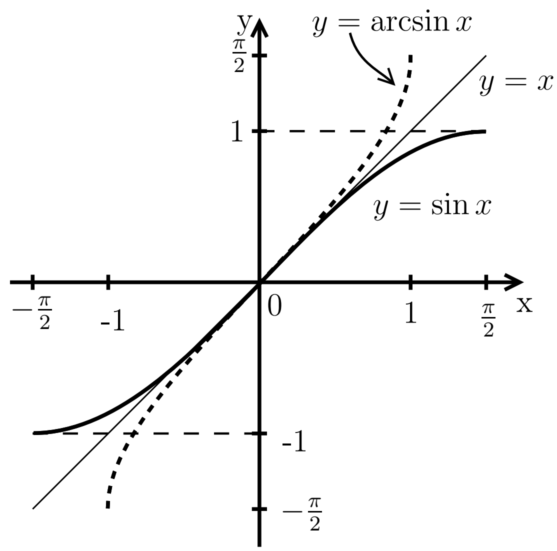
Tieto vzťahy plynú ľahko zo známych relácií medzi goniometrickými funkciami. Ako ilustráciu overíme vzťah

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x.$$

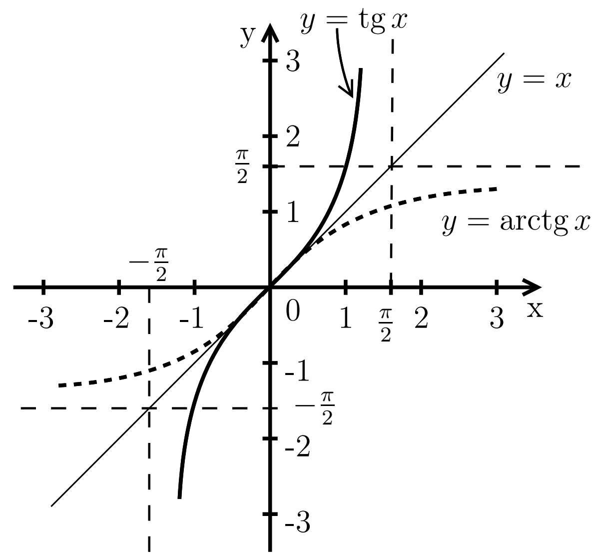
Ak dosadíme na ľavej strane $x = \sin t$, postupne dostaneme

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \;=\; \operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\cos t} \;=\; \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) \;=\; t\,.$$

Toto je presne to, čo sa získa pri dosadení do pravej strany: $\arcsin(\sin t) = t$.



Graf funkcie $y = \sin x$
a k nej inverznej $y = \arcsin x$



Graf funkcie $y = \operatorname{tg} x$
a k nej inverznej $y = \operatorname{arctg} x$

Obr. 8 a,b

Kapitola 3

Limita číselnej postupnosti, rady

Číselná postupnosť. Číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=m}^{\infty} \equiv \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ je funkcia definovaná na podmnožine prirodzených čísiel $\{m, m+1, m+2, \dots\}$, ktorá priraďuje každému číslu n z tejto podmnožiny reálne číslo a_n:

$$n \in \{m, m+1, m+2, \dots\} \ \mapsto \ a_n \in \mathbf{R}\,. \tag{49}$$

Poznámka: Zväčša sa uvažujú prípady $m = 1$ (alebo $m = 0$). Nie je to podstatné, lebo ak položíme $a'_n = a_{n+m}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, máme jedno-jednoznačné priradenie medzi postupnosťou $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ a postupnosťou $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ (alebo $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Monotónne a ohraničené postupnosti. Postupnosť $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ je

- *rastúca* ak pre všetky členy postupnosti platí $a_n < a_{n+1}$,
- *klesajúca* ak pre všetky členy postupnosti platí $a_n > a_{n+1}$,
- *neklesajúca* ak pre všetky členy postupnosti platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- *nerastúca* ak pre všetky členy postupnosti platí $a_n \geq a_{n+1}$,

• *ohraničená zdola* resp. *ohraničená zhora* ak existuje také číslo K, že pre všetky členy postupnosti platí $a_n > K$ resp. $a_n < K$,

• *ohraničená* ak je ohraničená zdola aj zhora; vtedy existuje kladné číslo K, že pre jej všetky členy platí $|a_n| < K$.

Niekoľko príkladov:

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, \dots\}$ alebo $a_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

2) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots\}$, alebo $a_n = 3.(-\frac{1}{2})^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

3) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, \dots\}$, alebo $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

4) $a_n = \frac{1}{n}$ alebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, $n = 1, 2, \dots$,

5) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -2, 3, -4, \dots\}$, alebo $a_n = (-1)^{n-1} n$, $n = 1, 2, \dots$.

Poznámka. Postupnosť 1. je rastúca, 4. je klesajúca, postupnosti 1. a 5. sú neohraničené, kým postupnosti 2., 3. a 4. sú ohraničené.

Limita číselnej postupnosti.

Vlastná limita. Ak existuje k danej postupnosti $\{a_n \dots\}_{n=m}^{\infty}$ číslo $a \in \mathbf{R}$, ku ktorému čísla a_n s rastúcim sa ľubovoľne približujú, vtedy číslo a nazývame limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ a značíme

$$a \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \;. \tag{50}$$

Definícia (presné znenie). Hovoríme, že číslo $a \in \mathbf{R}$ je (vlastnou) limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$

ak pre každé kladné číslo $\varepsilon > 0$ *existuje také prirodzené číslo* n_0*, že pre každé prirodzené číslo* $n > n_0$ *platí*

$$a - \varepsilon \;<\; a_n \;<\; a + \varepsilon \;. \tag{51}$$

Objasnime si bližšie, čo znamená táto presná definícia:

(i) Ak zvolíme $\varepsilon = 10^{-k}$, potom nerovnosti (51) nám hovoria, že všetky členy postupnosti a_n s $n > n_0$ majú rovnaký dekadický rozvoj ako a aspoň do k-teho miesta za desatinnou čiarkou;

(ii) Geometrický si môžme nerovnosti (51) predstaviť takto. Uvažujme graf funcie $n \mapsto a_n$. Nerovnosti (51) nám zaručujú, že pre $n > n_0$ hodnoty a_n sú v $\pm\varepsilon$ páse okolo priamky $y = a$ rovnobežnej s x-ovou osou, pozri Obr. 9a.

Nevlastná limita. Ak členy postupnosti $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ pri rastúcom n neohraničene rastú (resp. klesajú), tak hovoríme, že postupnosť má nevlastnú limitu $+\infty$ (resp. $-\infty$), pozri Obr. 9b. Toto označujeme symbolom

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; +\infty \text{ resp. } \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; -\infty \;. \tag{52}$$

Definícia (presné znenie). Hovoríme, postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má nevlastnú limitu $+\infty$ resp. $-\infty$

ak pre každé kladné číslo $K > 0$ existuje také prirodzené číslo n_0, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí

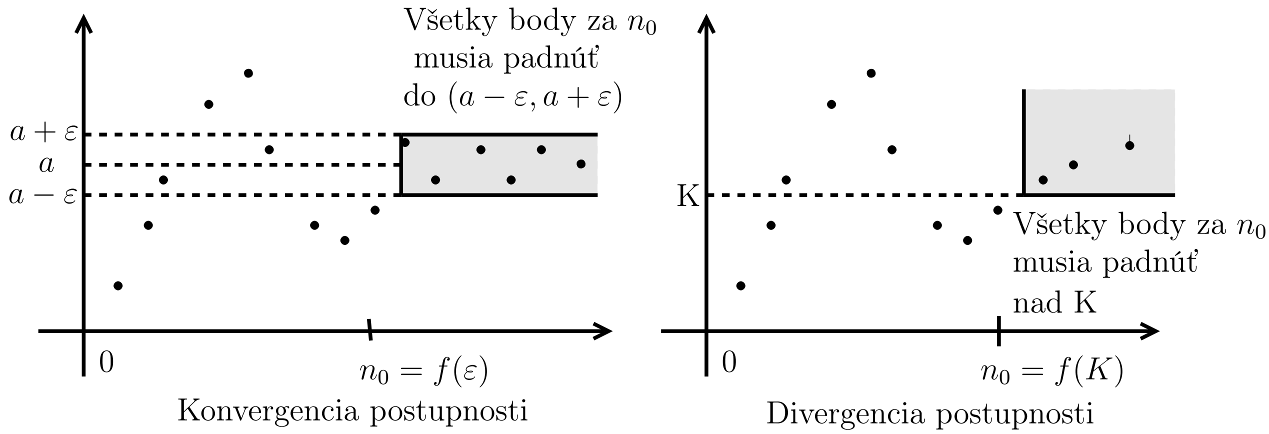
$$a_n \;>\; +K \text{ resp. } a_n \;<\; -K \;. \tag{53}$$

Základné vety o limitách postupností.

1. Postupnosť môže mať najviac 1 limitu. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ má limitu, potom rovnakú limitu má aj jej každá podpostupnosť $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_n \;=\; a_{i_n}$ a $m \;\leq\; i_1 \;<\; i_2 \;<\; \ldots$, je rastúca postupnosť prirodzených čísiel.

2. Postupnosť, ktorá má vlastnú limitu je ohraničená; ak má nevlastnú limitu $+\infty$ resp. $-\infty$, tak nie je ohraničená zhora resp. zdola.

3. Ohraničená rastúca resp. klesajúca postupnosť má vlastnú limitu, pričom $a_n \;\leq\; a \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n$ resp. $a_n \;\geq\; a \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n$ (podľa toho či postupnosť je rastúca resp. klesajúca).



Obr. 9a,b

4. Neohraničená rastúca resp. klesajúca postupnosť má nevlastnú limitu $+\infty$ resp. $-\infty$.

5. Ak existujú vlastné limity $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ postupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, potom platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \;=\; a+b,\;\; \lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) \;=\; a.b\;,$$

$$\text{Ak } b \neq 0 \text{ potom } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \;=\; \frac{a}{b}\;.$$

6. Ak existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a nevlastná limita $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

Ak $a \neq 0$, potom $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \pm\infty$ (podľa znamienka a).

7. Ak $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ je postupnosť kladných resp. záporných čísiel, pre ktorú $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom $\lim_{n\to\infty}(1/a_n) = +\infty$ resp. $\lim_{n\to\infty}(1/a_n) = -\infty$.

Ak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, potom $a = \lim_{n\to\infty}(1/a_n) = 0$.

Niektoré dôležité limity.

Nech a je reálne kladné číslo, potom

1.

$$\lim_{n\to\infty} n^a \;=\; +\infty,\;\; \lim_{n\to\infty} n^{-a} \;=\; 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-a}\ln n \;=\; 0,\;\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n!} \;=\; 0\;.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} a^n \;=\; +\infty,\;\; \text{pre } a>1,$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n \;=\; 1,\;\; \text{pre } a=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n \;=\; 0,\;\; \text{pre } a<1.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \;=\; 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \;=\; 1.$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \mathrm{e} \;=\; 2,718282...\;,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \mathrm{e}^{-1} \;=\; 0,36790...\;,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\;-\;\ln n\right)^n \;=\; \mathrm{C} \;=\; 0,57722...$$

(e = Eulerove číslo, C = Eulerova konštanta).

Číselné rady.

Definícia: Výraz tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv a_0 + a_1 + \dots ,$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvoria číselnú postupnosť, nazývame *číselným radom*; a_n sa nazýva n-tým členom číselného radu a čísla

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

čiatočnými súčtami. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* ak existuje limita

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \tag{54}$$

Posledné značenie nie je dôsledné, ale bežne sa používa: symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ označuje jednak rad ako objekt a zároveň aj jeho súčet (jeho okamžitý význam obyčajne vyplynie z kontextu).

Ak limita (54) neexistuje, rad *diverguje* (to značí, že $\lim_{n\to\infty} S_n$ buď neexistuje alebo existuje nevlastná limita $\pm\infty$).

Príklady radov.

1. Konvergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

2. Divergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \;=\; 1 \;+\; 1 \;+\; 1 \;+\; \dots$$

3. Divergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \;=\; 1 \;-\; 1 \;+\; 1 \;+\; \dots$$

4. Divergentný harmonický rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \;=\; 1 \;+\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{3} \;+\; \dots$$

5. Konvergentný rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{3} \;-\; \dots$$

Základné vety o konvergencii radov.

1. Na konvergenciu alebo divergenciu radu nemá vplyv vynechanie alebo pridanie niekoľkých členov na začiatku radu.

2. Ak vynásobíme členy konvergentného radu tým istým číslom c dostaneme opäť konvergentný rad, pričom

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n \;=\; c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;.$$

3. Konvergentné rady môžeme po členoch sčítať a odčítať. Ak existujú ich súčty

$$S_a \;= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;,\;\; S_b \;= \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

potom existuje

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b \, .$$

4. *Nutná podmienka konvergencie.* Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Táto podmienka ale *nie je* postačujúca (pozri príklad s harmonickým radom).

5. *Rad s alternujúcimi znamiemkami.* Ak $a_n > 0$ pre $n \in \mathbf{N}$, potom $S_a = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ nazývame radom s alternujúcimi znamiemkami.

Leibnizovo kritérium. Rad s alternujúcimi znamiemkami konverguje ak

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots \quad \text{a existuje} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \, .$$

Absolútna konvergencia.

V prípade ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má členy s rôznymi znamienkami (ktoré nemusia byť alternujúce), je výhodné skúmať rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ s kladnými členmi. Možno ukázať, že ak konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (naopak to neplatí).

Definícia: Hovoríme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje* ak konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Hovoríme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje *neabsolútne*, ak je konvergentný, ale rad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Vlastnosti absolútne konvergentných radov.

1. V absolútne konvergentnom rade môžeme poradie jeho členov ľubovoľne meniť - jeho súčet sa nemení.

Poznámka: V neabsolútne konvergentnom rade môžeme jeho členy usporiadať tak, že jeho súčet bude rovnať ľubovoľnému číslu (Riemannova veta).

2. Absolútne konvergentné rady $S_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $S_b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ môžeme po členoch násobiť:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots).(b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots = S_a \,.\, S_b$$

3. *Jednoduché kritérium konvergencie.* Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, ak existuje kladné čislo $q < 1$ a kladné číslo A, tak že pre všetky n platí odhad:

$$|a_n| \leq A\, q^n \;.$$

4. *D'Alembertove a Cauchyho kritéria konvegencie.* Nech pre rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existuje niektorá z limít:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;, \text{ D'Alembertovo kritérium,}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;, \text{ Cauchyho kritérium.}$$

Ak $\rho < 1$ potom rad absolútne konverguje, ak $\rho > 1$ rad diverguje. Pri $\rho = 1$ rad môže, ale nemusí, konvergovať.

Príklady. Vyšetrite konvergenciu uvedených radov:

1. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje, lebo

$$\rho \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \;=\; \frac{1}{2}.$$

2. Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Tvrdenie dokážeme sporom. Budeme predpokladať, že existuje konečný súčet $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Potom existujú konečný súčet jeho párnych členov

$$S' \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{2} S,$$

ako aj nepárnych členov

$$S'' \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \;>\; \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \;=\; \frac{1}{2} S.$$

Pretože, $S = S' + S''$ prídeme ku sporu:

$$S = S' + S'' > \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} S = S.$$

3. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ diverguje, lebo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \;>\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \;=\; +\infty.$$

Poznámka. V posledných dvoch príkladoch D'Alembertove alebo Cauchyho kritérium dáva $\rho \;=\; 1$ a neurčuje konvergenciu alebo divergenciu uvažovaných radov.

Súčty niektorých číselných radov.

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = \mathrm{e}$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

3.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

4.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots = \frac{2}{3}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots = \frac{1}{1.2}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \ldots = \frac{3}{4}$$

8.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$$

9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; 1 \;+\; \frac{1}{4} \;+\; \frac{1}{9} \;+\; \ldots \;=\; \frac{\pi^2}{4}$$

Komentár k príkladom

(i) *Príklady 1 a 2.* Pre rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{x^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} \;=\; 0 \; .$$

Tento rad (absolútne) konverguje pre ľubovoľné x. Pre $x \;=\; 1$ máme príklad 1, pre $x \;=\; -1$ príklad 2.

(ii) *Príklady 3 a 4.* Jedná sa o geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ s $q \;=\; \frac{1}{2}$ resp. $q \;=\; -\frac{1}{2}$. V oboch prípadoch máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|q|^n} \;=\; |q| \;=\; \frac{1}{2} \; .$$

Geometrický rad môžme sčítať takto. Označme

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; 1 + q + q^2 \;+\; q^n$$

Potom

$$S_{n+1} \;=\; 1 + q + q^2 \;...\; + q^n + q^{n+1}$$

$$= \; S_n + \; +q^{n+1} \; = \; 1 \; + \; qS_n \; .$$

Z posledného riadku dostávame

$$S_n \; = \; \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \; = \; \frac{1}{1 - q} \; - \; \frac{q^{n+1}}{1 - q} \; .$$

Zrejme,

$$\lim_{n \to \infty} S_n \; = \; \frac{1}{1 - q} \; .$$

Stačí sem dosadiť $q \; = \; \frac{1}{2}$ resp. $q \; = \; -\frac{1}{2}$.

(iii) *Príklady 5 až 7.* V príklade 5 zapíšeme člen radu takto:

$$a_n \; = \; \frac{1}{n(n+1)} \; = \; \frac{1}{n} \; - \; \frac{1}{n+1} \; .$$

Potom,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; (1 - \frac{1}{2}) \; + \; (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \; + \; \ldots \; = \; 1 \; .$$

V príklade 6 zapíšeme

$$a_n \; = \; \frac{2n - 1}{2n + 1)} \; = \; \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} \; - \; \frac{1}{2n + 1} \right) \; ,$$

a použijeme rovnaký postup:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; \frac{1}{2} \left((1 - \frac{1}{3}) \; + \; (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \; + \; \ldots \right) \; = \; \frac{1}{2} \; .$$

Číselný rad v príklade 7 je súčtom oboch predchádzajúcich radov:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; \frac{1}{1.3} \; + \frac{1}{2.4} \; + \; \frac{1}{3.5} \; + \; \frac{1}{4.6} \; \ldots$$

$$= \; \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots \right) \; + \; \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}) + \ldots \right) \; = \; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \; = \; \frac{3}{4}.$$

(iv) *Príklady 8 až 10.* Konvergenciu radov určíme odhadom súčtov zhora:

$$\text{Rad } 8: \ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots \ = \ (1-\frac{1}{2}) \ + \ (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) \ + \ \dots$$

$$< \ (1-\frac{1}{2}) \ + \ \underline{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})} \ + \ (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) \ + \ \underline{(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})} \ \dots \ = \ 1 \ .$$

Tu sme pri odhade pridali podčiarknuté kladné členy. V príklade 9 postupujeme obdobne:

$$\text{Rad } 9: \ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots \ = \ (1-\frac{1}{3}) \ + \ (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) \ + \ \dots$$

$$< \ (1-\frac{1}{3}) \ + \ \underline{(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})} \ + \ (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) \ + \ \underline{(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})} \ \dots \ = \ 1 \ ,$$

kde sme opäť pridali podčiarknuté kladné členy. Nakoniec rad 10 odhadneme pomocou radu z príkladu 5:

$$\text{Rad } 10: \ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\dots \ < \ 1 \ + \ \frac{1}{1.2} \ + \ \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4} \ +\dots \ = \ 2 \ .$$

V prídade alternujúcich znamienok možno využiť aj Leibnizovo kritérium.

Kapitola 4

Limita funkcie, spojitosť a derivácia

Limita funkcie

Nech funkcia $f(x)$ reálnej premennej x je definová v δ-*okolí bodu* $x = a$

$$U_\delta(a) \; = \; (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)\,, \quad \delta \; > \; 0\,. \tag{55}$$

V samotnom bode bode a pritom funkcia $f(x)$ nemusí byť definovaná. Do $U_\delta(a)$ patria reálne čísla, pre ktoré platí: $x \neq a$ a $a-\delta < x < a+\delta$.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ definová *v okolí bodu* a má v tomto bode limitu

$$c \; = \; \lim_{x \to a} f(x)$$

ak s približovaním sa x k číslu a, hodnoty funkcie $f(x)$ sa ľubovoľne približujú k číslu c. Geometrická interpretácia limity funkcie je naznačená na Obr. 10a.

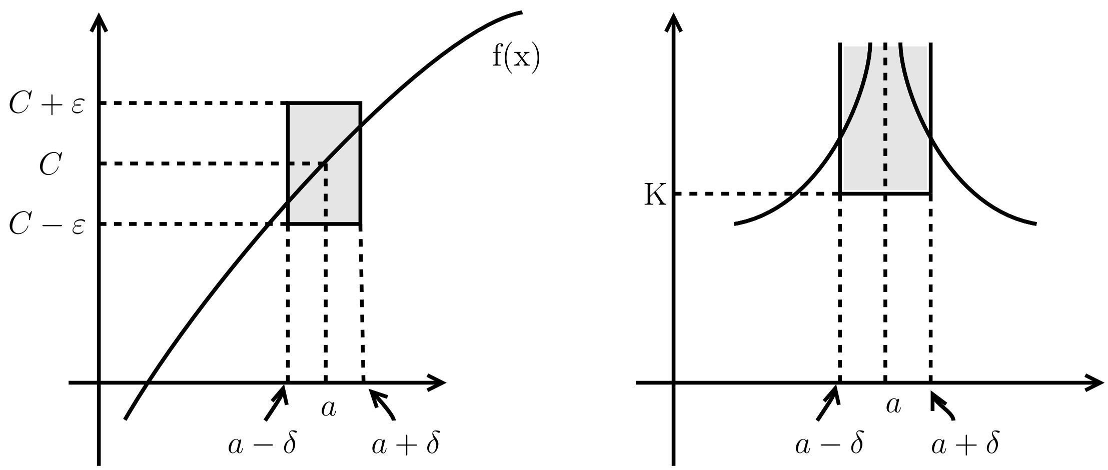
Definícia (presné znenie): Funkcia $f(x)$ má v bode $x = a$ limitu rovnajúcu sa číslu c:

ak pre každé kladné číslo $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \tag{56}$$

platí

$$c-\varepsilon < f(x) < c+\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-c| < \varepsilon \,. \tag{57}$$



Obr. 10a,b

Nevlastná limita funkcie

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ v bode $x = a$ má nevlastnú limitu $+\infty$ resp. $-\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

ak funkcia neobmedzene rastie resp. klesá pri približovaní sa x k bodu a. Geometrická interpretácia nevlastnej limity $+\infty$ funkcie $f(x)$ je naznačená na Obr. 10b.

Definícia (presné znenie): Funkcia $f(x)$ má v bode $x = a$ limitu

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

ak k ľubovoľnému číslu $K > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky x

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \tag{58}$$

platí $f(x) > K$ resp. $f(x) < -K$.

Limita funkcie sprava a limita funkcie zľava

Niekedy môže nastať situácia, že limita funkcie $f(x)$ v bode a neexistuje, ale existuje buď jej limita v bode a sprava alebo jej limita v bode a zľava (obe limity nemusia existovať súčasne). Znenie oboch definícií je nasledovné:

Definícia (presné znenie): Funkcia $f(x)$ má v bode $x = a$ vlastnú limitu sprava $c = \lim_{x\to a+} f(x)$ resp. vlastnú limitu zľava $c = \lim_{x\to a-} f(x)$

ak pre každé kladné číslo $K > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky

$$x \in (a, a+\delta) \;\; \text{resp.} \;\; x \in (a-\delta, a) \tag{59}$$

platí

$$c-\varepsilon < f(x) < c+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; |f(x)-c| < \varepsilon\ . \tag{60}$$

V prípade nevlastnej limity sprava resp. zľava $+\infty$ (alebo $-\infty$) *ak pre každé kladné číslo $K > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky*

$$x \in (a, a+\delta) \;\; \text{resp.} \;\; x \in (a-\delta, a) \tag{61}$$

platí $f(x) > K$. *V prípade nevlastnej limity sprava resp. zľava* $-\infty$ *posledná nerovnosť sa nahradí podmienkou* $f(x) < -K$.

Príklady: Na základe uvedených definícií najdite limity sprava a zľava

$$\lim_{x\to\pm 0} \varepsilon(x)\,, \quad \varepsilon(x) \ - \ \text{znamienková funkcia}\,.$$

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{1}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to\pm 0} \frac{1}{x}\,.$$

Poznámka 1 (dôležitá): Funkcia má v bode $x = a$ (vlastnú alebo nevlastnú) limitu $\lim_{x\to a} f(x) = c$ práve vtedy, ak pre *ľubovoľnú* číselnú postupnosť bodov $\{x_1, x_2, ...\}$ z okolia bodu a, ktorá má limitu $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_1), f(x_2), ...\}$ má konverguje k c, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c\,.$$

Poznámka 2 (dôležitá): Funkcia má v bode $x = a$ (vlastnú alebo nevlastnú) limitu $\lim_{x\to a} f(x) = c$ práve vtedy, ak má v bode $x = a$ limitu sprava aj zľava a platí $c = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$.

Limita funkcie v nevlastných bodoch

Číslo c je limitou funkcie $f(x)$ pre $x \to \pm\infty$, čiže

$$c = \lim_{x\to +\infty} f(x), \quad \text{resp.} \quad c = \lim_{x\to -\infty} f(x),$$

ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ *existuje také číslo* $K > 0$, *že*

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon \text{ pre všetky } x > K \quad \text{resp. } x < -K. \tag{62}$$

Nevlastná limita v nevlastných bodoch je definovaná obdobne:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \pm\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \pm\infty,$$

ak pre ľubovoľné číslo $K > 0$ *existuje také číslo* $N > 0$*, že pre všetky* x *spĺňajúce nerovnosti* $x > N$*, resp.* $x < -N$ *platí*

$f(x) > K$ v prípade, že limita je $+\infty$,

$f(x) < -K$ v prípade, že limita je $-\infty$.

Poznámka 3 (analóg predchádzajúcej poznámky 1): Pokiaľ existuje (vlastná alebo nevlastná) limita $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; c$, potom pre každú postupnosť bodov $\{x_1, x_2, ...\}$, ktorá má odpovedajúcu limitu $\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; \pm\infty$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; c\;.$$

Základné vety o limitách funkcií

Nasledujúce tvrdenia sú priamym dôsledkom Poznámok 1 a 2 spolu s analogickými tvrdeniami o limitách postupností:

1) *Limita súčtu a súčinu funkcií.* Ak existujú vlastné limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ potom existujú limity

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) \;=\; \lim_{x\to a} f(x) \;+\; \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) \;=\; \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \tag{63}$$

2) *Limita podielu funkcií.* Ak existujú vlastné limity

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

potom existuje limita podielu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \tag{64}$$

3) Ak v okolí bodu $x = a$ o funkcii $f(x)$ platí $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ a ak

$$\lim_{x\to a} \phi(x) \;=\; c \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) \;=\; c \tag{65}$$

potom aj $\lim_{x\to a} f(x) \;=\; c$.

4) Ak existuje vlastná limita $\lim_{x\to a} f(x)$ a nevlastná limita $\lim_{x\to a} g(x) \;=\; \pm\infty$ potom existuje limita

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) \;=\; \pm\infty.$$

Ak naviac $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, potom

$$\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) \;=\; \pm\infty.$$

Znamienko poslednej limity je určené znamienkami $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$.

5) Ak existuje také kladné číslo K, že $|f(x)| \;<\; K$ v okolí bodu a, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je ohraničená v okolí bodu a.

Ak existuje nevlastná limita $\lim_{x\to a} g(x)$ a funkcia $f(x)$ je ohraničená v okolí bodu a potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; 0.$$

Niektoré dôležité limity

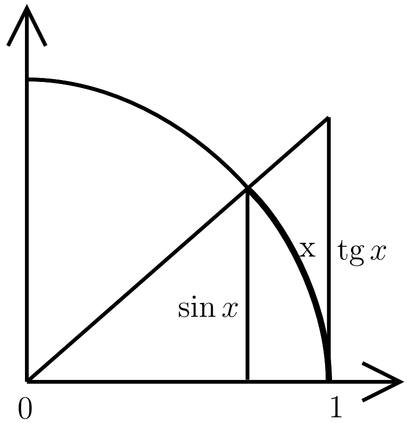
Uveďme dve dôležité limity, ktoré budeme využívať pri výpočte limít rôznych výrazov:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\ , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ . \tag{66}$$

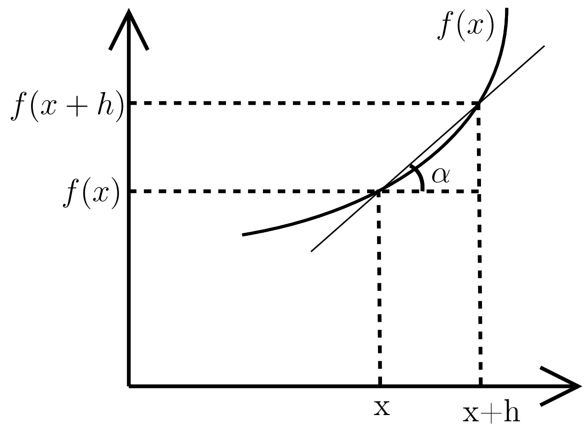
Prvá je zovšeobecnením analogickej limity pre číselné postupnosti (v ktorej celočíselná premenná n sa nahradila reálnou premennou x). Odvodenie druhej je naznačené na Obr. 11, z ktorého pre $0 < |x| < \pi/2$ možno dedukovať nerovnosti

$$\cos x = \frac{\sin x}{\mathrm{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ak uvážime, že $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, tak v limite $x \to 0$ obdržime hľadanú limitu.



obr. 11



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \operatorname{tg} \alpha_h(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

obr. 12

Spojitosť funkcie

Definícia: Funkcia $f(x)$ definovaná v okolí bodu $x = c$ je v tomto bode *spojitá* ak bod c patrí do definičného oboru funkcie a existuje *vlastná* limita

$$\lim_{x\to c} f(x) \ = \ f(c). \tag{67}$$

Funkcia je spojitá na intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode c z intervalu (a, b).

Poznámka: Ak funkcia $f(x)$ nie je spojitá v bode $x = c$ ale existuje vlastná limita $\lim_{x\to a} f(x) = c$, potom môžeme funkciu $f(x)$ *spojito dodefinovať* tým, že definujeme novú funkciu $\tilde{f}(x)$ takto:

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x) = c\,, \;\; \tilde{f}(x) = f(x) \text{ pre } x \neq a\,.$$

Funkcia $\tilde{f}(x)$ je už spojitá v bode $x = a$.

Príklady na spojitosť funkcie.

1. Neelementárne funkcie $[x]$ a $\varepsilon(x)$ sú nespojité; absolútna hodnota $|x|$ je spojitá funkcia.

2. Mocninné funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch:

a. Pre celé číslo $n > 0$ funkcia x^n je spojitá na celej číselnej osi $x \in (-\infty, +\infty)$, kým x^{-n} je spojitá pre všetky $x \neq 0$;

b. pre realne a funkcia x^a je spojitá na intervale $(0, +\infty)$.

3. Exponenciálna funkcia a logaritmus sú spojité na svojich definičných oboroch:

a. e^x je spojitá na celej číselnej osi $x \in (-\infty, +\infty)$.

b. $\ln x$ je spojitá na intervale $(0, +\infty)$.

4. Goniometrické a cyklometrické funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch:

a. Funkcie $\sin x$ a $\cos x$ sú spojité na celej číselnej osi $x \in (-\infty, +\infty)$.

b. Funkcia $\operatorname{tg} x$ je spojitá na celej číselnej osi s výnimkou bodov $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n - celé číslo, kým $\operatorname{cotg} x$ je spojitá na celej číselnej osi s výnimkou bodov $x = n\,\pi$, n - celé číslo.

c. Funkcia $\arcsin x$ je spojitá na intervale $(-1, +1)$ a funkcia $\operatorname{arctg} x$ je spojitá na celej číselnej osi $(-\infty, +\infty)$

Derivácia funkcie

Definícia: Derivácia funkcie $f(x)$ spojitej na intervale (a, b) je nová funkcia premennej x

$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \tag{68}$$

ktorá je definovaná v tých bodoch $x \in (a, b)$, v ktorých existuje uvedená limita.

Geometrický význam derivácie je znázornený na Obr. 12. Podľa náčrtu $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ je dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode x. Uhol α udáva sklon dotyčnice v bode x vzhľadom k x-ovej osi; ak v bode $x = a$ existuje nevlastná limita $f'(a) = \pm\infty$, tak dotyčnica je rovnobežná s y-ovou osou.

Poznámka 1. Používa sa tiež označenie: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ a $\Delta x = x + h - x = h$. Definíciu limity potom môžeme zapísať ako

$$f'(x) \;\equiv\; \frac{df(x)}{dx} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \tag{69}$$

Označenie derivácie ako $f'(x)$ pochádza od Newtona, kým označenie $\frac{df(x)}{dx}$ zaviedol Leibniz.

Poznámka 2. Samotná funkcia $f'(x)$ resp. $\frac{df(x)}{dx}$ môže mať tiež deriváciu, ktorú značíme buď ako $f''(x)$ (v Newtonovom značení), alebo ako $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (v Lebnizovom označení); hovoríme, že funkcia $f(x)$ má druhú deriváciu. Analogicky sa definujú aj vyššie derivácie: n-ta derivácia sa značí ako $f^{(n)}(x)$ alebo $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$. Obe značenia sú úplne rovnocenné a v odbornej litetúre sa bežne používajú.

Príklady na výpočet derivácií. Vypočítame postupne derivácie funkcií x^n, x^{-n}, e^x, $\sin x$ a $\cos x$:

1. Pri vypočte derivácie $(x^n)'$ využijeme binomickú formulu $(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}h^k$

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(n\,x^{n-1} + h\,\frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2} + \dots \right) = n\,x^{n-1}.$$

V poslednom kroku sme využili to, že $\lim_{h\to 0} h^m = 0$ pre $m = 1, 2, ..., m$.

2. Deriváciu $(x^{-n})'$ vypočítame obdobne

$$(x^{-n})' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} \frac{x^n - (x+h)^n}{h}$$

$$= \frac{1}{x^{2n}} \lim_{h\to 0} \left(-n\, x^{n-1} \; - \; h\, \frac{n(n-1)}{2}\, x^{n-2} \; + \; \dots \right) \; = \; -n\, x^{-n-1} \, .$$

Tu sme využili to, že limita prvého zlomku v druhom riadku je rovná $1/x^{2n}$, kým druhý zlomok sme upravili podobne ako v príklade 1.

3. Pri výpočte $(\mathrm{e}^x)'$ využijeme rozvoj (27) funkcie $\mathrm{e}^h \; = \; 1+h+\frac{1}{2!}h^2+\dots$, z ktorého plynie $\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^h - 1\right) \; = \; 1 \, + \, \frac{1}{2}\, h \, + \, \dots$. Teraz už ľahko dostaneme

$$(\mathrm{e}^x)' \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x \right)$$

$$= \; \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\mathrm{e}^h - 1 \right) \; = \; \mathrm{e}^x \, .$$

4. Pri výpočte $(\sin x)'$ využijeme limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \; = \; 1 \, , \quad \text{a} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} \; = \; 0 \, .$$

Bude

$$(\sin x)' \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\sin(x+h) - \sin x \right]$$

$$= \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h) \right] \; = \; \cos x \, .$$

5. Podobne sa ukáže, že

$$(\cos x)' \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\cos(x+h) - \cos x \right]$$

$$= \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[-\cos x (1 - \cos h) - \sin x (1 - \sin h) \right] \; = \; -\sin x \, .$$

Základné pravidlá pre výpočet derivácií

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie, ktoré v uvažovanom bode majú derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Platia nasledujúce pravidlá:

1. Derivácie súčtu a súčinu

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \tag{70}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{71}$$

Derivácia podielu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0\,. \tag{72}$$

Príklad. Odvodíme vzorce pre $(\operatorname{tg} x)'$ a $(\operatorname{cotg} x)'$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \\
(\operatorname{cotg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

2. Derivácia zloženej funkcie

Uvažujme funkciu $y = g(x)$ definovanú pre $x \in D_g$, a funkciu $z = f(y)$ definovanú pre $y \in D_f \supset R_g$ (definičný obor funkcie f obsahuje obor hodnôt funkcie g). Potom má zmysel uvažovať zloženú funkciu:

$$z = f(g(x)), \quad x \in D_g. \tag{73}$$

Ak existuje derivácia $g'(x)$ pre $x \in D_g$ a derivácia $f'(y)$ v bode $y = g(x)$, tak existuje aj derivácia zloženej funkcie

$$(f(g(x)))' = (f'(y))_{y=g(x)}\, g'(x). \tag{74}$$

Symbol $(f(y))'_{y=g(x)}$ znamená, že vypočítame $f'(y)$ a vo výsledku položíme $y = g(x)$.

Príklad. Formulu pre deriváciu podielu môžeme odvodiť zo vzorca pre súčin takto:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x).\frac{1}{g(x)} + f(x).\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Tento výraz sa už ale rovná formule pre deriváciu podielu. V poslednom kroku sme použili vzorec pre deriváciu zloženej funkcie:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\left(\frac{1}{y^2}\right)_{y=g(x)} g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

3. Derivácia inverznej funkcie

Nech existuje funkcia $g(x)$ inverzná funkcia k $f(x)$ pre $x \in D_f$. Potom platí

$$f(g(x)) \;=\; x \text{ pre } x \in D_f .$$

Deriváciou tohto vzťahu dostaneme

$$(f'(y))_{y=g(x)}\, g'(x) \;=\; 1\,, \text{ lebo derivácia } (x) \;=\; 1\,.$$

Z tejto rovnice pre *deriváciu inverznej funkcie* dostávame vzťah

$$g'(x) \;=\; \left(\frac{1}{f'(y)}\right)_{y=g(x)} . \tag{75}$$

Príklad 1. Pre funkciu $f(x) \;=\; \mathrm{e}^x$ platí $f'(x) \;=\; \mathrm{e}^x$. Zo vzorca pre deriváciu inverznej funkcie $\ln x$ potom dostaneme

$$(\ln x)' \;=\; \left(\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)_{y=\ln x} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} \;=\; \frac{1}{x}\,.$$

Príklad 2. Podobne pre funkciu $f(x) \;=\; \sin x$ máme

$$f'(x) \;=\; \cos x \;=\; \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Zo vzorca pre deriváciu inverznej funkcie $\arcsin x$ potom dostaneme

$$(\arcsin x)' \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\right)_{y=\arcsin x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Príklad 3. Napokon pre funkciu $f(x) \;=\; \operatorname{tg} x$ máme

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \;=\; 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Pre deriváciu inverznej funkcie $\operatorname{arctg} x$ potom dostaneme

$$(\operatorname{arctg} x)' \;=\; \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}\right)_{y=\operatorname{arctg} x} \;=\; \frac{1}{1+(\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x)^2} \;=\; \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Tabuľka derivácií elementárnych funkcií

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0	x^n	nx^{n-1}
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	x^a	nx^{a-1}
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Kapitola 5

Využitie derivácií

L'Hospitalovo pravidlo

Veta: Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie spojité v okolí bodu $x = a$ také, že

(1) existujú limity $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, **alebo**

existujú nevlastné limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$, a

(2) ďalej existuje limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom existuje aj limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{76}$$

Dôkaz naznačíme za predpokladu, že $f(a) = g(a) = 0$, a že existujú derivácie

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(a+h) - f(a)] \,,$$

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[g(a+h) - g(a)] \neq 0.$$

Potom skutočne,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)]}{\frac{1}{h}[g(a+h)-g(a)]} \;=\; \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Poznámka. Ak by bolo $f'(a) = g'(a) = 0$, tak môžeme znova použiť l'Hospitalovo pravidlo na funkcie $f'(x)$ a $g'(x)$, za predpokladu, že existuje limita

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},\ \text{atď.}$$

Pri k-násobnom použití l'Hospitalovho pravidla *musia byť splnené* predpoklady $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(k-1)}(a) = 0$ a existuje derivácia $f^{(k)}(a)$ a spolu s deriváciou $g^{(k)}(a) \neq 0$.

Príklady 1.

a.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} \;=\; 1\ .$$

b.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^p-a^p}{x^q-a^q} \;=\; \lim_{x\to a}\frac{(x^p-a^p)'}{(x^q-a^q)'} \;=\; \lim_{x\to a}\frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} \;=\; \frac{p}{q}a^{p-q}\ .$$

c.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} \;=\; \frac{1}{6}\ .$$

d.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \;=\; \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - x^{-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = \frac{1}{2} .$$

Príklady 2.

a.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\mathrm{e}^x} = 0 .$$

b.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\sin x} = 0 .$$

c. Dokážte, že

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

Miesto tejto limity uvažujme

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1}}{1} = 1 .$$

Hľadaný vzťah okamžite vyplýva z rovnice $\ln \mathrm{e} = 1$. Poznamenajme, že vyšetrovaná limita po substitúcii $x = 1/t$ prejde na prvú limitu v rovnici (66).

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Veta 1 (*O nadobúdaní hodnôt*): Nech $f(x)$ je funkcia spojitá na intervale $[a, b]$, pričom $f(a) < f(b)$. Pre každé číslo $c \in [f(a), f(b)]$ existuje aspoň jeden bod x_0 z intervalu $[a, b]$, v ktorom platí $f(x_0) = c$ (analogické tvrdenie platí aj v prípade $f(a) > f(b)$).

Dôkaz: Vezmeme stred intervalu $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$; ak $f(a_1) = c$ skončili sme.

1) Ak $f(a_1) < c$ uvažujeme interval $[a_1, b]$, na ktorom $f(a_1) < c < f(b)$ a položíme $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b)$ (pozri Obr. 13a),

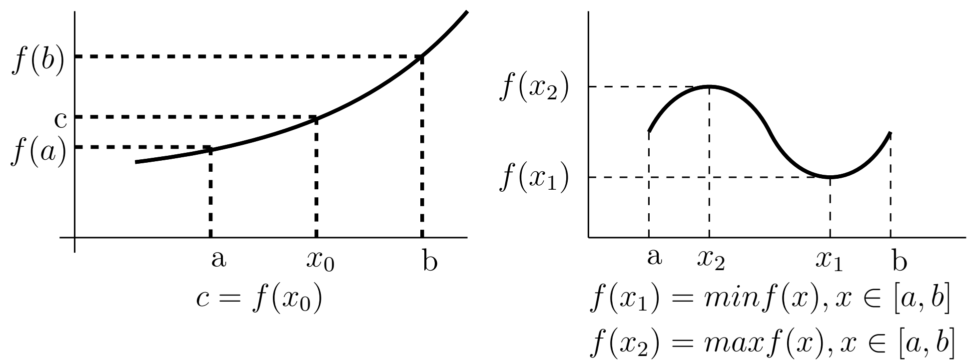
2) Ak $f(a_1) > c$ uvažujeme interval $[a, a_1]$, na ktorom $f(a) < c < f(a_1)$ a položíme $a_2 = \frac{1}{2}(a + a_1)$.

Vrátime sa na začiatok s a_2 miesto a_1 a postup opakujeme. Takto dostaneme konvergentnú postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots\}$: v jej limitnom bode $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ platí $f(x_0) = c$.

Veta 2 (*O maxime a minime*): Ak $f(x)$ je funkcia spojitá na *uzavretom* intervale $[a, b]$, potom existujú body x_1 a x_2 z intervalu $[a, b]$ také, že platí:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \text{ pre všetky } x \in [a, b] \ . \tag{77}$$

Túto vetu dokazovať nebudeme. Veta nám hovorí, že spojitá funkcia na uzavretom intervale nadobúda svoje extrémy (Obr. 13b):



obr. 13a,b

(i) *minimum* $f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, t.j. $f(x_1) \leq f(x)$ pre $x \in [a,b]$,

(ii) *maximum* $f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, t.j. $f(x_2) \geq f(x)$ pre $x \in [a,b]$.

Definícia (*Monotónnosť funkcie*): Funkcia $f(x)$ je rastúca resp. klesajúca na intervale $[a,b]$, ak

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ resp. } f(x_1) > f(x_2) \text{ pre } a \leq x_1 \leq x_2 \leq b. \tag{78}$$

Veta 3: Ak funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $[a,b]$, má pre $x \in (a,b)$ deriváciu $f'(x) > 0$ resp. $f'(x) < 0$, potom $f(x)$ je na intervale $[a,b]$ rastúca resp. klesajúca.

Dôkaz: Nech derivácia funkcie v bode x je *kladná*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = c > 0.$$

Pre dostatočne malé $h > 0$ potom platí

$$\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \frac{1}{2}c > 0.$$

Po vynásobení h dostaneme $f(x) < f(x+h)$; podobne pri $h < 0$ sa dostane $f(x+h) < f(x)$. Teda funkcia je rastúca. V prípade *zápornej* derivácie, analogicky sa ukáže, že je funkcia klesajúca.

Definícia (*Lokálny extrém*): Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 *lokálne maximum* resp. *lokálne minimum*, ak je definovaná v jeho okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a pre $x \neq x_0$ platí

$$f(x) < f(x_0) \text{ resp. } f(x) > f(x_0)\ . \tag{79}$$

Veta 4: Ak funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a má pre $x \neq x_0$ deriváciu, potom má v bode x_0 maximum alebo minimum, vtedy keď $f'(x)$ *mení* v okolí bodu x_0 znamienko podľa nasledujúcej tabuľky:

$$\begin{array}{ccc} f(x_0) \text{ má} & x < x_0 & x > x_0 \\ \text{maximum} & f'(x) > 0 & f'(x) < 0 \\ \text{minimum} & f'(x) < 0 & f'(x) > 0 \end{array} \tag{80}$$

Derivácia bode x_0 nemusí existovať, ak ale existuje, potom $f'(x_0) = 0$. Ak $f'(x)$ *nemení* v okolí bodu x_0 znamienko, extrém neexistuje.

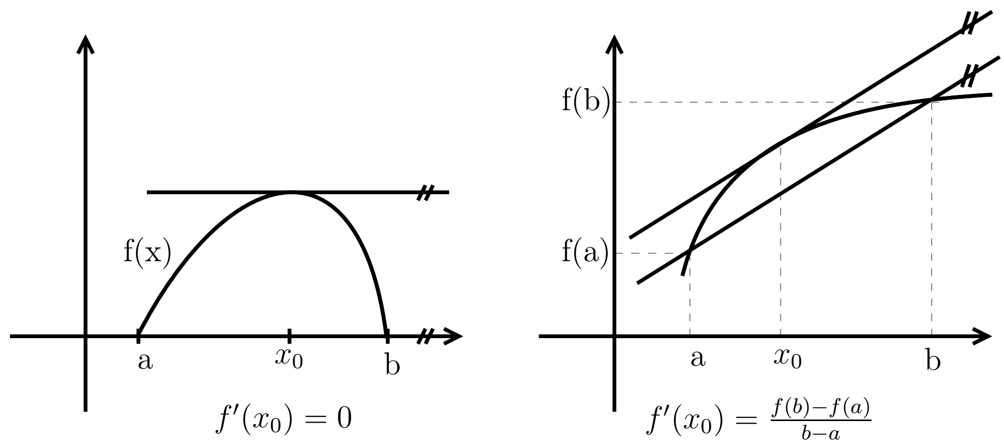
Veta 5 (*Rolleova veta*): Nech $f(x)$ je spojitá na intervale $[a, b]$, pričom $f(a) = f(b) = 0$. Ak $f'(x)$ existuje na otvorenom intervale (a, b), potom existuje bod $x_0 \in (a, b)$, v ktorom $f'(x_0) = 0$.

Dôkaz: Rozlišujeme tri prípady:

1) $f(x) = 0$ pre všetky $x \in (a, b)$, potom x_0 môžeme voliť ľubovoľne.

2) Ak maximum $f(x)$ je kladné, tak sa nadobúda v bode $x_0 \in (a,b)$, v ktorom $f'(x_0) = 0$ (pozri Obr. 14a).

3) Analogicky, záporné minimum $f(x)$ sa nadobúda v bode $x_0 \in (a,b)$, v ktorom $f'(x_0) = 0$.



obr. 14a,b

Veta 6 (*Lagrangeova veta o prírastku funkcie*): Nech $f(x)$ je spojitá na intervale $[a,b]$, pričom $f'(x)$ existuje na otvorenom intervale (a,b). Potom existuje také $x_0 \in (a,b)$, že platí

$$f'(x_0) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \; . \tag{81}$$

Dôkaz: Miesto funkcie $f(x)$ uvažujeme funkciu

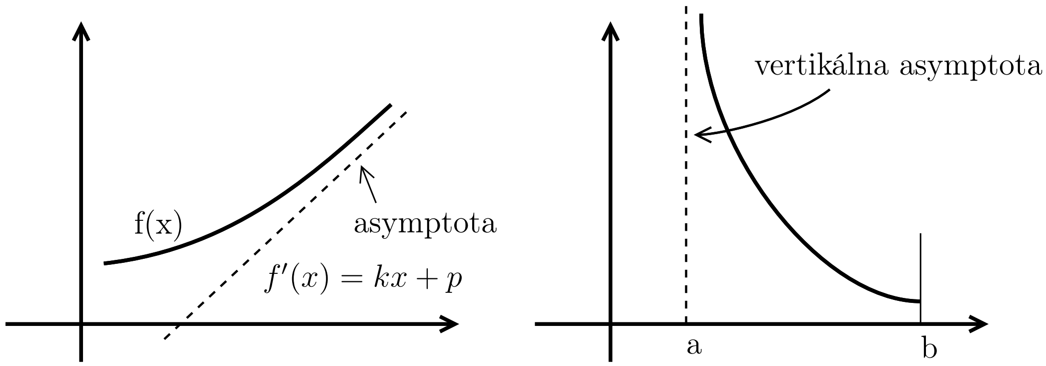
$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; \frac{f(a)}{b-a}(b-x) \;-\; \frac{f(b)}{x-a}(x-a) \; ,$$

ktorá spĺňa predpoklad Rolleovej vety $g(a) = g(b) = 0$. Potom existuje bod

$x_0 \in (a, b)$, v ktorom platí

$$0 \; = \; g'(x_0) \; = \; f'(x_0) \, + \, \frac{f(a)}{b-a} \, - \, \frac{f(b)}{b-a} \; .$$

Odtiaľto hneď dostaneme hľadané vyjadrenie $f'(x_0)$ (pozri Obr. 14b).



obr. 15a,b

Asymptoty.

1) Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na nevlastnom intervale $(a, +\infty)$. Hovoríme, že priamka $y \, = \, k\, x \, + \, p$ zadaná parametrami

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad p = \lim_{x \to +\infty} [f(x) \, - \, kx] \tag{82}$$

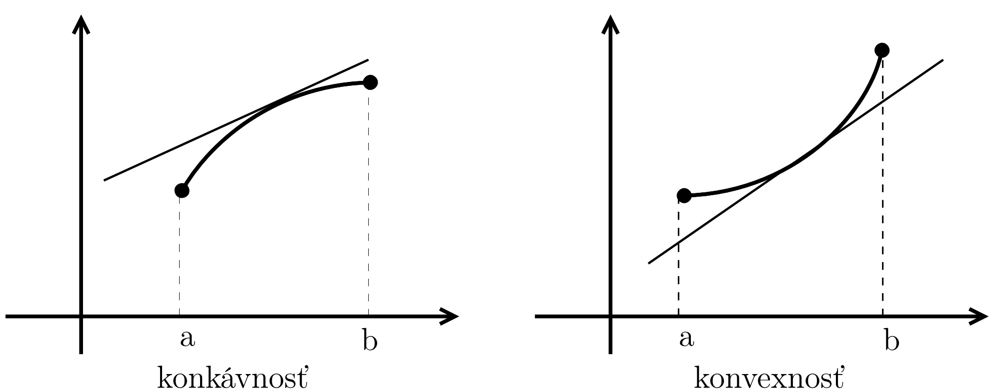
je *asymptota* funkcie $f(x)$ pre $x \to +\infty$. Asymptota v $+\infty$ je priamka, ktorá sa k $f(x)$ neobmedzene približuje pre $x \to +\infty$.

Ak funkcia $f(x)$ je definovaná na nevlastnom intervale $(-\infty, a)$ jej *asymptota* v $-\infty$ sa definuje rovnako, len všade $\lim_{x \to +\infty}$ nahradíme $\lim_{x \to -\infty}$.

2) Hovoríme, že funkcia $f(x)$ definovaná na vlastnom intervale (a, b) má *vertikálnu asymptotu* v bode $x = a$, ak pri približovaní sa x k bodu a sprava funkcia $f(x)$ buď neobmedzene rastie alebo klesá. Analogicky sa definuje vertikálna asymptota v pravom krajnom bode $x = b$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie.

Spojitá funkcia $f(x)$ je na intervale (a, b) *konkávna* resp. *konvexná*, ak na (a, b) má spojitú deriváciu, pričom v každom bode $x_0 \in (a, b)$ jej graf je *pod* resp. *nad* jej dotyčnicou $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v bode x_0 (pozri Obr. 16a a 16b).



obr. 16a,b

Veta 7: Ak $f''(x) > 0$ resp. $f''(x) < 0$ pre $x \in (a, b)$, potom $f(x)$ je na intervale (a, b) konvexná resp. konkávna.

Poznámka: Bod $x_0 \in (a,b)$ odpovedá maximu resp. minimu ak

$$f'(x_0) = 0 \text{ a } f''(x_0) < 0 \text{ resp. } f''(x_0) > 0 \ . \tag{83}$$

Bod $x_0 \in (a,b)$ je *inflexný* bod, ak $f''(x) = 0$ a $f''(x)$ *mení* v bode x_0 znamienko.

Zostrojenie grafu funkcie $y = f(x)$.

1. Určíme obor definície.

2. Zistíme, či je funkcia párna alebo nepárna.

3. Preskúmame limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru.

4. Najdeme body nespojitosti a prípadne určíme hodnoty funkcie vo vybratých bodoch.

5. Najdeme intervaly, v ktorých funkcia rastie alebo klesá, určíme maximá a minimá.

6. Určíme asymptoty.

7. Najdeme intervaly, v ktorých funkcia je konvexná alebo konkávna, určíme inflexné body a v každom z nich smer dotyčnice.

***Taylorov rozvoj**.

Najprv prepíšeme Lagrangeovu vetu o prírastku funkcie do tvaru vhodnejšieho v ďalšom.

Nech teda $f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $[a, a+h]$ pre $h > 0$ resp.

$[a+h, a]$ pre $h < 0$, ktorá na príslušnom otvorenom intervale má spojitú deriváciu. Lagrangeovu vetu o prírastku funkcie môžeme prepísať takto:

$$f(a+h) \ = \ f(a) \ + \ h.f'(a+\theta h), \ 0 < \theta < 1 . \tag{84}$$

Prírastok funkcie $f(x)$ medzi bodmi $x = a$ a $x = a+h$ je na pravej strane reprezentovaný priamkou vychádzajúou z bodu $f(a)$ so "správnym" sklonom $f'(x_0)$ vyjadreným pomocou derivácie v bode $x_0 = a+\theta h$: vybratý je práve tak, aby sme sa "trafili" do hodnoty $f(a+h)$.

V prípade, že funkcia má n-tú deriváciu, Taylor zovšeobecnil vetu o prírastku funkcie pomocou jej aproximácie polynómami n-tého stupňa.

Veta 8 (*Taylorova veta o prírastku funkcie*): Nech $f(x)$ je spojitá na intervale $[a, a+h]$ pre $h > 0$ resp. $[a+h, a]$ pre $h < 0$, ktorá na príslušnom otvorenom intervale má spojité všetky derivácie až do n-tého rádu. Potom

$$\begin{aligned} f(a+h) \ &= \ f(a) \ + \ \frac{h}{1!} f'(a) \ + \ \frac{h^2}{2!} f''(a) \ + \ \ldots \\ &+ \ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \ + \ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h), \ 0 < \theta < 1 . \end{aligned} \tag{85}$$

.

Poznámka. Na faktoriály vo vzorci pre Taylorovom rozvoj nesmieme zabudnúť! Ilustrujme si to na príklade jednoduchej funkcie $f(a) = a^2$, pre ktorú máme:

$$f(a+h) \ = \ (a+h)^2 \ = \ a^2 \ + \ 2\,a\,h \ + \ h^2 \ .$$

Ak do posledného výrazu dosadíme hodnotu funkcie a jej derivácií v bode a,

$$f(a) \;=\; a^2\,,\;\; f'(a) \;=\; 2a\,,\;\; f''(a) \;=\; 2$$

obdržíme príslušnú Taylorovu formulu (85) aj s faktoriálmi:

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+\; \frac{h}{1!}\, f'(a) \;+\; \frac{h^2}{2!}\, f''(a)\,.$$

Mocninný rad.

Uvažujme funkciu $f(x)$ zadanú v tvare mocninného radu

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \;=\; a_0 \;+\; a_1\, x \;+\; a_2\, x^2 \;\ldots\; +\; a_n\, x^n \;+\; \ldots \tag{86}$$

pre ktorý existuje kladná limita

$$R \;=\; \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \;>\; 0\;. \tag{87}$$

Pre $|x| \;<\; R$ rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ absolútne konverguje. Kladné číslo R sa nazýva *polomer konvergencie*, ak $R \;=\; \infty$, mocninný rad konverguje pre všetky hodnoty x. Polomer konvergencie možno vypočítať aj pomocou vzorca:

$$R^{-1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \;\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{88}$$

Mocninný rad možno derivovať člen po člene. Pod tým sa myslí to, že derivácia mocninného radu je daná formulou

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \;=\; a_1 \;+\; 2\, a_2\, x \;+\; 3\, a_3\, x^2 \;+\; \ldots \tag{89}$$

Podstatné tu je to, že polomer konvergencie derivovaného radu je opäť R. Toto plynie z toho, že

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\,.\,\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \;=\; R.$$

Opakovaním tohto postupu získame ľubovoľnú deriváciu funkcie zadanej v tvare mocniného radu:

(i) *Funkcia $f(x)$ zadanú v tvare mocninného radu má pre $|x| < R$ (R je polomer konvergencie) všetky derivácie*;

(ii) *$f^{(k)}(x)$ sa získa k-násobným derivovaním mocninného radu člen po člene.*

Funkciu zadanú v tvare mocninného radu možno rozvinúť pre $|x| < R$ do *Taylorovho radu* v bode $x = 0$:

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0)\,x^n\,, \quad \text{kde } a_n \;=\; \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0)\,. \tag{90}$$

Podobne, Taylorov rozvoj v okolí bodu $x = a$ má tvar

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(x-a)^n\,, \text{ kde } a_n \;=\; \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,. \tag{91}$$

Tento rad konverguje pre všetky x spĺňajúce nerovnosť $|x - a| < R$.

Príklady

1. Taylorov rozvoj funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$. Pre túto funkciu platí $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. V bode $x = 0$ potom máme $f^{(n)}(0) = (\mathrm{e}^x)_{x=0} = \mathrm{e}^0 = 1$. Taylorov rozvoj e^x v bode $x = 0$ bude

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \text{ t.j. } a_n = \frac{1}{n!}.$$

Tento rad konverguje pre všetky x lebo pre jeho polomer kovergencie platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

2. Taylorov rozvoj funkcií $\sin x$ a $\cos x$. Platí $(\sin x)' = \cos$ a $(\cos x)' = -\sin x$. Preto

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x\,, \ (\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x\,,$$

$$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x\,, \ (\cos x)^{(2n+1)} = -(-1)^n \sin x\,.$$

Pretože, $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$, tak bude

$$(\sin x)^{(2n)}_{x=0} = 0\,, \ (\cos x)^{(2n)}_{x=0} = (-1)^n$$

$$(\sin x)^{(2n+1)}_{x=0} = (-1)^n\,, \ (\cos x)^{(2n+1)}_{x=0} = 0\,.$$

Pre všetky x dostávame nasledujúce Taylorove rozvoje

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,.$$

Poznámka: Dokážeme Moivreov vzorec

$$\cos x \, + \, i \sin x \, = \, \mathrm{e}^{ix} \, . \tag{92}$$

Ak do ľavej strany dosadíme rozvoje $\sin x$ a $\cos x$ tak dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, x^{2n} \, + \, i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, x^{2n+1} \, = \, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, (ix)^n \, = \, \mathrm{e}^{ix}.$$

3. Nasledujúce Taylorove rozvoje konvergujú pre $|x| \, < \, 1$:

$$(1 \pm x)^a \, = \, 1 \, \pm \, a \, x \, + \, \frac{a(a-1)}{2!} \, x^2 \, \pm \, \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} \, x^3 \, + \, \dots \, ,$$

$$\ln(1+x) \, = \, x \, - \, \frac{x^2}{2} \, + \, \frac{x^3}{3} \, - \, \frac{x^4}{4} \, + \, \dots \, ,$$

$$\arcsin x \, = \, x \, + \, \frac{1}{2} \, \frac{x^3}{3} \, + \, + \, \frac{1.3}{2.4} \, \frac{x^5}{5} \, + \, \frac{1.3.5}{2.4.6} \, \frac{x^7}{7} \, + \, \dots \, .$$

Kapitola 6

Integrovanie a jeho aplikácie

Neurčitý integrál a primitívna funkcia

Definícia: Primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ s definičným oborom D_f je funkcia $F(x)$, pre ktorú platí:

$$F'(x) \;=\; f(x) \quad \text{pre všetky } x \in D_f \;. \tag{93}$$

Poznámka 1: Definičný obor D_F primitívnej funkcie môže byť aj väčší ako D_f. Napríklad, ak ohraničená funkcia $f(x)$ je v intervale (a, b) spojitá, až na konečný počet bodov $x_1, x_2, ..., x_k$ (v ktorých ani nemusí byť definovaná), jej primitívna funkcia $F(x)$ bude definovaná a spojitá na celom intervale (a, b) (ak ale $f(x)$ nie je ohraničená, tak $F(x)$ nemusí byť definovaná vo všetkých bodoch $x_1, x_2, ..., x_k$).

Príklady

(i) Znamienková funkcia

$$f(x) = \varepsilon(x) \text{ rovná } -1,\, 0,\, +1 \text{ po rade pre } x < 0,\, x = 0,\, x > 0$$

je ohraničená a nespojitá v bode $x = 0$, ale $F(x) = |x|$ je definovaná a spojitá v bode $x = 0$.

(ii) Podobne, funkcia $f(x) = x^{-2/3}$ je neohraničená a nespojitá v bode $x = 0$, ale $F(x) = 3x^{1/3}$ je definovaná a spojitá v bode $x = 0$.

(iii) Funkcia $f(x) = x^{-2}$ je neohraničená a nespojitá v bode $x = 0$, rovnako aj $F(x) = -x^{-1}$ je neohraničená a nespojitá v $x = 0$.

Poznámka 2: Primitívna funkcia $F(x)$ k funkcii $f(x)$ nie je určená jednoznačne. Každá funkcia $F(x) + C$ líšiaca sa od $F(x)$ o aditívnu konštantu C je tiež primitívna k funkcii $f(x)$ (lebo derivácia konštanty je nula): $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Definícia: Všeobecná primitívna funkcia $F(x) + C$ k danej funkcii $f(x)$ sa nazýva *neurčitým inegrálom* a označuje sa ako

$$\int dx\, f(x) = F(x) + C\ . \tag{94}$$

Symbol $\int dx$ sa nazýva neurčitým integrálom v premennej x (lebo konštanta C nie je určená), funkcia $f(x)$ vystupujúca v integráli sa nazýva integrandom (niekedy sa používa zápis $\int f(x)\, dx$ s dx na konci).

Základné neurčité integrály dostaneme obrátením tabuľky derivácií elementárnych funkcií (v tabuľkách sa nezvykne explicitne uvádzať neurčitá konštanta C).

Tabuľka základných neurčitých integrálov

$$\int dx\, x^n \;=\; \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \qquad\qquad \int dx\, \tfrac{1}{x} \;=\; \ln|x|$$
$$\int dx\, x^a \;=\; \tfrac{x^{a+1}}{a+1},\; a \neq -1 \qquad\qquad \int dx\, \mathrm{e}^x \;=\; \mathrm{e}^x$$
$$\int dx\, \sin x \;=\; -\cos x \qquad\qquad \int dx\, \cos x \;=\; \sin x$$
$$\int dx\, \tfrac{1}{1+x^2} \;=\; \mathrm{arctg}\, x \qquad\qquad \int dx\, \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x$$
$$\int dx\, \tfrac{1}{\sin^2 x} \;=\; -\mathrm{cotg}\, x \qquad\qquad \int dx\, \tfrac{1}{\cos^2 x} \;=\; \mathrm{tg}\, x$$
$$\int dx\, \mathrm{tg}\, x \;=\; -\ln|\cos x| \qquad\qquad \int dx\, \mathrm{cotg}\, x \;=\; \ln|\sin x|$$

Ďalej uvedieme niektoré zovšeobecnenia (o ich správnosti dá sa presvedčiť jednoduchým derivovaním):

$$\int dx\, \frac{1}{a^2+x^2} \;=\; \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\, \frac{x}{a}$$
$$\int dx\, \frac{1}{x^2-a^2} \;=\; \frac{1}{2a}\ln \frac{a+x}{a-x} \quad \text{pre } |x| < a$$
$$\int dx\, \frac{1}{a^2-x^2} \;=\; \frac{1}{2a}\ln \frac{x-a}{x+a} \quad \text{pre } |x| > a$$
$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \;=\; \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{pre } |x| < a$$
$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \;=\; \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \quad \text{pre } |x| > a$$
$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \;=\; \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \quad \text{pre všetky } x\,.$$

Základné pravidlá výpočtu neurčitých integrálov

1. *Multiplikatívnu konštantu* možno vyňať pred integrál:

$$\int dx\, a\, f(x) \;=\; a \int dx\, f(x)\ . \tag{95}$$

2. *Integrál súčtu funkcií* sa rovná súčtu príslušných integrálov:

$$\int dx\ (f(x)\,+\,g(x)) \;=\; \int dx\, f(x)\;+\;\int dx\, g(x)\ . \tag{96}$$

Niektoré integrály možno redukovať na výpočet jednoduchších (základných) integrálov integračnou *metódou substitúcie* a integračnou *metódou per-partes*.

3. *Substitučná metóda*:

$$\int dt\, \phi'(t)\, f(\phi(t)) \;=\; \left(\int dx\, f(x)\right)_{x=\phi(t)}\ . \tag{97}$$

Na pravej strane najprv vypočítame integrál $\int dx\, f(x)$ a do výsledku za x dosadíme $\phi(t)$.

4. *Metóda per-partes*:

$$\int dx\, f(x)\, g'(x) \;=\; f(x)\, g(x) \;-\; \int dx\, f'(x) g(x)\ . \tag{98}$$

Tu $f'(x)$ označuje deriváciu funkcie $f(x)$ a podobne $g'(x)$ je derivácia $g(x)$.

Komentár k pravidlám integrovania. Pretože neurčitý integrál (primitívna funkcia) je "opakom" derivovania, tieto pravidlá plynú priamo z pravidiel pre derivovanie:

Pravidlo 1: Ak $F(x)$ bude primitívna funkcia k $f(x)$, pravidlo 1. je ekvivaletné nasledujúcemu pravidlu pre derivovanie

$$(a\,F(x))' \;=\; a\,F'(x)\;.$$

Pravidlo 2: Ak $F(x)$ a $G(x)$ označujú primitívne funkcie k $f(x)$ a $g(x)$, pravidlo 2. je ekvivaletné derivovaniu súčtu funkcií

$$(F(x)\;+\;G(x))' \;=\; F'(x)\;+\;G'(x)\;.$$

Pravidlo 3. Pravidlo sa získa integráciou pravidla pre deriváciu zloženej funkcie:

$$\begin{aligned}\int dt\,\phi'(t)\,f(\phi(t)) \;&=\; \int dt\,\frac{\mathrm{d}F(\phi(t))}{\mathrm{d}t} \;=\; F(\phi(t))\\ &=\; F(x)_{x=\phi(t)} \;=\; \left(\int dx\,f(x)\right)_{x=\phi(t)}\;.\end{aligned}$$

Pravidlo 4. Integráciou pravidla pre deriváciu súčinu funkcií

$$(f(x)\,g(x))' \;=\; f'(x)\,g(x)\;+\;f(x)\,g'(x)$$

dostaneme rovnicu

$$f(x)\,g(x) \;=\; \int dx\,f'(x)\,g(x)\;+\;\int dx\,f(x)\,g'(x)$$

ktorá je ekvivalentná pravidlu 4.

Poznámka: Často býva potrebné použiť tieto pravidlá aj viackrát za sebou. Existujú návody, ako postupovať pri integrování určitých tried elementárnych funkcií:

(i) Integrovanie racionálnych funkcií,

(ii) Integrand obsahuje odmocniny,

(iii) Integrand obsahuje goniometrické funkcie.

Takýmito návodmi sa ale nebudeme bližšie zaoberať. Jednoznačné pravidlo na výpočet integrálov neexistuje, je potrebný cvik a skúsenosť.

Integrály elementárnych funkcií nie sú vždy elementárne funkcie. Ak nastane takýto prípad, alebo je integrovanie príliš zložité, integrand môžme brať v tvare Taylorovho radu (alebo iného vhodného rozvoja), ktorý za určitých podmienok možno integrovať člen po člene. Výsledok je potom daný v tvare mocninného rozvoja (prípadne rozvoja v iných funkciách).

Zvyknú sa tiež uvádzať rozsiahle tabuľky neurčitých integrálov, kde spravidla možno najsť hľadaný integrál, pokiaľ sa dá vyjadriť pomocou elementárnych alebo iných špeciálnych funkcií.

Určitý integrál

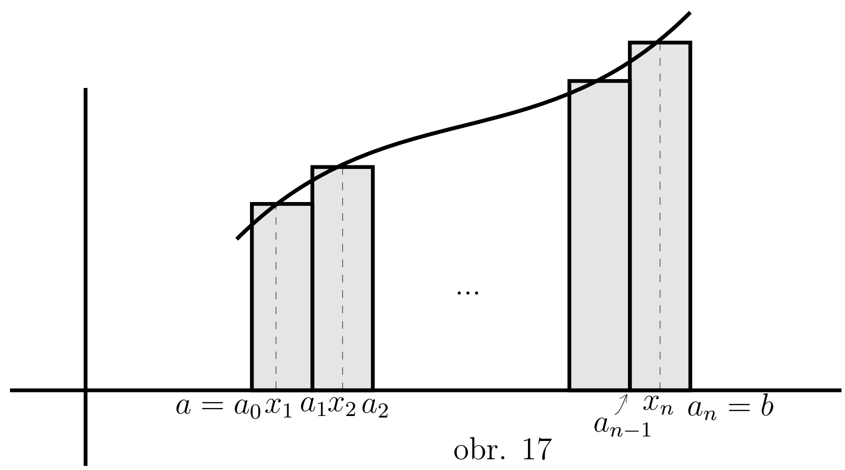
Budeme sa zaujímať o plochu medzi funkciou $f(x)$ spojitou na vlastnom intervale $[a, b]$ a x-vou osou (pozri Obr. 17). Túto plochu možno odhadnúť takto:

(i) Interval $[a, b]$ rozdelíme na N podintervalov $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ... ,$[a_{N-1}, a_N]$ dĺžky $\Delta x = \frac{1}{N}(b - a)$, s krajnými bodmi $a_0 = a$, ... ,$a_n = a + n\Delta x$, ... ,$a_N = b$. Potom, v každom z intervalov (a_{n-1}, a_n) vyberieme bod x_n, $n = 1, 2, ..., N$.

(ii) Hľadaná plocha je približne daná ako *Riemannov integrálny súčet*

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta x\, f(x_n)\,,\ \ \Delta x \;=\; \frac{1}{N}(b-a)\ . \tag{99}$$

Pritom plocha nad x-vou osou sa berie kladne resp. záporne, podľa znamienka $f(x_n)$.



obr. 17

Definícia: Určitý integrál $\int_a^b dx\, f(x)$ je definovaný ako limita integrálnych súčtov

$$\int_a^b dx\, f(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Delta x\, f(x_n)\,. \tag{100}$$

Symbol $\int_a^b dx$ sa nazýva určitým integrálom cez dx v medziach a, b ("na intervale $[a,b]$" alebo "od a do b"), funkcia $f(x)$ sa nazýva integrandom.

Komentár k definícii.

1. Možno ukázať, že za predpokladu o spojitosti integranda $f(x)$ na intervale $[a, b]$ limita integrálnych súčtov nezávisí od výberu bodov $x_n \in (a_{n-1}, a_n)$.

2. Ďalej možno dokázať, že ak c je daný bod z intervalu (a, b) a integrand je *ohraničený a spojitý* na intervaloch (a, c) a (c, b), tak určitý integrál na intervale $[a, b]$ existuje a je daný ako súčet integrálov cez $[a, c]$ a $[c, b]$:

$$\int_a^b dx\, f(x) \;=\; \int_a^c dx\, f(x) \;+\; \int_c^b dx\, f(x)\,. \tag{101}$$

Integrál pritom nezávisí od hodnoty integrandu v bode c (funkcia $f(x)$ v bode $x = c$ ani nemusí byť definovaná).

Poznámka 1: Z tohoto je vidieť, že určitý integrál na intervale (a, b) existuje pre ohraničený po častiach spojitý integrand. To je funkcia $f(x)$ spojitá a ohraničená v intervale (a, b) až na konečný počet bodov c_1, c_2, ... , c_k.

Poznámka 2: Ak ohraničený integrand $f(x)$ zmeníme v konečnom počte bodov, hodnota integrálu sa nezmení. Špeciálne, integrál nezávisí od hodnôt integranda $f(c_1)$, $f(c_2)$, ... , $f(c_k)$ v bodoch nespojitosti.

Newtonova formula

Uvažujme integrálny súčet

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta x\, f(x_n)\,,\ x_n \in (a_{n-1}, a_n) \tag{102}$$

Nech $F(x)$ je primitívna funkcia k integrandu $f(x)$. Podľa vety o prírastku funkcie v každom z intervalov (a_{n-1}, a_n) existuje taký bod x_n, že platí

$$F'(x_n) \;=\; \frac{F(a_n) \;-\; F(a_{n-1})}{a_n \;-\; a_{n-1}}\,. \tag{103}$$

Práve tieto hodnoty $f(x_n) = F'(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, dosaďme do integrálneho súčtu. Ak uvážime to, že $\Delta x = a_n - a_{n-1}$, tak príslušný integrálny súčet môžme prepísať takto:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) \frac{F(a_n) - F(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} \;&=\; \sum_{n=1}^{N} [F(a_n) \;-\; F(a_{n-1})] \\
&= \; [F(a_1) - F(a_0)] \,+\, [F(a_2) - F(a_1)] \ldots \\
&+ [F(a_{n-1}) - F(a_{n-2})] \,+\, [F(a_n) - F(a_{n-1})] \\
&= \; F(a_N) \;-\; F(a_0) \;=\; F(b) \;-\; F(a)\;.
\end{aligned}$$

Vidíme, že platí veľmi dôležitá **Newtonova formula**:

$$\int_a^b dx\, f(x) \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;\equiv\; [F(x)]_a^b. \tag{104}$$

Tu je zavedené bežne používané označenie $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (tiež sa používa značenie $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$).

Newtonova formula je fundamentálny vzťah, ktorý vyjadruje určitý integrál na intervale (a, b) z integrandu $f(x)$ ako rozdiel hodnôt príslušnej primitívnej funkcie v koncových bodoch oboru integrovania. Samozrejme, určitý integrál nezávisí od aditívnej konštanty vystupujúcej v $F(x) + C$.

Základné pravidlá výpočtu určitých integrálov

Prvé dve pravidlá plynú z Newtonovej integračnej formuly, ďaľšie vyplývajú priamo z pravidiel výpočtu neurčitých integrálov.

0. *Výmena integračných hraníc a rozdelenie integračného intervalu*:

$$\int_a^b dx\, f(x) \;=\; -\int_b^a dx\, f(x)\ . \tag{105}$$

$$\int_a^b dx\, f(x) \;=\; \int_a^c dx\, f(x) \;+\; \int_c^b dx\, f(x)\ . \tag{106}$$

1. *Multiplikatívnu konštantu* možno vyňať pred integrál:

$$\int_a^b dx\, c\, f(x) \;=\; c\int_a^b dx\, f(x)\ . \tag{107}$$

Integrál súčtu funkcií sa rovná súčtu príslušných integrálov:

$$\int_a^b dx\, \left(f(x) \,+\, g(x)\right) \;=\; \int_a^b dx\, f(x) \;+\; \int_a^b dx\, g(x)\ . \tag{108}$$

2. *Substitučná metóda*:

$$\int_\alpha^\beta dt\, \phi'(t)\, f(\phi(t)) \;=\; \left(\int_a^b dx\, f(x)\right)_{x=\phi(t)} \;=\; F(b) \,-\, F(a)\,. \tag{109}$$

Vzorec platí ak $\phi(t)$ na intervale $[a, b]$ je monotónna: na pravej strane najprv vypočítame integrál $\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$ a do výsledku dosadíme

- $a = \phi(\alpha)$ a $b = \phi(\beta)$ ak $\phi(t)$ je rastúca, resp.
- $a = \phi(\beta)$ a $b = \phi(\alpha)$ ak $\phi(t)$ je klesajúca.

3. *Metóda per-partes*:

$$\int_a^b dx\, f(x)\, g'(x) \;=\; [f(x)\, g(x)]_a^b \;-\; \int_a^b dx\, f'(x) g(x)\;. \tag{110}$$

Príklady

1. Integrál $\int_{-1}^{+1} dx\, x^2$ počítame priamo:

$$\int_{-1}^{+1} dx\, x^2 \;=\; \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} \;=\; \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \;=\; \frac{2}{3}$$

2. Integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin t\, \cos t$ môžeme vypočítať pomocou substitúcie $x = \sin t$, $dx = (\sin t)' = \cos t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin t\, \cos t \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, (\sin t)' \sin t \;=\; \int_0^1 dx\, x \;=\; \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \;=\; \frac{1}{2}$$

3. Iný spôsob výpočtu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin t\, \cos t$ spočíva vo využití vzorca $\sin(2t) = 2\, \sin t\, \cos t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin t\, \cos t \;=\; \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \sin(2t) \;=\; -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{1}{2}$$

4. Integrál $\int_0^c dx\, x\, \mathrm{e}^x$ počítame metódou per-partes, tak že položíme $f(x) = x$ a $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Ak využijeme to, že $f'(x) = 1$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$,

hneď dostaneme:

$$\int_0^c dx\, x\, \mathrm{e}^x \;=\; [x\, \mathrm{e}^x]_0^c \;-\; \int_0^c dx\, \mathrm{e}^x \;=\; [x\, \mathrm{e}^x]_0^c \;-\; [\mathrm{e}^x]_0^c \;=\; c\, \mathrm{e}^c \;-\; \mathrm{e}^c \;+1$$

Nevlastné integrály

Integrál cez nevlastné intervaly $(c, +\infty)$ resp. $(-\infty, c)$ definujú sa ako limity integrálov cez vlastné intervaly:

$$\int_c^{+\infty} dx\, f(x) \;=\; \lim_{b \to +\infty} \int_c^b dx\, f(x) \tag{111}$$

resp.

$$\int_{-\infty}^c dx\, f(x) \;=\; \lim_{a \to -\infty} \int_a^c dx\, f(x) \tag{112}$$

Integrál cez celú reálnu os $(-\infty, +\infty)$ sa definuje takto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{c} dx\, f(x) \;+\; \int_{c}^{+\infty} dx\, f(x) \tag{113}$$

kde posledné dva integrály boli zavedené vyššie. Hodnota takto definovaného integrálu cez interval $(-\infty, +\infty))$ nezávisí od výberu bodu c.

Príklady

1. Integrál $\int_0^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x}$ počítame priamo:

$$\int_0^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x} \;=\; \lim_{c \to +\infty} \int_0^c dx\, \mathrm{e}^{-x} \;=\; \lim_{c \to +\infty} \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c \;=\; 1$$

2. Integrál $\int_0^{+\infty} dx\, x\, \mathrm{e}^{-x}$ počítame metódou per-partes. Zvolíme $f(x) = x$ a $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$), potom

$$\int_0^{+\infty} dx\, x\, \mathrm{e}^{-x} = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c dx\, x\, \mathrm{e}^{-x} = \lim_{c\to+\infty} \left(\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c - \int_0^c dx\, (-\mathrm{e}^{-x}) \right)$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_0^c dx\, x\, \mathrm{e}^{-x} = \lim_{c\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c = 1$$

3. Integrál $I_n = \int_0^{+\infty} dx\, x^n\, \mathrm{e}^{-x}$ počítame metódou per-partes. Zvolíme $f(x) = x^n$ a $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (kvôli stručnosti nevypisujeme explicitne $\lim_{c\to+\infty}$):

$$I_n = \int_0^{+\infty} dx\, x^n\, \mathrm{e}^{-x} = \left[-x^n\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c - \int_0^{+\infty} dx\, (n\, x^{n-1})(-\mathrm{e}^{-x})$$

$$= n. \int_0^{+\infty} dx\, x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-x} = n.I_{n-1}$$

Dostali sme rekurentný vzťah $I_n = n.I_{n-1}$, pričom $I_0 = 1$ podľa príkladu 2. Toto dáva

$$I_n = \int_0^{+\infty} dx\, x^n\, \mathrm{e}^{-x} = n!\ .$$

Poznámka: Možno ukázať, že integrál $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} dx\, x^{z-1}\, \mathrm{e}^{-x}$ existuje pre ľubovoľné reálne $z > 0$ (jeho definíciu možno rozšíriť aj na komplexné čísla z rôzne od 0 a celých záporných čísiel). Toto definuje Eulerovu gamma funkciu. Nedá sa vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, aj keď pre prirodzené čísla $n = 1, 2, ...$, nadobúda hodnoty $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Výpočty plôch a objemov rotačných telies

Plochy v rovine (x, y) ohraničené funkciami $y = f(x)$

Jedná sa o plochy v rovine ohraničené niekoľkými funkciami. Ako ilustráciu vypočítame plochu elipsy v rovine (x, y) zadanej rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{114}$$

Ak vyjadríme z tejto rovnice premennú y dostaneme dve riešenia (pozri Obr 18):

$$y = f_1(x) = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \; x \in [-a, +a],$$
$$y = f_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \; x \in [-a, +a].$$

Prvé z nich je kladné pre $x \in (-a, +a)$, druhé je symetricky rozložené pod x-ovou osou. Spájajú sa v bodoch $x = +a$ a $x = -a$: $f_1(+a) = f_1(+a) = 0)$ a $f_1(-a) = f_1(-a) = 0$. Plocha elipsy S je plocha uzavretá medzi funkciami $f_1(x)$ a $f_2(x)$.

Zrejme S je dvojnásobok plochy pod funkciou $f_1(x)$, ktorá je rovná integrálu

$$I = \int_{-a}^{+a} dx\, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = ab \int_{-1}^{+1} dt\, \sqrt{1 - t^2}.$$

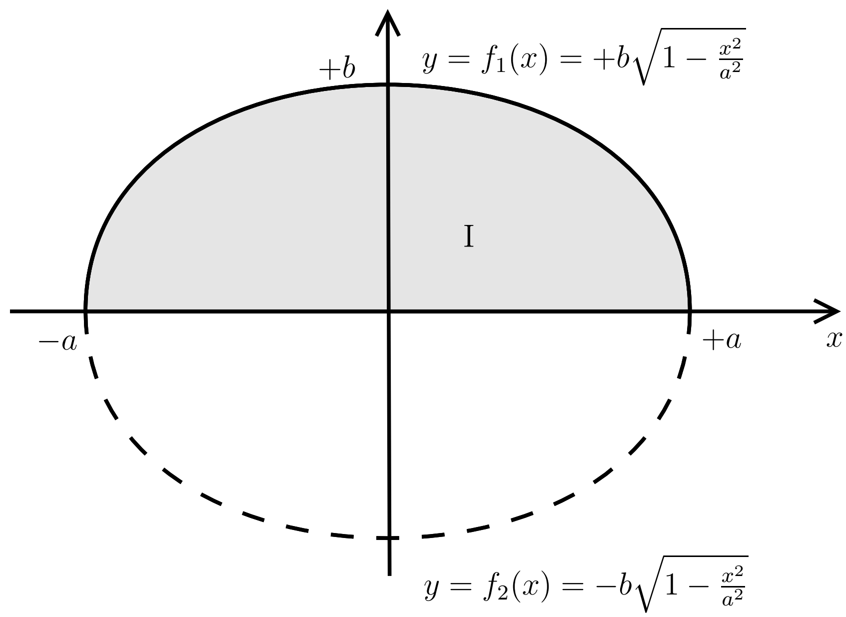
Tu sme urobili substitúciu $t = x/a$. Ďaľšou substitúciou $t = \sin\phi$ dostaneme integrál I v tvare

$$I = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi\, \cos^2\phi$$
$$= \frac{1}{2} ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi\, (1 - \cos 2\phi) = \frac{\pi}{2} ab .$$

Tu sme využili sme to, že

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\phi\, \cos 2\phi = \frac{1}{2} [\sin 2\phi]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0 .$$

Pre plochu elipsy máme vzorec: $S = \pi ab$. V prípade kružnice položíme $a = b = r$ a získame známy vzorec $S = \pi\, r^2$ pre plochu kružnice polomere r.



obr. 18

Objemy rotačných telies

Uvažujme teleso, ktoré sa získa rotáciou spojitej funkcie $y = f(x)$, zadanej na intervale $[a, b]$, okolo x-ovej osi. Každému bodu $x \in [a, b]$ máme takto priradenú kružnicu o ploche $\pi\, f^2(x)$. Takéto rotačné teleso má objem V zadaný integrálom (pozri Obr 19):

$$V \;=\; \pi \int_a^b dx\, f^2(x)\ . \tag{115}$$

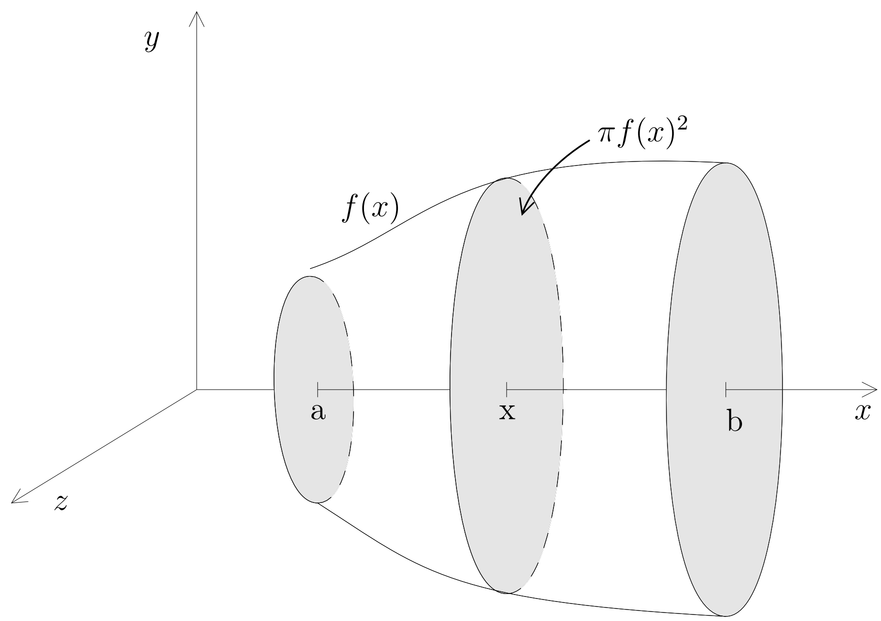
Na ilustráciu vypočítame objem rotačného elipsoidu, ktorý sa dostane rotáciou krivky

$$y \;=\; f(x) \;=\; +b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,,\; x \in [-a,+a]\,,$$

okolo x-ovej osi. Po dosadení do integrálu pre objem V dostaneme:

$$V \;=\; \pi \int_{-a}^{+a} dx\, b^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \;=\; \pi(2ab^2 \;-\; \frac{2}{3}ab^2) \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\, ab^2\,.$$

Integrácia je v tomto prípade jednoduchá. Ak zvolíme $a = b = r$, získame známy vzorec $V = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ pre objem gule o polomere r.



obr. 19