

## Priebeh funkcie (príklady 1)

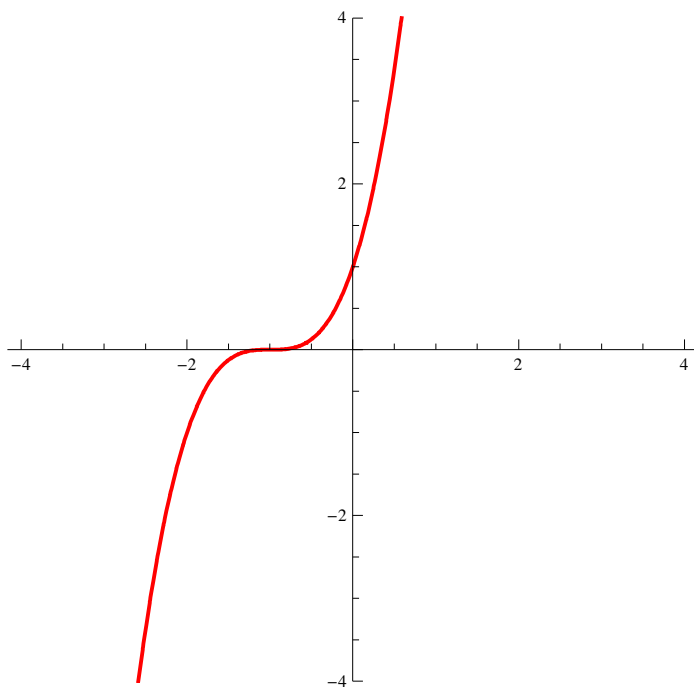
[E.Masár, ver. 03.12.2011]

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie zisťujeme definičný obor, obor hodnôt, párnosť funkcie, lokálne maximá a minimá, konkávnosť a konvexnosť, inflexné body, asymptoty, prípadne funkčné hodnoty v niektorých význačných bodoch. Po takomto vyšetrení by sme mali byť schopní načrtnúť graf funkcie.

Základné informácie získame určením definičného oboru, oboru hodnôt a určením asymptot (ak existujú) z funkčného predpisu. Pokračujeme výpočtom prvej a druhej derivácie a určením ich znamienok a nulových bodov. Tak zistíme, kde funkcia rastie a kde klesá, ako rastie alebo klesá (konkávne alebo konvexne?), kde má lok. extrém a inflexné body.

**Farby:** funkcia: **červená**, 1.derivácia: **modrá**, 2.derivácia: **zelená**.

$$f(x) = (1 + x)^3$$



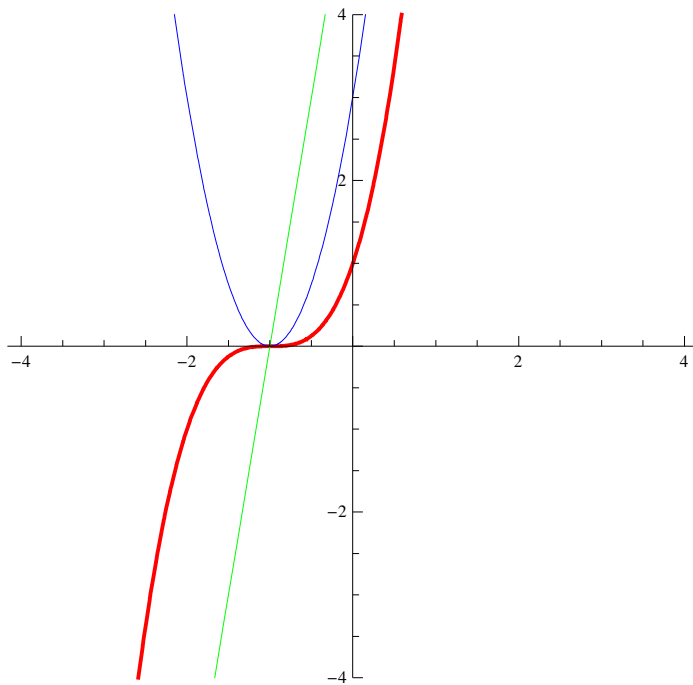
Funkcia rastie (neklesá), nemá lokálne maximá ani minimá, ani žiadne asymptoty. Má jeden inflexný bod v  $x = -1$ .

Priebeh funkcie (príklady 1)

$$f(x) = (1 + x)^3$$

$$f'(x) = 3(1 + x)^2$$

$$f''(x) = 6(1 + x)$$

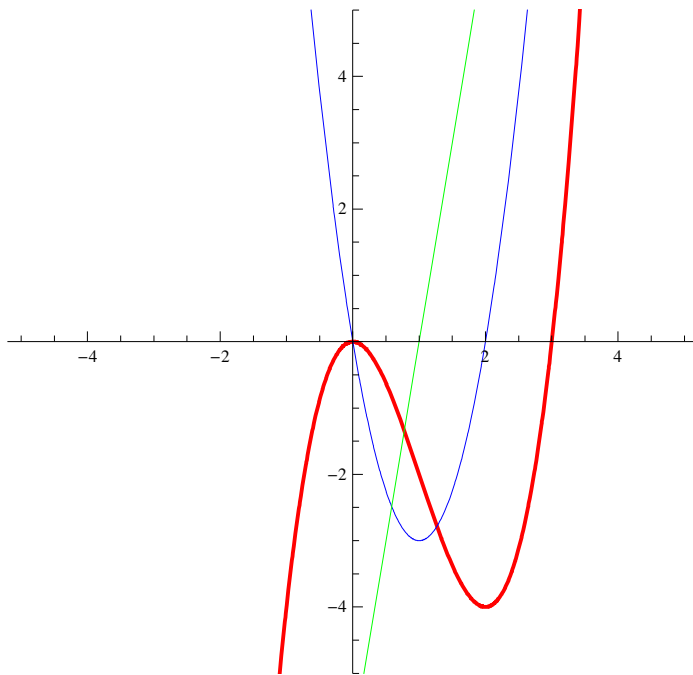


Pretože funkcia nikde neklesá, prvá derivácia nemá záporné hodnoty. V bode  $x = -1$  sa mení znamienko druhej derivácie (tretia derivácia je tam nenulová), a preto tam má funkcia inflexný bod.

$$f(x) = -3x^2 + x^3$$

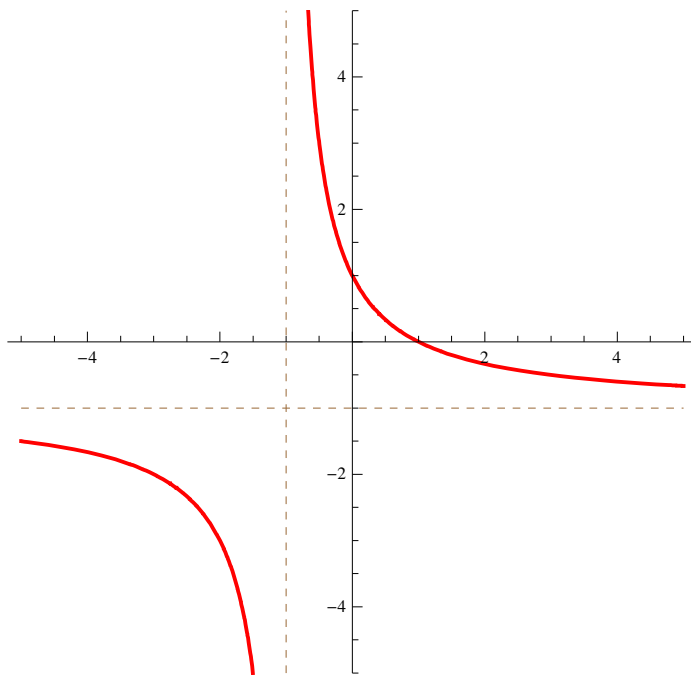
$$f'(x) = 3(-2 + x)x$$

$$f''(x) = 6(-1 + x)$$



Všimnite si súvislosť znamienka prvej derivácie s rastom a klesaním funkcie. V nulových bodoch prvej derivácie má funkcia lokálne extrém, ak zároveň v týchto bodoch  $f'' \neq 0$  (ináč povedané, v okolí lokálneho extrému sa mení znamienko prvej derivácie). V bode  $x = 0$  je  $f'' < 0$ , a preto je tento extrém lokálnym maximom. V bode  $x = 2$  je  $f'' > 0$ , a preto je tento extrém lokálnym minimom. Všimnite si, že druhá derivácia nie je záporná alebo kladná iba v extrémnom bode, ale aj v jeho okolí. Ak je druhá derivácia kladná, znamená to, že prvá derivácia rastie. Ak je druhá derivácia záporná, znamená to, že prvá derivácia klesá. V bode  $x = 1$  je  $f'' = 0$ , lebo hodnota  $f''$  sa mení so zápornej na kladnú (čomu zodpovedá nenulová tretia derivácia). V tomto bode sa funkcia mení z konkávnej na konvexnú, je to teda inflexný bod.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

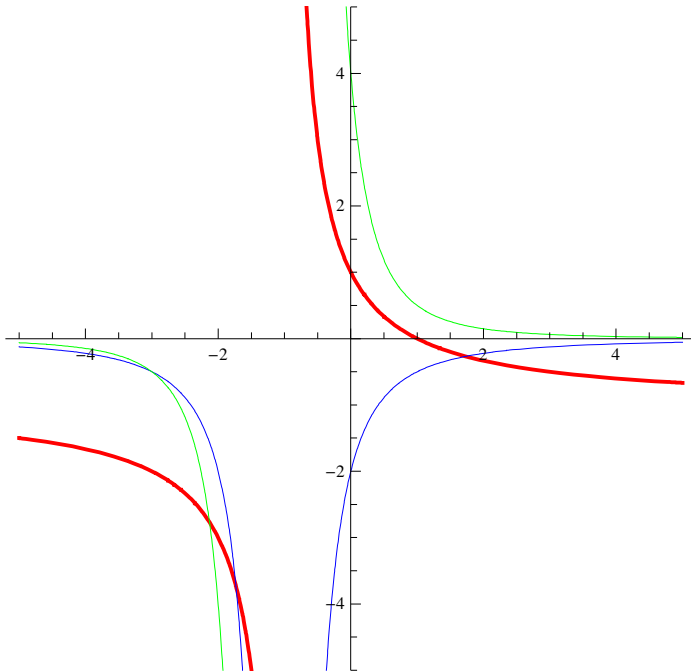


Určte definičný obor a obor hodnôt. Odvodte rovnicu asymptoty  $y = -1$ . Zdôvodnite prítomnosť vertikálnej asymptoty  $x = -1$ .

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

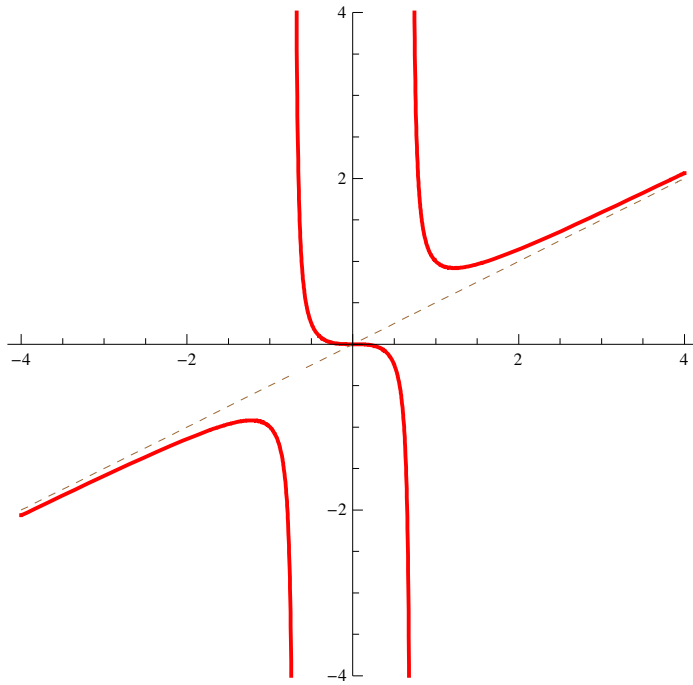
$$f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3}$$



Funkcia  $f(x)$  nemá žiadne extrémny, lebo prvá derivácia nie je nikde nulová. Funkcia je pre  $x < -1$  konkávna ( $f'' < 0$ ) a je konvexná pre  $x > -1$  ( $f'' > 0$ ). Funkcia nemá žiadny inflexný bod.

$$f(x) = \frac{x^3}{-1 + 2x^2}$$

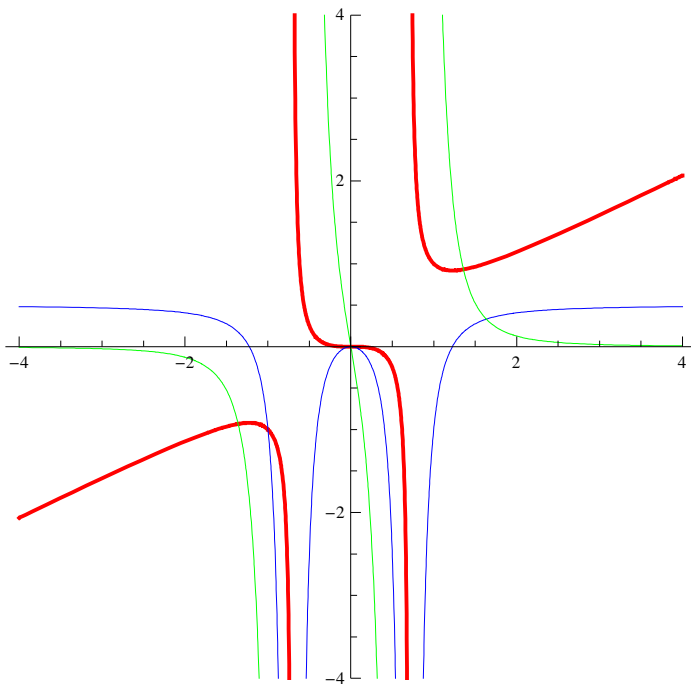


Definičný obor funkcie  $f(x)$  sa skladá z troch podintervalov. Určte ich. Odvoďte asymptotu  $y = x/2$ . Kde má funkcia vertikálne asymptoty?

$$f(x) = \frac{x^3}{-1 + 2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(-3 + 2x^2)}{(1 - 2x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x + 4x^3}{(-1 + 2x^2)^3}$$

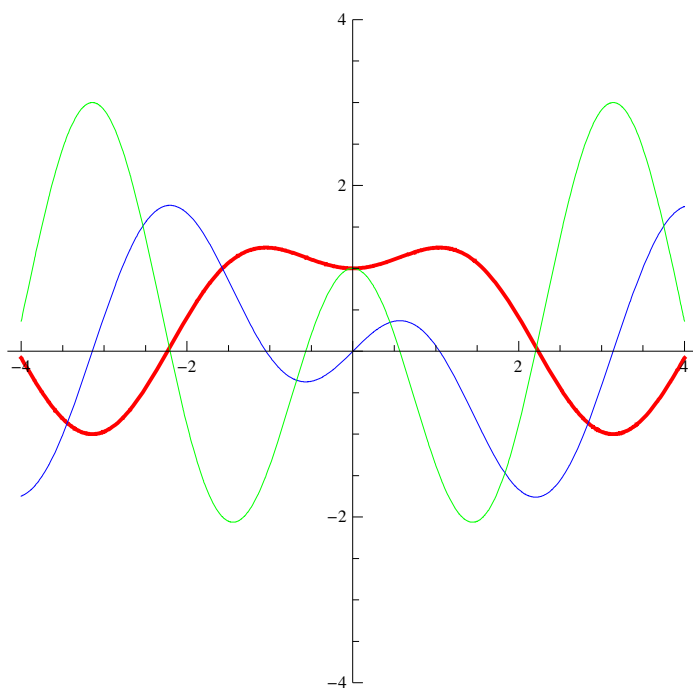


Určte extrémny funkcie  $f(x)$ , konkávnosť, konvexnosť, inflexný bod.

$$f(x) = \cos[x] + \sin[x]^2$$

$$f'(x) = (-1 + 2 \cos[x]) \sin[x]$$

$$f''(x) = -\cos[x] + 2 \cos[2x]$$



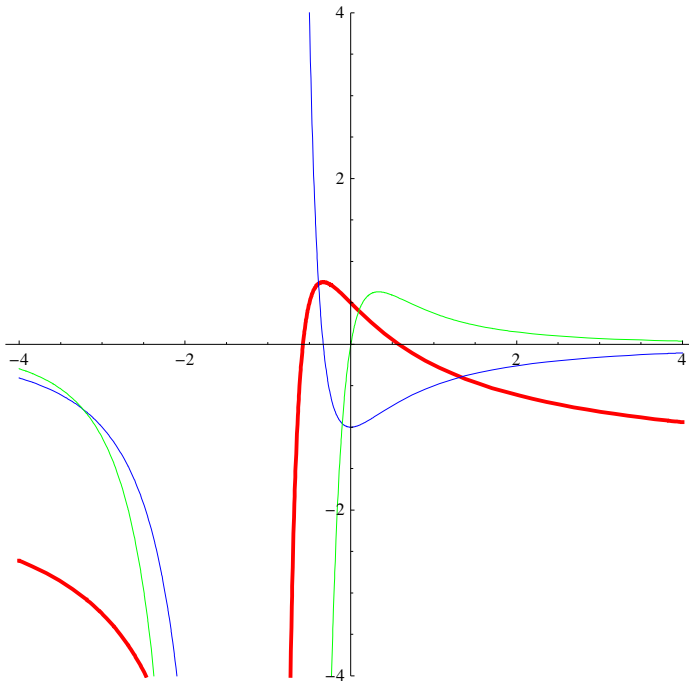
Z funkčného predpisu pre  $f(x)$  a jej derivácie urobte kompletne vyšetrenie priebehu funkcie (definičný obor, obor hodnôt, párnosť funkcie, lokálne maximá a minimá, konkávnosť a konvexnosť, inflexné body, asymptoty, funkčné hodnoty v niektorých význačných bodoch) a porovnajte s vykresleným grafom.



$$f(x) = \frac{1 - 3x^2}{2(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - 3x}{(1+x)^3}$$

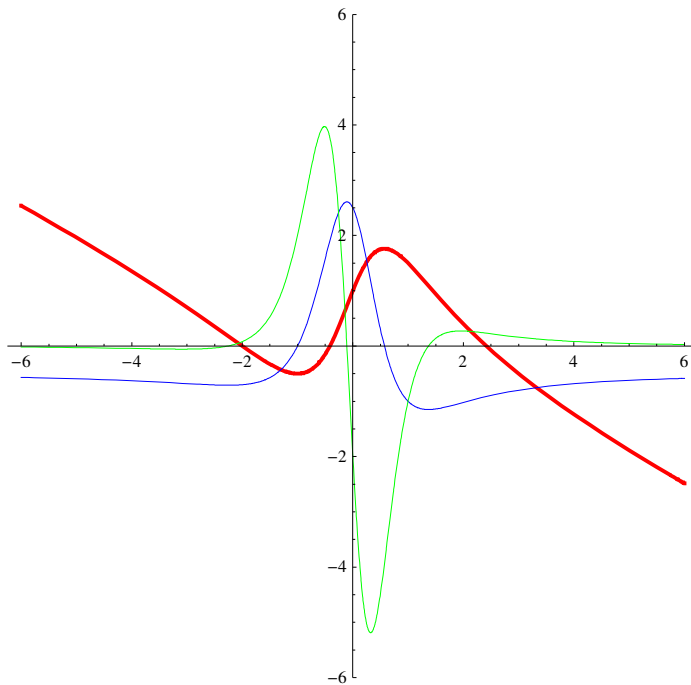
$$f''(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$$



Z funkčného predpisu pre  $f(x)$  a jej derivácie urobte kompletne vyšetrenie priebehu funkcie (definičný obor, obor hodnôt, párnosť funkcie, lokálne maximá a minimá, konkávnosť a konvexnosť, inflexné body, asymptoty, funkčné hodnoty v niektorých význačných bodoch) a porovnajte s vykresleným grafom.

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1+3x}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{1+3x}{1+x^2}$$



Ktorá z funkcií  $f(x)$ ,  $g(x)$  je vykreslená (aj so svojou prvou a druhou deriváciou) na grafe?

[Návod: počet koreňov, asymptoty]

Z funkčného predpisu určte definičný obor a asymptoty. Z grafu funkcie a jej derivácií určte približnú polohu extrémov, konkávnosť, konvexnosť, inflexné body.