Pokyny k riešeniu príkladov na skúške

1. Doneste si vlastné papiere (a nešetrite pritom) - je vás veľa a my nemáme možnosť poskytnúť vám dostatok papiera.
2. Každý príklad treba odovzdať na osobitnom papieri (papieroch).
3. Každý odovzdaný papier musí byť **čitateľne** podpísaný menom a priezviskom - ani vy sami často neviete, či nie je medzi vami niekto s rovnakým priezviskom.

Nasledujúce požiadavky by mali byť samozrejmé pre kultúrnu úroveň človeka, ktorý sa dostal na vysokú školu. Prax ale ukázala, že to často nie je tak, a preto pripomínam nasledovné požiadavky na Vašu písomnú prácu.
4. Jednotlivé podpríklady a), b), c),... treba zreteľne oddeľovat od seba, aby sa dali ľahko identifikovať.
5. Výpočty musia byť prehľadné a vhodne **komentované**, aby boli zrozumiteľné pre opravujúceho.
6. Nepíšte ale slohovú prácu, kde len slovne opíšete výpočty a pridáte hotový výsledok. Toto nie je písomka zo slovenčiny, ale z matematiky.
7. *Vaša odovzdaná práca musí byť* ***čitateľná***. Nečitateľné papiere (veľa preškrtaného, výpočty umiestnené inde ako výsledky, neoznačené podpríklady, nejasné výpočty bez slovného komentára, .. atď.), v ktorých je ťažké sa vyznať, nebudú opravované. Myslite na to, ze opravujúci si nemôze dovoliť lúštiť polhodinu práve Váš nečitateľný výtvor. Preto mu to uľahčite a neočakávajte, že automaticky uhádne všetky Vaše myšlienkové pochody.
8. *Neodvodené výsledky nebudú brané do úvahy (považujú sa za opísané).* Všetky Vaše výsledky musia byť podložené odvodením. Ked zadanie znie "Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodmi A,B", tak nestačí napísať len výslednú rovnicu s komentárom "našiel som túto rovnicu". Z kontextu zadania musíte vedieť, ktoré vzťahy treba odvodzovať a ktoré nie. Napr. na prednáške bol odvodený vzorec pre obsah rovnobežníka, definovaného dvoma vektormi. Tento vzorec teda nemusíte odvodzovať. Ale ak je úlohou napísať rovnicu priamky p_2, prechádzajúcu bodom C a rovnobežnú s priamkou p_1, tak túto rovnicu musíte v riešení aj odvodiť, nestačí ju len "napísať".

Vzorka príkladov, ktoré sa vyskytli na skúške

[E.Masár, ver. 11.6.2011]

Príklad 1. V rovine je zadaný bod $A = [1, 2]$.
(a) napíšte rovnicu priamky p, prechádzajúcu bodom A pod takým sklonom, aby p pretínala kladné časti súradných osí x, y rovnako ďaleko od počiatku súradnej sústavy (nakreslite si obrázok!) *2 body*
(b) nájdite vzdialenosť d priamky p od počiatku *2 body*
(c) nájdite koordináty bodov P_1, P_2, v ktorých p pretína osi x, y. *1 bod*
(d) napíšte parametrickú rovnicu priamky p tak, aby hodnota parametra $t = -1$ zodpovedala bodu P_1 a hodnota $t = 1$ bodu P_2 *2 body*
(e) napíšte rovnicu priamky p_1, ktorá prechádza bodom A kolmo na priamku p *2 body*
(f) nájdite bod P_3, v ktorom priamka p_1, pretína os x *1 bod*
(g) vypočítajte obsah trojuholníka P_1AP_3 *1 bod*
(h) napíšte rovnicu priamky p_2, ktorá prechádza bodom A rovnobežne s osou y *2 body*

Príklad 2. V rovine sú zadané body $A = [0, 2]$, $B = [3, 1]$, $C = [2, 4]$.
(a) Napíšte rovnicu priamky p_1, prechádzajúcu bodmi A, B, a to v parametrickom aj v neparametrickom tvare. *2 body*
(b) Napíšte rovnicu priamky p_2, prechádzajúcu bodom C a súčasne rovnobežnú s priamkou p_1. *2 body*
(c) Nájdite vzdialenosť d_1 priamky p_1 od počiatku súradníc. *2 body*
(d) Nájdite vzdialenosť d priamok p_1 a p_2 od seba. *2 body*
(e) Vypočítajte obsah trojuholníka A, B, C. *3 body*
(f) BONUS: Nech A, B, C sú ľubovoľné body roviny s celočíselnými kartézskymi súradnicami. Dokážte, že dvojnásobok obsahu trojuholníka A, B, C je celé (prirodzené) číslo. *2 body*

Príklad 3. V priestore sú zadané body $A = [3, 0, 3]$, $B = [0, 1, 2]$, $C = [3, 3, 0]$, $D = [0, 0, 1]$.
(a) Napíšte rovnicu priamky p_1, prechádzajúcu bodmi A, B a tiež rovnicu priamky p_2, prechádzajúcu bodmi C, D *2 body*

(b) Napíšte parametrickú rovnicu roviny R, v ktorej leží priamka p_1 a zároveň R je rovnobežná s priamkou p_2 *2 body*
(c) Rovnicu roviny R prepíšte do neparametrickeho (algebraického alebo vektorového) tvaru *3 body*
(d) Nájdite vzdialenosti d_C, d_D roviny R od bodov C, D *2 body*
(e) Nájdite súradnice bodu E, v ktorom os z pretína rovinu R *1 bod*

Príklad 4. Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sú polohové vektory troch ľubovoľných rôznych priestorových bodov A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke.
(a) Opíšte vzťah medzi vektormi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, bodmi A, B, C a počiatkom kartézskych súradníc $P = [0, 0, 0]$. *1 bod*
(b) Dokážte, že vektorová rovnica

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \qquad\qquad (*)$$

kde $\mathbf{m} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C})$, je splnená pre $\mathbf{x} = \mathbf{A}$, $\mathbf{x} = \mathbf{B}$, $\mathbf{x} = \mathbf{C}$ *3 body*
(c) Aký je geometrický význam rovnice $(*)$ a vektora $\mathbf{m}$? *2 body*
(d) Aký geometrický význam má číslo $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$? *1 bod*
(e) Dokážte, že platí "pravidlo posúvania zátvorky"
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ *2 body*
(f) Vypočítajte objem štvorstena s vrcholmi $A = [3, 0, 3]$, $B = [0, 1, 2]$, $C = [3, 3, 0]$, $P = [0, 0, 0]$. *3 body*
(g) Pre konkrétne body zadané v (f) prepíšte rovnicu $(*)$ do algebraického (nevektorového) tvaru. *2 body*

Príklad 5. V $\mathbf{R}^3$ je zadaná rovina R a priamka p

$$R: \; x + 2y - 3z - 4 = 0, \qquad p: \; \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Nájdite
(a) vzdialenosť d_A roviny R od bodu $A = [1, 1, 0]$ *2 body*
(b) rovinu R_A, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s rovinou R *2 body*
(c) prienik P roviny R a priamky p *2 body*
(d) rovinu R_1, kolmú na p a prechádzajúcu bodom $B = [0, 1, 1]$

3 body

(e)parametrický tvar priamky p_1, definovanej prienikom rovín R a R_1.

6 bodov

Príklad 6. Je zadaná priamka p a elipsa E

$$p: \quad \sqrt{5}\,x + 3y - c = 0, \qquad E: \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Nájdite

(a) také dve hodnoty parametra c, pre ktoré sa priamka p dotýka elipsy E práve v jednom bode. *4 body*

(b) súradnice týchto dvoch dotykových bodov P_1 a P_2. *2 body*

(c) vzdialenosť d medzi bodmi P_1 a P_2. *1 bod*

(d) najmenšiu vzdialenosť D priamky $\sqrt{5}\,x + 3y - 13 = 0$ od elipsy E. *3 body*

Príklad 7. Je zadaná hyperbola $h: \ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

(a) Dokážte, že priamka $p_1: \ x - y - 1 = 0$ je dotyčnica k h a nájdite bod dotyku D. *2 body*

(b) Nájdite priamku p_2, ktorá je dotyčnicou k h v bode, ktorého x-ová súradnica je 2. *2 body*

(c) Nájdite najbližšiu vzdialenosť priamky $p_3: \ y - 2x - 1 = 0$ od hyperboly h. *4 body*

Príklad 8. Je zadaná matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ekvivalentnými úpravami zistite hodnosť matice $\mathbf{A}$ *3 body*

(b) Nájdite všetky riešenia homogénnej sústavy rovníc $\mathbf{Ax}$=0. *3 body*

(c) Určte vektory, ktorých lineárnou kombináciou dostanete všeobecné riešenie, získané v (b). *3 body*

(d) Koľko lineárne nezávislých stĺpcov má matica A? *2 body*

Príklad 9. Pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

nájdite vlastné hodnoty, normované vlastné vektory a inverznú maticu.
5 bodov

Príklad 10. Pre maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ nájdite
(a) vlastné hodnoty *4 body*
(b) normované vlastné vektory *6 bodov*
(c) vlastné hodnoty matice $\mathbf{A^2}$ *2 body*

Príklad 11. Sú zadané matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2/5 & 6/5 \\ 6/5 & 7/5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Ukážte, že $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. *1 bod*
(b) Aký je vzťah medzi maticami $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$? *1 bod*
(c) Ukážte, že matica $\mathbf{A}$ má rovnaké vlastné hodnoty ako matica $\mathbf{B}$. *6 bodov*
(d) Nájdite normované vlastné vektory matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. *6 bodov*
(e) Dokážte, že ak $\mathbf{x}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$, je ním aj vektor $-\mathbf{x}$. *1 bod*
(f) Z vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zostavte maticu $\mathbf{X_A}$, ktorá transformáciou $\mathbf{X_A}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{X_A}$ transformuje maticu $\mathbf{A}$ na diagonálny tvar. Vypočítajte maticu $\mathbf{X_A}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{X_A}$ a presvedčte sa, že na jej diagonále sú naozaj vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$. *2 body*
(g) Z vlastných vektorov matice $\mathbf{B}$ zostavte maticu $\mathbf{X_B}$, ktorá transformáciou $\mathbf{X_B}^\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{X_B}$ transformuje maticu $\mathbf{B}$ na diagonálny tvar. Vypočítajte maticu $\mathbf{X_B}^\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{X_B}$ a presvedčte sa, že na jej diagonále sú naozaj vlastné hodnoty matice $\mathbf{B}$. *2 body*
(h) Vypočítajte maticu $\mathbf{P} = \mathbf{X_B}\mathbf{X_A}^\mathbf{T}$ a presvedčte sa, že k nej inverzná matica je $\mathbf{P^{-1}} = \mathbf{X_A}\mathbf{X_B}^\mathbf{T}$. *2 body*
(i) Ukážte, že $\mathbf{P}$ je matica podobnostnej transformácie, ktorá transformuje maticu $\mathbf{B}$ na maticu $\mathbf{A}$, t.j. že platí $\mathbf{A} = \mathbf{P^{-1}BP}$ *2 body*

Príklad 12 (BONUS). Dokážte, že ak je medzi maticami $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ vzťah $\mathbf{M} = \mathbf{T^{-1}NT}$, kde $\mathbf{T}$ je ľub.regulárna matica, tak matice $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ majú rovnaké vlastné hodnoty *4 body*

Príklad 13. Máme matice

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dokážte, že $\mathbf{M}$ je ortogonálna matica. *3 body*
(b) Vypočítajte $\mathbf{D} = \mathbf{M^T BM}$ a presvedčte sa, že $\mathbf{D}$ je diagonálna matica. *2 body*
(c) Čo z toho vyplýva pre vlastné hodnoty matice $\mathbf{B}$? *2 body*
(d) Ako súvisia prvky matice $\mathbf{M}$ s vlastnými vektormi matice $\mathbf{B}$? *2 body*

Príklad 14.
(a) Nájdite nové zložky vektora $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b_1} + v_2\mathbf{b_2} + v_3\mathbf{b_3}$ po prechode k novej báze $\mathbf{b}_i \mapsto \mathbf{b'}_i$, kde

$$\mathbf{b'}_1 = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}$$
$$\mathbf{b'}_2 = -\mathbf{b_1} + 2\mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}$$
$$\mathbf{b'}_3 = 2\mathbf{b_1} - \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$$

3 body
(b) Zapíšte vektor $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{b_1} + 6\,\mathbf{b_2} - 2\,\mathbf{b_3}$ v novej báze, zadanej v (a). *1 bod*

Príklad 15.

Majme 3 vektory $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nájdite konštanty a, b a štvrtý vektor $\mathbf{b_4}$ tak, aby vektory $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_4}$ tvorili ortogonálnu bázu priestoru $\mathbf{R^4}$. *4 body*

Príklad 16. Máme vektory $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$,
kde a, b, c sú neznáme číselné koeficienty.

(a) Nájdite také a, b, c, aby vektory $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ boli navzájom ortogonálne.
2 body

(b) Výpočtom vhodného determinantu nájdite všeobecnú podmienku na čísla a, b, c, aby vektory $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ boli navzájom lineárne nezávislé. *3 body*

(c) Vyberte konštanty a, b, c, tak, aby vektory $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ boli vzájomne lineárne závislé. *2 body*

(d) Ktoré z vektorov $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$, skonštruovaných v (a),(b),(c) môžu tvoriť bázu vektorového priestoru $\mathbf{R^3}$? *1 bod*

Príklad 17.

Je zadaná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(a) Riešte sústavu rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. *5 bodov*

(b) Vypočítajte det$\mathbf{A}$ a det$\mathbf{A^{-1}}$. *5 bodov*

(c) Dokážte, že vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ a nájdite príslušnú vlastnú hodnotu λ. *2 body*

(d) Nájdite jednu vlastnú hodnotu matice $\mathbf{A^2}$. *2 body*

Príklad 18. Je zadaná matica $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a vektory

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} c \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vyriešte systém rovníc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *3 body*
(b) Vypočítajte $\det A$. *2 body*
(c) Aká je hodnosť matice A? *1 bod*
(d) Nájdite inverznú maticu A^{-1} a jej determinant. *3 body*
(e) Vektor $\mathbf{v_1}$ je vlastný vektor matice A. Nájdite príslušnú vlastnú hodnotu a konštantu c. *2 body*
(f) BONUS: Vektor $\mathbf{v_2}$ je vlastný vektor matice A. Nájdite príslušnú vlastnú hodnotu a konštantu a. *3 body*

Príklad 19. Je zadaná matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Vypočítajte $\det\mathbf{A}$. *3 body*
(b) Vypočítajte $\det\mathbf{A^{-1}}$ bez toho, aby ste počítali determinant inv.matice $\mathbf{A^{-1}}$. Výpočet zdôvodnite. *2 body*
(c) Aká je hodnosť matice $\mathbf{A}$? *1 bod*
(d) Ekvivalentnými úpravami jednotkovej matice vypočítajte inv.maticu $\mathbf{A^{-1}}$. *3 body*
(e) Určite všetky riešenia homogénnej sústavy rovníc $\mathbf{Ax}$=0. *2 body*
(f) Ukážte, že vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$ sú 1, −1, 2, −2. *5 bodov*
(g) Nájdite normovaný vlastný vektor matice $\mathbf{A}$, prislúchajúci vlastnej hodnote 2. *4 body*
(h) Aké sú vlastné hodnoty matíc $\mathbf{A^2}$, $\mathbf{A^3}$ a $\mathbf{A^{-1}}$? *3 body*

Príklad 20. Je zadaná kužeľosečka

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 10x - 2y - 1 = 0$$

V tejto úlohe treba určiť nasledovné parametre kužeľosečky, ktoré ju charakterizujú: *osi symetrie* a *stred* keď je to elipsa alebo hyperbola, *vrchol* a *os* ak je to parabola, *asymptoty* ak je to hyperbola.
(a) O aký druh kužeľosečky sa jedná a prečo? *2 body*
(b) Nájdite rotačnú maticu $\mathbf{R}$ tak, aby po rotácii súradníc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

kužeľosečka neobsahovala zmiešaný člen $x'y'$. *5 bodov*

(c) Doplnením do štvorca odstráňte lineárne členy v rovnici kužeľosečky a určite parametre kužeľosečky v súradniciach x', y'. *3 body*

(d) Určite parametre kužeľosečky v pôvodných súradniciach x, y. *2 body*

(e) Načrtnite kužeľosečku v súradniciach x, y *2 body*