Matematika 2

Lineárna algebra

(ver.05.03.2013)

Úvod

Prehľad. Tieto poznámky obsahujú podklady k prednáške Matematika 2 na špecializácii Aplikovaná informatika: jedná sa o 12 dvojhodinových prednášok doplnených dvojhodinovými cvičeniami (ich členenie nie je definitívne). Poznámky obsahujú nasledujúce témy:

I. Analytická geometria v rovine

1. Súradnice v rovine: *počiatok, vzdialenosť bodov, priamka, uhol, polárne súradnice.*

2. Jednoduché krivky v rovine: *kružnica a elipsa, hyperbola, parabola, príklady.*

3. Vektory v rovine: *lineárna nezávislosť, báza, skalárny súčin a ortogonalita, ortogonálna báza.*

4. Lineárne transformácie: *lineárne transformácie bázy, sústava dvoch lineárnych rovníc, matice a ich súčin, determinant.*

5. Pojem grupy (axiómy): *grupa* $GL(2, \mathbf{R})$ *a* $SL(2, \mathbf{R})$, *transponovanie matíc, (pod)grupa ortogonálnych transformácií* $O(2)$, *príklady.*

6. Komplexné čísla: *ako rovina* $\mathbf{R^2}$ *s násobením, ako násobenie určitých matíc. Násobenie komplexných čísiel, komplexné združnie a absolútna hodnota.*

Geometrický význam komplexných čísiel a ich sčítania a násobenia, vlastnosti telesa komplexných čísiel, základná veta algebry.

II. Analytická geometria v priestore

1. Súradnice v priestore: *počiatok, poloha, vzdialenosť, priamka a rovina - ich vzájomná poloha, sférické súradnice.*

2. Niektoré plochy v priestore: *guľa a elipsoid (paraboloidy a hyperboloidy), príklady.*

3. Vektory v priestore: *lineárna nezávislosť, báza, skalárny súčin a ortogonalita, ortogonálna báza. Vektorový súčin a plocha trojuholníka, zmiešaný súčin a objem, príklady.*

4. Lineárne transformácie: *sústava troch lineárnych rovníc, matice a ich súčin, determinant, hodnota matice - priamky a roviny.*

5. Grupy $GL(3,\mathbf{R})$ *a* $SL(3,\mathbf{R})$*, grupy rotácií* $O(3)$ *a* $O(3)$*. Skladanie rotácií: slnečné hodiny a iné (jednoduchšie) príklady.*

III. Vektorové priestory

1. Definícia vektorového priestoru: *lineárna závislosť dimenzia, báza, príklady.*

2. Sústavy lineárnych rovníc: *maticový zápis, hodnota matice, priestor riešení, transponovaná matica, súčin matíc.*

3. Skalárny súčin: *norma, vzdialenosť, metrika, ortogonalita a ortogonálna báza.*

4. Lineárne transformácie: *štvorcové matice, ich súčin a determinant, grupy* $GL(n,\mathbf{R})$ *a* $SL(n,\mathbf{R})$*. Vlastné hodnoty a vlastné vektory matice, symetrické a antisymetrické matice.*

5. Ortogonálne matice a transformácie: *invariantnosť skalárneho súčinu, grupy* $O(n)$ *a* $SO(n)$*. Vlastné hodnoty a vlastné vektory symetrickej matice, diagonalizácia symetrických matíc.*

6. Komplexné vektorové priestory: *lineárna závislosť dimenzia, báza, lineárne transformácie, grupy* $GL(n,\mathbf{C})$ *a* $SL(n,\mathbf{C})$*.*

Hermitovsky združená matica, hermitovské a unitárne matice, unitárne transformácie, grupy $U(n)$ *a* $SU(n)$*.*

Skalárny súčin a jeho invariantnosť, vlastné hodnoty a vlastné vektory hermitovskej matice, diagonalizácia hermitovských matíc.

Motivácia. Aj keď v informatike sa pracuje najmä metódami diskrétnej matematiky a algebry, je veľmi užitočné ovládať aj základy analýzy a geometrie. Tieto aspekty sa prejavujú najmä v aplikáciách numerických a informatických metód. často treba skúmať, simulovať alebo modelovať rôzne procesy, zobrazovať ich alebo prenášať do virtuálneho sveta počítačov. Na doplnenie treba uviesť, že aj v rámci diskrétnej matematiky, pri formuláciách problémov alebo ich analýze je užitočné mať základné vedomosti zo "spojitej matematiky".

Zvyčajne, alebo aspoň veľmi často, skúmaný problém má svoj matematický alebo fyzikálny popis v rámci "klasickej" analýzy a geometrie. Cieľom prednášok Matematika 2 je poskytnúť základné poznatky z lineárnej algebry. Pojmový aparát bude preto budovaný len v nevyhnutnej miere. Dôraz bude kladený na praktické ovládanie metód, t.j. priebežné precvičovanie naučených poznatkov, riešenie najprv jednoduchých a potom (trochu) zložitejších problémov.

Literatúra.

Učebnice.

1. I. Kluvánek, L. Mišík, J. Švec: Matematika pre štúdium technických vied, Alfa, Bratislava, 1961.

2. Ch. B. Morrey, jr: University Calculus with Analytic Geometry, Addison-Wesley Publ. Comp., 1964.

3. J. Kvasnica: Matematický aparát fyziky, Academia, Praha, 1989.

4. P. Zlatoš, Lineárna algebra, web stránka KAGM, FMFI UK.

Zbierka úloh.

J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť, Alfa, Bratislava, 1971 (a neskoršie vydania).

Prehľady.

1. I. N. Bronštejn, K. A. Semenďajev: Príručka matematiky, SNTL, Bratislava, 1961.

2. Malá encyklopédia matematiky, Obzor, Bratislava, 1978.

Hodnotenie predmetu. Výsledné hodnotenie sa skladá z priebežného hodnotenia a záverečného hodnotenia v pomere 50:50.

1. Priebežné hodnotenie počas semestra

40 bodov = 20 bodov testy na cvičeniach + 20 bodov semestrálna písomka

2. Záverečné hodnotenie

40 bodov = 35 skúšková písomka + 5 bodov ústna skúška

3. Známkovanie

0 - 44 bodov .... Fx

45 - 51 bodov ... E

52 - 58 bodov ... D

59 - 65 bodov ... C

66 - 72 bodov ... B

73 - 80 bodov ... A

Ku skúške bude pripustený iba poslucháč, ktorý počas semestra získa viac ako 12 bodov. Hodnotenie = semester + skúška spolu. Zlepšenie hodnotenia podľa písomných testov o 1 stupeň je dané počtom bodov získaných na ústnej skúške. Zlý výsledok ústnej skúšky môže znamenať zhoršenie známky o 1 stupeň oproti hodnoteniu podľa písomných testov.

1 Lineárna algebra a geometria v rovine

Súradnice v rovine

Budeme predpokladať, že (intuitívne) poznáme základné pojmy Euklidovskej geometrie v rovine: pojmy bodu v rovine a vzdialenosti dvoch bodov, pojmy priamky a ich vzájomnej polohy.

Pravouhlé (kartézske) súradnice v rovine zavedieme takto:

(i) Zvolíme v rovine priamku p_x (x-ovú os) a na nej počiatok $\mathbf{0}$, ktorý bude odpovedať bodu $x = 0$ na číselnej osi;

(ii) Počiatkom $\mathbf{0}$ vedieme ďalšiu priamku p_y (y-ovú os) kolmú na x-ovú os;

(iii) Ľubovoľný bod P roviny stotožníme s dvojicou reálnych čísiel $P = [x_P; y_P]$, kde $x_P(y_P)$ označujú x-ovú os(y-ovú os) súradnicu bodu P (pozri Obr. 1a).

Vzdialenosť dvoch bodov roviny. Uvažujme teraz dva body roviny $P = [x_P; y_P]$ a $Q = [x_Q; y_Q]$. Ich vzdialenosť $d(P, Q)$ sa definuje ako dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka PQR, $R = [x_Q; y_P]$ (pozri Obr. 1b). Podľa Pythagorovej vety

$$d(P, Q) \;=\; \sqrt{(x_P - x_Q)^2 \,+\, (y_P - y_Q)^2}\;. \tag{1}$$

Euklidovská rovina $\mathbf{E}^2$ je priestor dvojíc reálnych čísiel $\mathbf{R}^2$ opatrený pojmom vzdialenosti (1).

Polárne súradnice definujeme takto:

(i) Okolo počiatku $\mathbf{0} = [0;0]$ nakreslíme jednotkovú kružnicu a na nej vyznačíme uhol $\varphi \in (-\pi, +\pi]$, tak ako je naznačené na Obr. 2a: bodu $[1;0]$ je priradený uhol $\varphi = 0$, bodom $[0;+1]$ a $[0;-1]$ uhly $\varphi = +\pi/2$ resp. $\varphi = -\pi/2$, bodu $[-1;0]$ priradíme uhol $\varphi = +\pi$ (mohli by sme priradiť aj uhol $\varphi = -\pi$, je dobré sa jednoznačne rozhodnúť).

(ii) Každý bod $P = [x;y] \neq \mathbf{0}$ roviny parametrizujeme jeho *polárnymi súradnicami*: vzdialenosťou od počiatku $r = \sqrt{x^2+y^2}$ a uhlom φ zadaným pomocou rovníc

$$x \;=\; r\cos\varphi \;,\; y \;=\; r\sin\varphi \;. \tag{2}$$

Poznámka: Polárne súradnice môžeme vyjadriť pomocou kartézskych súradníc takto:

$$r \;=\; \sqrt{x^2+y^2} \;,\; \varphi \;=\; \arccos\frac{x}{r} \;. \tag{3}$$

Polárne súradnice sú dobre definované okrem počiatku, v ktorom síce $r = 0$ ale uhol φ nie je definovaný!

Definícia: *Priamka* p v $\mathbf{E}^2$ je množina bodov $X = [x;y]$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$p: \quad a\,x \;+\; b\,y \;+\; c \;=\; 0 \;, \tag{4}$$

kde a, b a c sú reálne čísla, pričom $a^2+b^2 > 0$. Bez ujmy na všeobecnosti, budeme predpokladať, že $a \geq 0$ (v opačnom prípade rovnicu (4) násobíme číslom -1).

Ak $b = 0$, rovnica $a\,x + c = 0$ definuje priamku rovnobežnú s y-ovou osou. Podobne, ak $a = 0$, rovnica $b\,y + c = 0$ definuje priamku rovnobežnú s x-ovou osou.

Smerový uhol priamky. Smerový uhol α priamky p (4) definujeme rovnicou

$$\operatorname{tg}\alpha \;=\; -\frac{a}{b}\,,\;\; b \neq 0\;. \tag{5}$$

Uhol berieme z intervalu $[0, \pi)$, ak $b = 0$ kladieme $\alpha \;=\; \pi/2$. Je to uhol, ktorý priamka p zviera s x-ovou osou (pozri Obr. 2b).

Poznámka. Ak $b \neq 0$ rovnicu (4) prepíšeme ako funkciu

$$y \;=\; -\frac{a}{b}x \;-\; \frac{c}{b}\,.$$

potom

$$y' \;=\; -\frac{a}{b} \;=\; \operatorname{tg}\alpha\,,$$

v súlade s geometrickou interpretáciou derivácie ako smernice ku krivke v danom bode.

Uhol dvoch priamok p a q s kladnými smerovými uhlami α resp. β sa nazýva kladný uhol

$$\varphi \;=\; |\alpha \,-\, \beta| \text{ z intervalu } [0, \pi)\,.$$

Ak $\varphi \;=\; \pi/2$, hovoríme, že priamky sú kolmé.

Poznámka. Rovnicu (4) po vydelení $\sqrt{a^2 + b^2}$ môžeme prepísať do tvaru

$$p:\quad \sin\alpha\, x \;-\; \cos\alpha\, y \;+\; e \;=\; 0\,, \tag{6}$$

kde

$$\sin\alpha \;=\; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\;\; \cos\alpha \;=\; -\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\;\; e \;=\; \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{7}$$

Priamka prechádzajúca bodom $Q \;=\; [x_Q; y_Q]$ s daným smerovým uhlom α je daná rovnicou

$$p:\quad \sin\alpha\,(x - x_Q) \;-\; \cos\alpha\,(y - y_Q) \;=\; 0\,. \tag{8}$$

Porovnaním s rovnicou (6) dostaneme $e = y_Q \cos\alpha - x_Q \sin\alpha$.

Parametrický tvar priamky. Priamku p prechádzajúcu bodom $Q = [x_Q; y_Q]$ možno tiež zadať v parametrickom tvare ako množinu bodov

$$p: \quad [b\,t + x_Q; -a\,t + y_Q]\,, \quad t \text{ je ľubovolné reálne číslo}\,. \tag{9}$$

Zavedené pojmy bodu a priamky v $\mathbf{E}^2$ spĺňajú Euklidove axiómy rovinnej geometrie:

(i) Dvomi rôznymi bodmi $P_0 = [x_0; y_0]$ a $P_1 = [x_1; y_1]$ možno viesť práve jednu priamku p, ktorá je v parametrickom tvare zadaná ako množina bodov

$$P(t) = [t\,x_0 + (1-t)x_1; t\,y_0 + (1-t)y_1]\,,\ t \in \mathbf{R}\,. \tag{10}$$

Ak $0 \leq t \leq 1$, tak máme úsečku s koncovými bodmi $P_0 = [x_0; y_0]$ a $P_1 = [x_1; y_1]$.

(ii) Bodom $Q = [x_Q; y_Q]$, ktorý neleží na priamke

$$p: \ \sin\alpha\,x - \cos\alpha\,y + e = 0\,,$$

možno viesť práve jednu priamku $p^{\|}$ rovnobežnú s p, ktorá je zadaná rovnicou

$$p^{\|}: \ \sin\alpha\,(x - x_Q) - \cos\alpha\,(y - y_Q) = 0\,. \tag{11}$$

Priamky p a $p^{\|}$ nemajú spoločný bod: keby takýto bod $P' = [x'; y']$ existoval, tak preň by platilo

$$\sin\alpha\,x' - \cos\alpha\,y' + e = 0\,,$$

$$\sin\alpha\,(x' - x_Q) - \cos\alpha\,(y' - y_Q) = 0\,.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme

$$\sin\alpha\, x_Q \ - \ \cos\alpha\, y_Q \ + \ e \ = \ 0 \ ,$$

čo je ekvivalentné tomu, že bod $Q \ = \ [x_Q; y_Q]$ leží na priamke p - spor s našim východzím predpokladom.

Vzdialenosť bodu od priamky. Bodom Q, ktorý neleží na priamke p možno viesť práve jednu priamku $p^{\perp}$ kolmú na p zadanú rovnicou

$$p^{\perp} : \ b\,(x - x_Q) \ - \ a\,(y - y_Q) \ = \ 0\,. \tag{12}$$

Priesečník $P_* \ = \ [x_*; y_*]$ priamok p a $p^{\perp}$ je určený rovnicami

$$p^{\perp} : \ \cos\alpha\,(x - x_Q) \ + \ \sin\alpha\,(y - y_Q) \ = \ 0\,,$$

$$p : \ \sin\alpha\,(x - x_Q) \ - \ \cos\alpha\,(y - y_Q) \ + \ d = \ 0\,,$$

kde $d = e \ + \ \sin\alpha\, x_Q \ - \ \cos\alpha\, y_Q$. Jednoduchý výpočet dá

$$x_* \ = \ x_Q - \ \sin\alpha\, d \ , \ y_* \ = \ y_Q + \cos\alpha\, d \ .$$

Vzdialenosť bodu Q od priamky p *definujeme* ako vzdialenosť bodov Q a P_*:

$$\begin{aligned} d(Q, P_*) \ &= \ \sqrt{(x_Q - x_*)^2 \ + \ (y_Q - y_*)^2} \\ &= \ |d| \ = \ |e + \sin\alpha\, x_Q \ - \ \cos\alpha\, y_Q| \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Jednoduché krivky v rovine.

Elipsa v rovine (v štandardnom tvare) je daná ako množina bodov $P = [x;y]$, ktoré spĺňajú rovnicu (pozri Obr. 3a):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \, , \; a^2 = b^2 + e^2 \, . \tag{14}$$

číslo $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ sa nazýva *excentricita* elipsy; ak $e = 0$, elipsa sa redukuje na kružnicu. Body $F_1 = [-e;0]$ a $F_2 = [+e;0]$ sa nazývajú *ohniská* elipsy.

Veta: *Elipsa (14) je množina tých bodov roviny, ktoré majú od ohnísk konštantný súčet vzdialeností rovný* $2a$.

Dôkaz: Súčet vzdialeností bodu $P = [x;y]$ elipsy od jej ohnísk je rovný (pozri Obr. 3a):

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} + \sqrt{(e-x)^2+y^2} = 2a \, .$$

Umocnením tohto vzťahu, po jednoduchej úprave, prídeme k rovnici

$$2a^2 - (e^2+x^2+y^2) = \sqrt{(e^2+x^2+y^2)^2 - 4e^2x^2} \, .$$

Ďalším umocnením obdržíme rovnicu

$$a^4 - a^2e^2 = a^2y^2 + (a^2-e^2)x^2 \, ,$$

ktorá už je ekvivalentná definičnej rovnici (14).

Hyperbola v rovine (v štandardnom tvare) je daná ako množina bodov $P = [x;y]$, ktoré spĺňajú rovnicu (pozri Obr. 3b):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \, , \; e^2 = a^2 + b^2 \, . \tag{15}$$

číslo $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ sa nazýva *excentricita* hyperboly. Body $F_1 = [-e; 0]$ a $F_2 = [+e; 0]$ sú jej *ohniská.*

Hyperbola má dve asymptoty (t.j. priamky) dané rovnicou

$$y \pm \frac{b}{a} x \; = \; 0 \, .$$

Veta: *Hyperbola (15) je množina tých bodov roviny, ktoré majú od ohnísk konštantný rozdiel vzdialeností rovný* $2a$.

Dôkaz je obdobný ako v prípade elipsy. Rozdiel vzdialeností bodu $P = [x; y]$ hyperboly od jej ohnísk je rovný (pozri Obr. 3b):

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} \; - \; \sqrt{(e-x)^2 + y^2} \; = \; 2a \, .$$

Umocnením tohto vzťahu, po jednoduchej úprave, prídeme k rovnici

$$(e^2 + x^2 + y^2) - 2a^2 \; = \; \sqrt{(e^2 + x^2 + y^2)^2 - 4e^2 x^2} \, .$$

Ďalším umocnením obdržíme rovnicu

$$a^4 \; - \; a^2 e^2 \; = \; a^2 y^2 \; + \; (a^2 - e^2) x^2 \, ,$$

ekvivalentnú definičnej rovnici (15).

Parabola v rovine (v štandardnom tvare) je daná ako množina bodov $P = [x; y]$, ktoré spĺňajú rovnicu (pozri Obr. 3c):

$$y^2 \; = \; 2\, p\, x \; , \; p > 0 \; . \tag{16}$$

Bod $V = [0; 0]$ sa nazýva *vrchol* paraboly, bod $F = [0; p/2]$ je jej *ohnisko.*

Veta: *Parabola (16) je množina tých bodov roviny, ktoré majú od jej ohniska* $F = [\frac{p}{2}; 0]$ *a od riadiacej priamky* $x + \frac{p}{2} \; = \; 0$ *rovnakú vzdialenosť.*

Dôkaz: Vzdialenosť bodu $P = [x; y]$ od riadiacej priamky resp. od ohniska je rovná (pozri Obr. 3c):

$$x + \frac{p}{2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\,.$$

Po umocnení rovnice

$$x + \frac{p}{2} \;=\; \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

dostaneme hneď definičnú rovnicu (16).

Vektory v rovine

Uvažujme priestor $\mathbf{V}_2$ vektorov (orientovaných úsečiek - "šípiek") $\mathbf{x}$, smerujúcich z počiatku $\mathbf{0}$ do bodu $X = [x_1; x_2]$ (zložky bodu X budeme systematicky značiť ako x_1, x_2 miesto x a y). Každému vektoru ("šípke") príradíme 2-zložkový stĺpec

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,. \tag{17}$$

čísla x_1 a x_2 nazveme zložkami vektora $\mathbf{x}$; vektor s nulovými komponentami, odpovedajúci počiatku budeme značiť ako $\mathbf{0}$.

Súčet dvoch vektorov

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,,\ \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

definujeme ako vektor

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

Sčítanie vektorov má názorný geometrický význam: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ je vektor odpovedajúci prepone rovnobežníka so stranami $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Násobenie vektora $\mathbf{x}$ *číslom* $a \in \mathbf{R}$ sa definuje ako vektor $a\mathbf{x}$ so zložkami $a\,x_1$ a $a\,x_2$:

$$a\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Definícia vektorového priestoru

Množina $\mathbf{V}$ je reálny vektorový (lineárny) priestor, ktorého prvky nazývame *vektory*, ak pre súčet vektorov a ich násobenie reálnymi číslami platia nasledovné axiómy:

ak $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ a $a,b \in \mathbf{R}$, potom aj $a\mathbf{x}+b\mathbf{y} \in \mathbf{V}$,

vo $\mathbf{V}$ existuje taký vektor $\mathbf{0}$, že pre každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$,

pre každý vektor $\mathbf{x}$ existuje taký (inverzný) vektor $\mathbf{-x}$, že $\mathbf{x}+(\mathbf{-x})=\mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{y}+\mathbf{x}\,, \\ \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\,, \\ 1.\mathbf{x} = \mathbf{x}, &\qquad 0.\mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \\ a\,(b\mathbf{x}) &= (ab)\,\mathbf{x}\,, \\ (a+b)\mathbf{x} &= a\mathbf{x}+b\mathbf{x}\,, \\ a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= a\mathbf{y}+b\mathbf{y}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Poznámka: Ľahko sa možno presvedčiť, že priestor $\mathbf{V}_2$ (vektorov - šípiek v $\mathbf{E}_2$) s lineárnou kombináciou definovanou v (18) a (19), je v zmysle tejto definície vektorový priestor. Na druhej strane, vektormi v zmysle prvkov vektorového priestoru môžu byť aj iné objekty ako iba vektory - šípky. Napr. polynómy alebo n-tice čísiel s vhodne zadefinovanými pravidlami sčítania a násobenia reálnymi číslami tiež tvoria vektorový priestor, a teda v zmysle definície vektorového priestoru sú tiež vektormi. Ďalej, lineárne priestory môžu byť definované nielen pomocou reálnych čísiel, ale tiež napr. použitím racionálnych, alebo komplexných čísiel. Potom ich nazývame racionálny, resp. komplexný vektorový priestor.

Skalárny súčin dvoch vektorov

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}, \; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rho\cos\beta \\ \rho\sin\beta \end{pmatrix}$$

je reálne číslo $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ definované takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}.\mathbf{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= r\rho(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = r\rho\cos(\alpha - \beta)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Tento vzťah môžme prepísať takto:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}]\cos\varphi\,, \tag{22}$$

kde $\varphi = |\alpha - \beta|$ je uhol medzi "šípkami" odpovedajúcimi vektorom $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, kým $|\mathbf{x}|$ a $|\mathbf{y}|$ označujú *dĺžku vektorov* $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Ak $\mathbf{x}.\mathbf{y} = 0$, hovoríme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ sú ortogonálne.

Vlastnosti skalárneho súčinu. Jednoducho sa možno presvedčiť, že skalárny súčin má nasledujúce vlastnosti:

$$\mathbf{x}.\mathbf{x} \geq 0\,, \text{ a } \mathbf{x}.\mathbf{x} = 0 \text{ len ak } \mathbf{x} = \mathbf{0}\,,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}.\mathbf{y} &= \mathbf{y}.\mathbf{x}\,, \\ (a\mathbf{x}).\mathbf{y} &= a\,(\mathbf{x}.\mathbf{y})\,, \\ (\mathbf{x}+\mathbf{y}).\mathbf{z} &= \mathbf{x}.\mathbf{z}+\mathbf{y}.\mathbf{z}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Dĺžku vektora (tiež *norma vektora*) $\mathbf{x}$ je definovaná vzťahom

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}}\,. \tag{24}$$

V kartézskych a polárnych suradniciach pre dĺžku vektora $\mathbf{x}$ dostávame

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r\,.$$

Ak $|\mathbf{x}| = 1$, vektor sa nazýva normovaný (na jednotku).

Norma vektora spĺňa nasledujúce axiómy:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| \geq 0\,,\ \text{a}\ |\mathbf{x}| &= 0 \text{ len ak } \mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \\ |a\mathbf{x}| &= |a|\,|\mathbf{x}|\,, \\ |\mathbf{x}+\mathbf{y}| &\leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| - \text{ trojuholníková nerovnosť}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Zápis priamky pomocou vektorov. Pretože konce vektorov - "šípiek" odpovedajú bodom v rovine, môžeme priamky vyjadrovať pomocou vektorov:

(i) Parametrický zápis priamky p so smerovým uhlom α, prechádzajúcej bodom $\mathbf{x}_0$:

$$p:\ \mathbf{x} = \mathbf{n}t + \mathbf{x}_0\,, t \in \mathbf{R}\,, \tag{26}$$

kde

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

je vektor jednotkovej dĺžky v smere priamky. Rovnicu (26) môžeme prepísať do tvaru

$$p:\ \mathbf{x} \ = \ \mathbf{a}t' \ + \ \mathbf{x}_0\,, t' \in \mathbf{R}\,, \tag{27}$$

kde sme zaviedli vektor $\mathbf{a} = a\mathbf{n}$ a nový parameter t', pre ktorý platí: $t \ = \ a\,t'$, $a \ > \ 0$.

(ii) Priamku p so smerovým uhlom α a prechádzajúcu bodom $\mathbf{x}_0$ možno zapísať rovnicou

$$\mathbf{x} \in p \ \Leftrightarrow \ \mathbf{m}.(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \ = \ 0\,, \tag{28}$$

kde

$$\mathbf{m} \ = \ \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

je vektor jednotkovej dĺžky kolmý na priamku p. Po vynásobení číslom $b \ > \ 0$ rovnicu (28) môžeme prepísať do všeobecnejšieho tvaru

$$\mathbf{x} \in p \ \Leftrightarrow \ \mathbf{b}.\mathbf{x} \ + \ c \ = \ 0\,, \tag{29}$$

kde $\mathbf{b} \ = \ b\,\mathbf{m}$ a $c \ = \ -\,b\,\mathbf{m}.\mathbf{x}_0$.

Lineárna závislosť systému vektorov. Systém vektorov $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n$ nazveme lineárne závislým, ak existuje také riešenie rovnice

$$a_1\,\mathbf{x}_1 \ + \ a_2\,\mathbf{x}_2 \ + \ \ldots \ + \ a_n\,\mathbf{x}_n \ = \ \mathbf{0}\,, \tag{30}$$

že niektoré z čísiel $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ sú nenulové, t.j. platí $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ > \ 0$.

Ak rovnica (30) má *len triviálne riešenie* $a_1 \ = \ a_2 \ = \ \ldots \ = \ a_n \ = \ 0$, hovoríme, že vektory $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n$ sú lineárne nezávislé. Lineárna závislosť systému vektorov svedčí o tom, že niektoré vektory systému možno vyjadriť prostredníctvom iných vektorov.

Ortonormálna báza v priestore $\mathbf{V}_2$. V priestore $\mathbf{V}_2$ sú ľubovoľné tri vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárne závislé. Existujú ale dvojice vektorov, ktoré sú lineárne nezávislé. Ako príklad lineárne nezávislej dvojice, môžu slúžiť vektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skutočne, rovnica

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

má len triviálne riešenie $a_1 = a_2 = 0$.

Ľubovoľný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_2$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \,.$$

Hovoríme, že vektory $\{\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2\}$ tvoria *bázu* vektorového priestoru $\mathbf{V}_2$. Pre túto bázu platí:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \,, \quad \mathbf{e}_1 \,.\, \mathbf{e}_2 = 0 \,. \tag{31}$$

Takáto báza sa nazýva ortonormálna: všetky bázové vektory sú normované na 1 a rôzne bázové vektory sú navzájom ortogonálne. Zrejme platí

$$x_1 = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{e}_1 \,, \; x_2 = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{e}_2 \,. \tag{32}$$

Ortonormálna báza, t.j. báza, ktorá spĺňa (31), nie je určená jednoznačne. Ľahko sa možno presvedčiť, že aj vektory

$$\mathbf{e}_1' = \cos\varphi \, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \, \mathbf{e}_2 \,,$$

$$\mathbf{e}_2' = -\sin\varphi \, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi \, \mathbf{e}_2 \,, \tag{33}$$

tvoria ortonormálnu bázu.

Lineárne zobrazenie a matice

Zobrazenie vektorov

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\mapsto\; \mathbf{x}' \;=\; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \tag{34}$$

tvaru

$$\begin{aligned} x_1 \;&\mapsto\; A_{11}\,x_1 \;+\; A_{12}\,x_2 \;=\; x_1'\,, \\ x_2 \;&\mapsto\; A_{21}\,x_1 \;+\; A_{22}\,x_2 \;=\; x_2'\,, \end{aligned} \tag{35}$$

nazveme *lineárnym zobrazením* vo $\mathbf{V}_2$ zadaným pomocou 2×2 reálnej matice (2×2 tabuľky reálnych čísiel):

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}\;, & A_{12} \\ A_{21}\;, & A_{22} \end{pmatrix}\;,\; A_{ij} \;\in\; \mathbf{R}\,. \tag{36}$$

Rovnicu (35) vyjadrujeme v maticovom zápise takto:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\equiv\; \begin{pmatrix} A_{11}\,x_1 \;+\; A_{12}\,x_2 \\ A_{21}\,x_1 \;+\; A_{22}\,x_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\,. \tag{37}$$

Ľavá strana tohto dôležitého vzťahu *definuje* násobenie 2×2 matice A a 2-zložkového vektora (stĺpca) $\mathbf{x}$. Rovnicu (37) stručne zapisujeme takto:

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{x}'\,. \tag{38}$$

Pôsobme teraz maticou na jednotlivé vektory štandardnej bázy:

$$A\,\mathbf{e}_1 \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \;=\; A_{11}\,\mathbf{e}_1 \;+\; A_{21}\,\mathbf{e}_2\,,$$

$$A\,\mathbf{e}_2 \;=\; \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \;=\; A_{12}\,\mathbf{e}_1 \,+\, A_{22}\,\mathbf{e}_2\,.$$

Ak skalárne vynásobíme tieto vektory bázovými vektormi, prídeme k dôležitému vyjadreniu ľubovoľného prvku matice A:

$$A_{ij} \;=\; \mathbf{e}_i.(A\,\mathbf{e}_j)\,, \quad i, j \;=\; 1, 2\,. \tag{39}$$

Tento zápis znamená, že formula pre A_{ij} platí pre všetky možné kombinácie indexov $i \,=\, 1, 2$ a $j \,=\, 1, 2$.

Algebra matíc. Množina 2×2 matíc je *algebra*, lebo sú v nej definované dve operácie:

(i) *Lineárna kombinácia* $a\,A \,+\, b\,B$ matíc

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{12} \\ A_{21}\,, & A_{22} \end{pmatrix}, \; B \;=\; \begin{pmatrix} B_{11}\,, & B_{12} \\ B_{21}\,, & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

ktorá je definovaná ako matica s prvkami $a\,A_{ij} \,+\, b\,B_{ij}$:

$$a\,A + b\,B \;=\; \begin{pmatrix} a\,A_{11} \,+\, b\,B_{11}\,, & a\,A_{12} \,+\, b\,B_{12} \\ a\,A_{21} \,+\, b\,B_{21}\,, & a\,A_{22} \,+\, b\,B_{22} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Vzhľadom k takto zavedenej lineárnej kombinácii matice tvoria vektorový (lineárny) priestor, v ktorom úlohu počiatku hrá *nulová matica*

$$O \;=\; \begin{pmatrix} 0\,, & 0 \\ 0\,, & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

(ii) *Súčin* $A\,B$ matice A s maticou B je definovaný ako matica

$$A\,B \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}\,B_{11} \,+\, A_{12}\,B_{21}\,, & A_{11}\,B_{12} \,+\, A_{12}\,B_{22} \\ A_{21}\,B_{11} \,+\, A_{22}\,B_{21}\,, & A_{21}\,B_{12} \,+\, A_{22}\,B_{22} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Poznamenajme, že maticový súčin je asociatívny:

$$A\,(B\,C) \;=\; (A\,B)\,C \;\equiv\; A\,B\,C\,.$$

Transponovaná matica A^t k matici A je matica

$$A^t \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{21} \\ A_{12}\,, & A_{22} \end{pmatrix}\,, \tag{44}$$

v ktorej riadky a stĺpce sú navzájom vymenené. Transponovaná matica A^t má prvky $A^t_{ij} \;=\; A_{ji}$, t.j. A^t dostaneme z matice A otočením okolo hlavnej diagonály (A_{11}, A_{22}).

Pre transpozíciu súčinu matíc máme:

$$(A\,B)^t \;=\; B^t\,A^t\,.$$

Pre skalárny súčin platí nasledujúca identita:

$$\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; (A^t\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}\,. \tag{45}$$

Dokázať sa dá jednoducho priamym dosadením:

$$\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; x_1\,(A_{11}\,y_1 \,+\, A_{12}\,y_2) \;+\; x_2\,(A_{21}\,y_1 \,+\, A_{22}\,y_2)$$

$$=\; (x_1\,A_{11} \,+\, x_2\,A_{21})\,y_1 \;+\; (x_1\,A_{12} \,+\, x_2\,A_{22})\,y_2 \;\;=\; (A^t\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}\,. \tag{46}$$

špeciálne pre symetrickú maticu máme,

$$\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; (A\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}\,. \tag{47}$$

Jednotková matica (s 1-mi na diagonále a 0-mi mimo nej)

$$I \;=\; \begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

hrá úlohu "jednotky" pri maticovom súčine: $I\,A \;=\; A\,I \;=\; A$.

Inverzná matica a determinant matice. Hovoríme, že matica A je *regulárna (invertibilná)*, ak k nej existuje *inverzná matica* A^{-1}, pre ktorú platí:

$$A\,A^{-1} \;=\; A^{-1}\,A \;=\; I\,. \tag{49}$$

Pokiaľ matice A a B sú invertibilné, ich súčin je invertibilný a platí:

$$(A\,B)^{-1} \;=\; B^{-1}\,A^{-1}\,.$$

Determinant matice je reálne číslo priradené matici A predpisom

$$\det A \;\equiv\; \begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12} \\ A_{21}\,, & A_{22} \end{vmatrix} \;=\; A_{11}\,A_{22} \;-\; A_{12}\,A_{21}\,. \tag{50}$$

Druhý zápis tvaru $|A_{ij}|$ sa používa vtedy, keď potrebujeme explicitne zdôrazniť hodnoty maticových prvkov.

Determinant má nasledujúce vlastnosti:

(i) Determinant transponovanej matice A^t je rovný determinantu matice A:

$$\det A^t \;=\; \det A\,. \tag{51}$$

(ii) Determinat zmení znamienko, ak vymeníme oba riadky (stĺpce).

(iii) Determinat sa nezmení, ak k niektorému riadku (stĺpcu) pripočítame násobok druhého riadku (stĺpca).

Dôkaz týchto vlastností plynie priamo z formuly (50)

(iv) Determinant súčinu dvoch matíc sa rovná súčinu ich determinantov:

$$\det\,(A\,B) \;=\; \det A \det B\,. \tag{52}$$

Dôkaz: Z definícií súčinu matíc a determinantu dostaneme:

$$\det\,(A\,B) \;=\; (A_{11}\,B_{11} \;+\; A_{12}\,B_{21})\,(A_{21}\,B_{12} \;+\; A_{22}\,B_{22})$$

$$- \,(A_{11}\,B_{12} \,+\, A_{12}\,B_{22})\,(A_{21}\,B_{11} \,+\, A_{22}\,B_{21})$$

$$= \,(A_{11}\,A_{22} \,-\, A_{12}\,A_{21})\,(B_{11}\,B_{22} \,-\, B_{12}\,B_{21}) \,=\, \det A \det B\,.$$

(v) Matica A je invertibilná práve vtedy, keď $\det A \neq 0$. Inverzná matica je daná formulou:

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{22}\,, & -A_{12} \\ -A_{21}\,, & A_{11} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Dôkaz: Skutočne, z formúl (43) a (53) máme:

$$A\,A^{-1} \;=\; \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}\,A_{22} \,-\, A_{12}\,A_{21}\,, & A_{11}\,A_{12} \,-\, A_{12}\,A_{11} \\ A_{21}\,A_{22} \,-\, A_{22}\,A_{21}, & A_{21}\,A_{12} \,-\, A_{22}\,A_{11} \end{pmatrix} \;=\; I\,.$$

Formula $A^{-1}\,A \,=\, I$ sa dokáže analogicky.

Sústavy lineárnych rovníc

V tejto časti budeme sa zaujímať o riešenie sústavy dvoch lineárnych algebraických rovníc

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 \,+\, A_{12}\,x_2 \,&=\, b_1\,, \\ A_{21}\,x_1 \,+\, A_{22}\,x_2 \,&=\, b_2\,, \end{aligned} \tag{54}$$

pre neznáme x_1, x_2. Čísla b_1, b_2 sa nazývajú pravou stranou sústavy rovníc. Ak je pravá strana nulová, hovoríme o homogénnej sústave rovníc; ak je nenulová, sústava sa nazýva nehomogénna.

Vo vektorovom (maticovom) zápise sústavu (54) môžme zapísať ako vektorovú rovnicu:

$$A\,\mathbf{x} \,=\, \mathbf{b}\,. \tag{55}$$

Riešenie sústavy pomocou determinantov.

(i) Ak $D \equiv \det A \neq 0$ sústava má *práve jedno* riešenie dané formulami:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}\,,\; x_2 = \frac{D_2}{D}\,,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1\,, & A_{12} \\ b_2\,, & A_{22} \end{vmatrix}\,,\; D_2 = \begin{vmatrix} A_{11}\,, & b_1 \\ A_{21}\,, & b_2 \end{vmatrix}\,. \tag{56}$$

Teda D_1 a D_2 sú determinanty matíc, ktoré sa dostanú tak, že v matici A nahradíme 1. resp. 2. stĺpec zložkami vektora $\mathbf{b}$ na pravej strane rovnice.

Dôkaz: Vynásobme rovnicu (55) maticou A^{-1}: $\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}$. Ak použijeme vzorec (53) a vyčíslime $A^{-1}\,\mathbf{b}$, hneď dostaneme hľadané riešenie (56).

(ii) Prípad $D = 0$ a $D_1 = D_2 = 0$ diskutujeme nižšie.

(iii) Ak $D = 0$ a niektoré z $D_j \neq 0$, sústava *nemá* riešenie.

Riešenie sústavy pomocou rozšírenej matice.

Sústavu lineárnych algebraických rovníc (54) zapíšeme ako 2×3 rozšírenú maticu (tabuľku čísiel):

$$(A\,|\,b) \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\,| & b_1 \\ A_{21} & A_{22}\,| & b_2 \end{pmatrix}\,. \tag{57}$$

Nejedná sa o nič iné, ako o maximálne úsporný zápis sústavy (54). Neznáme x_1 a x_2 explicitne nevypisujeme, vieme ale že:

- x_1 resp. x_2 násobia 1. resp 2. stĺpec, potom
- oba stĺpce sčítame
- a súčty jednotlivých riadkov sa rovnajú príslušným členom v treťom stĺpci.

Veta: Sústava lineárnych algebraických rovníc popísaných rozšírenou maticou $(A\,|\,b)$ má riešenie práve vtedy, keď počet lineárne nezávislých riadkov matice sústavy A sa rovná počtu lineárne nezávislých riadkov rozšírenej matice $(A\,|\,b)$.

Komentár:

(i) Ak oba riadky A aj $(A\,|\,b)$ sú lineárne nezávislé, tak $D = \det A \neq 0$ a existuje jednoznačné riešenie sústavy dané (56).

(ii) Ak $(A\,|\,b)$ má len jeden lineárne nezávislý riadok (a druhý je jeho násobkom), potom sa sústava redukuje na jednu nezávislá rovnicu (povedzme, danú j-tym riadkom)

$$A_{j1}\,x_1 \;+\; A_{j2}\,x_2 \;=\; b_j\,. \tag{58}$$

Tento vzťah reprezentuje rovnicu určitej priamky p. Riešení je nekonečne veľa: každý bod na p rieši sústavu. V tomto prípade $D = 0$ a $D_1 = D_2 = 0$.

(iii) Ak rozšírená matica $(A\,|\,b)$ má dva lineárne nezávislé riadky, kým A len jeden, potom sústava nemá riešenie. V tomto prípade $D = 0$ a aspoň jeden z determinantov D_1 a D_2 je rôzny od nuly.

Príklad 1. Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 &= +1 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c} +1\,, & -1 & -1 \\ +2\,, & +3 & +1 \end{array}\right)$$

Riešenie: Na pravej strane máme sústavu zapísanú pomocou rozšírenej matice. Aby sme eliminovali premennú x_1 v druhej rovnici, odčítajme dvojnásobok prvej rovnice od druhej. Na úrovni rozšírenej matice pod diagonálou sa objaví nula:

$$\left(\begin{array}{cc|c} +1\,, & -1 & -1 \\ +2\,, & +3 & +1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} +1\,, & -1 & -1 \\ 0\,, & +5 & +3 \end{array}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 5\,x_2 &= +3 \end{aligned}$$

(symbol "$\sim$" označuje, že obe rozšírené matice odpovedajú ekvivalentným sústavám rovníc). Teraz môžme z druhej rovnice priamo vyjadriť x_2 a po dosadení do prvej rovnice aj x_1:

$$x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_1 = x_2 - 1 = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}.$$

Príklad 2. Uvažujme teraz dve modifikácie predchádzajúceho príkladu zadané rozšírenými maticami:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} +1, & -1 & | & -1 \\ -2, & +2 & | & +2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} +1, & -1 & | & -1 \\ -2, & +2 & | & +7 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Postupujme rovnako ako predtým a odčítajme dvojnásobok prvého riadku od druhého. Dostaneme,

$$(a) \quad \begin{pmatrix} +1, & -1 & | & -1 \\ 0, & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 - x_2 = -1 \\ 0 = 0 \end{array},$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} +1, & 1 & | & -1 \\ 0, & 0 & | & +5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 - x_2 = -1 \\ 0 = +5 \end{array},.$$

(a) Rozšírená matica $(A\,|\,b)$ má dva lineárne závislé riadky, takže vhodným odčítaním vynulujeme druhý riadok: prvému riadku odpovedá rovnica priamky, kým druhý riadok predstavuje identitu $0 = 0$. Sústava má nekonečne veľa riešení - riešia ju všetky body priamky.

(b) Rozšírená matica $(A\,|\,b)$ má dva lineárne nezávislé riadky, kým matica A má lineárne závislé riadky: prvému riadku odpovedá netriviálna rovnica, kým druhý riadok predstavuje neplatný vzťah $0 = +5$. Sústava nemá riešenie.

Grupa regulárnych matíc

Maticu A zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ nazveme *regulárnou*, ak jej determinant je nenulový: $\det A \neq 0$.

Regulárne zobrazenia zobrazujú priestor $\mathbf{V}_2$ jednoznačne na seba:

• ak $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ potom $A\,\mathbf{x}_1 \neq A\,\mathbf{x}_2$, a naviac,

• pre každé $\mathbf{x}' \in \mathbf{V}_2$ existuje také $\mathbf{x}$, že platí: $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$,

• regulárne zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto B\,\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}' \mapsto A\,\mathbf{x}'$ môžeme skladať: zložené zobrazenie je regulárne a odpovedá mu súčin matíc: $A\,(B\,\mathbf{x}) = (A\,B)\,\mathbf{x}$.

V množine regulárnych matíc $\mathcal{G}$ môžeme definovať operáciu - maticový súčin:

$$A\,,\,B \in \mathcal{G} \;\rightarrow\; A\,B \in \mathcal{G}\,,$$

ktorý má nasledujúce vlastnosti:

(i) *Asociatívnosť.* Pre ľubovoľnú trojicu $A\,(B\,C)$ z $\mathcal{G}$ platí: $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$;

(ii) *Existencia jednotkového prvku I.* Pre ľubovoľný prvok A z $\mathcal{G}$ platí: $A\,I = I\,A = A$;

(iii) *Existencia inverzného prvku.* Ku každému prvku A z $\mathcal{G}$ existuje A^{-1}, pre ktorý platí: $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$.

Definícia grupy a podgrupy. Množina $\mathcal{G}$ je *grupa* ak je v nej definovaný súčin s s vlastnosťami (i) - (iii). Podmnožina $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ je podgrupa grupy $\mathcal{G}$ ak grupovvý súčin zúžený na $\mathcal{G}'$ má vlastnosti (i) - (iii).

Poznámka 1. Množina regulárnych matíc s nenulovým determinantom je grupa vzhľadom k maticovému súčinu, ktorá sa zvykne označovať ako $\mathcal{G} = GL(2, \mathbf{R})$: jednotková matica odpovedá jednotkovému prvku grupy a inverzná matica odpovedá inverznému prvku. Je to dôsledkom toho, že

$$\det A \neq 0 \;\text{ a }\; \det B \neq 0 \quad \Leftrightarrow\; \det(AB) = \det A \det B \neq 0 \, .$$

Poznámka 2. Jej podmožina matíc s jednotkovým determinantom je grupa, ktorá sa zvykne označovať ako $\mathcal{G}' = SL(2, \mathbf{R})$. Je dôsledkom toho, že vzťah $\det(AB) = \det A \det B$ je konzistentný s podmienkou $\det A = 1$.

Poznámka 3. Matica A sa nazýva ortogonálna, ak pre jej transponovanú maticu A^t platí: $A^t A = I$. Množina ortogonálnych matíc tvorí grupu $\mathcal{H}$, ktorá sa zvykne označovať ako $O(2, \mathbf{R})$ alebo jednoducho $O(2)$. Jedná o grupu, čo plynie z toho že $A^t A = I$ a $B^t B = I$ implikuje

$$(A\,B)^t\,(A\,B) = B^t\,A^t\,A\,B = B^t\,(A^t\,A)\,B = B^t\,B = I \, .$$

Poznámka 4. Zo vzťahu $A^t A = I$ vyplýva $\det A^t \det A = (\det A)^2 = 1$. Preto, $\det A = \pm 1$. Ľahko sa možno presvedčiť, že ortogonálne matice s $\det A = +1$, tvoria podgrupu $\mathcal{H}' = SO(2)$ grupy $\mathcal{H} = O(2)$, ktorá sa nazýva sa grupou vlastných rotácií roviny. Každá matica $A \in SO(2)$ odpovedá rotácii roviny o nejaký uhol α:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha \, , & \sin\alpha \\ -\sin\alpha \, , & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Poznámka 5. Matice z grupy rotácií s determinantom rovným -1 netvoria podgrupu: súčin dvoch takýchto matíc je matica s determinantom $+1$. Každá ortogonálna matica A' s determinantom rovným -1 ale môže byť zapísaná ako súčin matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 \, , & 0 \\ 0 \, , & -1 \end{pmatrix} ,$$

odpovedajúcej priestorovej reflexii (odrazu v zrkadle umiestnenom v 1. súradnicovej osi v rovine) a vlastnej rotácie A: $A' = E\,A$, kde $\det A = +1$.

Poznámka 6. Grupa $SO(2)$ je podgrupou ako grupy $SL(2,\mathbf{R})$, tak aj grupy $O(2)$. Naviac platí: $SO(2) = SL(2,\mathbf{R}) \bigcap O(2)$.

Všeobecné bázy vo vektorovom priestore

Uvažujme lineárne zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ generované regulárnou maticou

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}\ , & A_{12} \\ A_{21}\ , & A_{22} \end{pmatrix} .$$

Pôsobením na štandardnú ortonormálnu bázu

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

obdržíme dvojicu vektorov

$$\mathbf{f}_1 = A\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} A_{11}\ , & A_{12} \\ A_{21}\ , & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{f}_2 = A\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} A_{11}\ , & A_{12} \\ A_{21}\ , & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} .$$

Dvojica vektorov $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ predstavuje všeobecnú (neortonormálnu) bázu vo vektorovom priestore, t.j. každý vektor $\mathbf{x}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$:

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'_1\mathbf{f}_1 + x'_2\,\mathbf{f}_2$$

$$= x'_1 \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} + x'_2 \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\,x'_1 + A_{12}\,x'_2 \\ A_{21}\,x'_1 + A_{22}\,x'_2 \end{pmatrix} .$$

Vidíme, že koeficienty rozvoja x'_1 a x'_2 vektora v neortonormálnej báze sú určené rovnicami

$$\begin{aligned} A_{11}\, x'_1 \,+\, A_{12}\, x'_2 \;&=\; x_1 \,, \\ A_{21}\, x'_1 \,+\, A_{22}\, x'_2 \;&=\; x_2 \,. \end{aligned}$$

Vďaka tomu, že A je regulárna matica, táto sústava má jednoznačné riešenie pri ľubovoľnom x_1 a x_2.

Diagonalizácia symetrickej matice

Vektor $\mathbf{x}$ sa nazýva *normovaným vlastným vektorom* matice A k vlastnej hodnote λ, ak existuje *reálne* číslo λ tak, že je splnená rovnica

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \lambda\,\mathbf{x} \quad\Leftrightarrow\quad (A \,-\, \lambda\, I)\,\mathbf{x} \;=\; 0\,, \quad |\mathbf{x}| \,=\, 1\,. \tag{59}$$

Jedná sa o homogénnu sústavu lineárnych algebraických rovníc pre zložky vektora $\mathbf{x}$. Aby táto sústavu rovníc mala nenulové riešenie, determinant sústavy sa musí rovnať nule:

$$\det(A \,-\, \lambda\, I) \;=\; 0\,.$$

Tento vzťah je kvadratická rovnica pre neznámu λ. Takáto rovnica ale nemusí mať požadované reálne riešenie. V ďalšom sa preto obmedzíme na symetrické matice, ktoré ako uvidíme, majú reálne vlastné hodnoty.

Vlastné vektory a hodnoty symetrickej matice

Ľubovoľnú symetrickú maticu A môžeme (vhodne) parametrizovať takto:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a \,+\, r\, \cos\alpha\,, & r\, \sin\alpha \\ r\, \sin\alpha\,, & a \,-\, r\, \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Podmienka na vlastnú hodnotu nadobúda tvar

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda + r \cos\alpha \,, & r \sin\alpha \\ r \sin\alpha & , a - \lambda - r \cos\alpha \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 - r^2 \,.$$

Vlastné hodnoty matice A teda sú: $\lambda = a \pm r$. Môžu nastať dva prípady:

(i) Ak $r = 0$, potom $A = a\,I$. Všetky vektory sú vlastné vektory k hodnote $\lambda = a$: $A\,\mathbf{x} = a\,\mathbf{x}$. Môžeme vybrať napríklad štandardnú bázu ako ortonormálny systém dvoch vlastných vektorov:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(ii) Ak $r \neq 0$, tak vlastné vektory sú riešením rovnice

$$\begin{pmatrix} a + r \cos\alpha \,, & r \sin\alpha \\ r \sin\alpha \,, & a - r \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a \pm r) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ,$$

ktorá sa redukuje na sústavu dvoch homogénnych algebraických rovníc:

$$\cos\alpha \, x_1 + \sin\alpha \, x_2 = \pm x_1 \,,$$

$$\sin\alpha \, x_1 - \cos\alpha \, x_2 = \pm x_2 \,.$$

Obe rovnice nie sú nezávislé (vynásobte prvú rovnicu s $\cos\alpha$, druhú so $\sin\alpha$ a sčítajte). Rovnice so znamienkom "$+$" resp. "$-$" majú normované riešenie:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} , \quad \text{resp.} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} .$$

Poznámka: Ľahko sa možno presvedčiť, že oba vlastné vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ sú normované a navzájom ortogonálne: $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2| = 1$ a $\mathbf{x}_1 \,.\, \mathbf{x}_2 = 0$. Nie je to náhoda, lebo platí

Veta: *Vlastné vektory symetrickej matice k rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne.*

Dôkaz: Rovnice

$$A\,\mathbf{x}_1 \;=\; \lambda_1\,\mathbf{x}_1 \;\;\text{resp.}\;\; A\,\mathbf{x}_2 \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_2\,,$$

vynásobme $\mathbf{x}_2$ resp. $\mathbf{x}_1$. Dostaneme rovnice

$$\mathbf{x}_2.(A\,\mathbf{x}_1) \;=\; \lambda_1\,\mathbf{x}_2.\mathbf{x}_1 \;\;\text{resp.}\;\; \mathbf{x}_1.(A\,\mathbf{x}_2) \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2\,.$$

Odčítaním oboch týchto rovníc obdržíme vzťah:

$$(\lambda_1 \,-\, \lambda_2)\,\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2 \;=\; 0\,,$$

kde sme využili to, že pre symetrickú maticu platí $\mathbf{x}_2.(A\,\mathbf{x}_1) \;=\; \mathbf{x}_1.(A\,\mathbf{x}_2)$. Pretože, podľa predpokladu $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak musí byť $\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2 \;=\; 0$.

V ortonormálnej báze svojich vlastných vektorov

$$\mathbf{x}_1 \;\equiv\; \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}\,,\;\; \mathbf{x}_2 \;\equiv\; \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}\,,$$

každá symetrická matica A je diagonálna s vlastnými hodnotami na diagonále. Skutočne, pre maticové prvky A v báze vlastných vektorov platí

$$\Lambda_{ij} \;\equiv\; \mathbf{x}_i\,.\,(A\mathbf{x}_j) \;=\; \lambda_j\,\mathbf{x}_i\,.\,\mathbf{x}_j\,.$$

Ak využijeme ortonormalitu bázy $\{\mathbf{x}_1\,\mathbf{x}_2\}$, hneď dostaneme:

$$\Lambda_{12} \;=\; \Lambda_{21} \;=\; 0\,,$$

$$\Lambda_{11} \;=\; \lambda_1\,,\;\; \Lambda_{22} \;=\; \lambda_2\,.$$

Príslušnú diagonálnu maticu Λ dostaneme tiež tak, že maticu A vynásobíme sprava maticou X s prvkami x_{ij} (ktoré odpovedajú zložkám vlastných vektorov $\{\mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2\}$ zavedených vyššie) a zľava transponovanou maticou X^t. Teda

$$X^t\, A\, X \;=\; \Lambda\,, \text{ resp. } \; A\, X \;=\; X\, \Lambda \tag{60}$$

Posledný vzťah je plynie z ortogonality $X^t\, X = X\, X^t = I$ matice X. Tieto rovnice detailne vyzerajú takto:

$$\begin{pmatrix} x_{11}\,, & x_{21} \\ x_{12}\,, & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{12} \\ A_{21}\,, & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}\,, & x_{12} \\ x_{21}\,, & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\,, & 0 \\ 0\,, & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{12} \\ A_{21}\,, & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}\,, & x_{12} \\ x_{21}\,, & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}\,, & x_{12} \\ x_{21}\,, & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\,, & 0 \\ 0\,, & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Stĺpce poslednej maticovej rovnice odpovedajú jednotlivým rovniciam na vlastné hodnoty: $A\,\mathbf{x}_1 \;=\; \lambda_1\,\mathbf{x}_1$ a $A\,\mathbf{x}_2 \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_2$.

Komplexné čísla.

Teleso komplexných čísiel **C** môžeme zaviesť ako množinu reálnych matíc špeciálneho tvaru:

$$X \;=\; \begin{pmatrix} x\,, & x' \\ -x'\,, & x \end{pmatrix} \;=\; x\, I \;+\; x'\, E\,.$$

Ich lineárna kombinácia je opäť matica tohto tvaru.

Matice

$$I \;=\; \begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}, \quad E \;=\; \begin{pmatrix} 0\,, & 1 \\ -1\,, & 0 \end{pmatrix},$$

spĺňajú vzťahy:

$$I^2 = I\,,\; I\,E = E\,I = E\,, E^2 = -I\,.$$

Lineárna kombinácia dvoch komplexných čísiel $X = x\,I + x'\,E$ a $Y = y\,I + y'\,E$ je opäť matica tohto tvaru:

$$X + Y = (x + y)\,I + (x' + y')\,E\,.$$

Pre ich súčin ľahko dostaneme:

$$X\,Y = (x\,y - x'\,y')\,I + (x\,y' + x'y)\,E\;.$$

číslo $\bar{X} = X^t = x\,I - x'\,E$ sa nazýva komplexne združené k číslu $X = x\,I + x'\,E$. Nezáporné číslo $|X| = \sqrt{\bar{X}\,X} = \sqrt{x^2 + x'^2\,X}$ sa nazýva absolútnou hodnotou komplexného čísla X.

Kvôli skráteniu zápisu (a aj z historických dôvodov) symbol I sa nahradzuje "1"(a zväčša sa vynecháva) a symbol E sa nahrádza imaginárnou jednotkou "i" ktoré pri násobení sa správajú rovnáko ako I a E:

$$1^2 = 1\,,\; 1.\mathrm{i} = \mathrm{i}.1 = \mathrm{i}\,,\; \mathrm{i}^2 = -1\;.$$

Píšeme, $X = x + \mathrm{i}\,x'$. Jeho súčin s komplexným číslom $Y = y + \mathrm{i}\,y'$ sa zapíše takto:

$$X\,Y = (x\,y - x'\,y') + \mathrm{i}\,(x\,y' + x'y)\;.$$

Ak $X = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ (kde α je reálny parameter), tak $|X| = 1$.

Každé komplexné číslo $X = x + \mathrm{i}\,x'$ je jednoznačne zadané dvojicou reálnych čísiel x a x', ktoré môžeme znázorniť ako bod $[x; x']$ reálnej roviny $\mathbf{R}^2$ resp. ako vektor $\mathbf{x}$ v rovine smerujúci z počiatku do koncového bodu $[x; x']$. Značenie je také, že

1) $|X| = |\mathbf{x}|$ (naľavo je absolútna hodnota komplexného čísla a napravo vystupuje dĺžka vektora),

2) vynásobeniu reálnym číslom $a : \ X \ \to \ a\,X$ odpovedá násobenie vektora číslom $a : \ \mathbf{x} \ \to \ a\,\mathbf{x}$,

3) vynásobeniu komplexným číslom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} : \ X \ \to \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,X$ odpovedá rotácia roviny $\mathbf{R}^2$ o uhol α:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha \ , & \sin\alpha \\ -\sin\alpha \ , & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \ .$$

2 Lineárna algebra a geometria v priestore

Súradnice v priestore

Najprv zavedieme pravouhlé (kartézske) súradnice v Euklidovskom priestore:

(i) Zvolíme v priestore rovinu a v nej počiatok $\mathbf{0}$, ktorým vedieme dve priamky: x-ovú os a na ňu kolmú y-ovú os; počiatku $\mathbf{0}$ odpovedá bod $x = 0$ na x-ovej číselnej osi a bod $y = 0$ na y-ovej číselnej osi.

(ii) Počiatkom $\mathbf{0}$ vedieme ďalšiu priamku z-ovú os kolmú na x-ovú aj y-ovú os; počiatku odpovedá bod $z = 0$ na z-ovej číselnej osi.

(iii) Ľubovoľný bod P priestoru stotožníme s trojicou reálnych čísiel $P = [x_P; y_P; z_P]$, kde x_P, y_P a z_P označujú po rade x-ovú, y-ovú a z-ovú súradnicu bodu P na príslušnej osi.

Vzdialenosť dvoch bodov v priestore. Uvažujme teraz dva body v priestore $P = [x_P; y_P; z_P]$ a $Q = [x_Q; y_Q; z_Q]$. Ich vzdialenosť $d(P, Q)$ sa definuje ako dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka PQR, $R = [x_Q; y_Q; z_P]$. Podľa Pythagorovej vety

$$d(P,Q) \;=\; \sqrt{(x_P - x_Q)^2 \,+\, (y_P - y_Q)^2 \,+\, (z_P - z_Q)^2}\;. \tag{61}$$

Euklidovský priestor $\mathbf{E}^3$ je množina trojíc reálnych čísiel $\mathbf{R}^3$ opatrená pojmom vzdialenosti (61).

Sférické súradnice definujeme takto:

(i) Okolo počiatku $\mathbf{0} = [0; 0; 0]$ nakreslíme jednotkovú sféru: jej bod $N = [0; 0; +1]$ nazveme severným pólom a bod $S = [0; 0; -1]$ nazveme južným pólom. Bodom na rovníku priradíme polárny uhol $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ v (xy)-ovej rovine. Body na rovníku majú súradnice: $[\cos\varphi; \sin\varphi; 0]$.

(ii) Všeobecnému bodu sféry priraďujeme okrem polárneho uhla aj azimutálny uhol $\theta \in [0, \pi]$ (uhol medzi bodom a severným pólom). Ľubovoľný bod na sfére je potom daný ako: $[\cos\varphi\ \sin\theta; \sin\varphi\ \sin\theta; \cos\theta]$.

(iii) Každý bod $P = [x; y; z] \neq \mathbf{0}$ priestoru parametrizujeme jeho *sférickými uhlami* (polárnym uhlom φ a azimutálnym uhlom θ) a vzdialenosťou od počiatku $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$x \ = \ r\ \cos\varphi\ \sin\theta\ ,\ y \ = \ r\ \sin\varphi\ \sin\theta\ ,\ z \ = \ r\ \cos\theta\ . \tag{62}$$

Sférické súradnice sú dobre definované okrem počiatku, v ktorom síce $r = 0$ ale sférické uhly φ a θ nie sú definované!

Vektory v priestore

Pri vyšetrovaní dôležitých lineárnych objektov v trojrozmernom priestore (bodov, priamok a rovín) a ich vzájomnnej polohy je výhodné využívať formalizmus trojrozmerných vektorov. Preto tento formalizmus uvedieme ako prvý.

Priestor $\mathbf{V}_3$ trojrozmerných vektorov definujeme ako priestor orientovaných úsečiek - "šípiek") $\mathbf{x}$ smerujúcich z počiatku $\mathbf{0} = [0; 0; 0]$ do bodu $X = [x_1; x_2; x_3]$ (zložky bodu X budeme opäť systematicky značiť ako x_1, x_2, x_3 miesto x, y a z. Každému vektoru ("šípke") príradíme 3-zložkový stĺpec

$$\mathbf{x} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \tag{63}$$

Čísla x_1, x_2 a x_3 nazveme zložkami vektora $\mathbf{x}$; vektor s nulovými komponentami, odpovedajúci počiatku, budeme značiť ako $\mathbf{0}$.

Súčet dvoch vektorov

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,,\; \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

definujeme podobne ako predtým:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \,. \tag{64}$$

Násobenie vektora $\mathbf{x}$ *číslom* $a \in \mathbf{R}$ sa definuje ako vektor:

$$a\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \\ a\,x_3 \end{pmatrix} \,. \tag{65}$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že priestor $\mathbf{V}_3$ (vektorov - šípiek v $\mathbf{E}_3$) s lineárnou kombináciou definovanou v (64) a (65), je vektorový priestor (v zmysle definície uvedenej v predchádzajúcej časti).

Lineárna závislosť systému vektorov sa definuje rovnako ako predtým: Systém vektorov $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ nazveme lineárne závislým, ak existuje také riešenie rovnice

$$a_1\,\mathbf{x}_1 \;+\; a_2\,\mathbf{x}_2 \;+\; \ldots \;+\; a_n\,\mathbf{x}_n \;=\; 0\,, \tag{66}$$

že niektoré z čísiel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú nenulové: $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Ak táto rovnica má *len triviálne riešenie* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, hovoríme, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sú lineárne nezávislé.

Ortonormálna báza v priestore. Vo $\mathbf{V}_3$ ľubovoľné štyri vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$ sú lineárne závislé. *Štandardná báza* v trojrozmernom priestore

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

reprezentuje trojicu vektorov, ktoré sú lineárne nezávislé. Ľubovoľný vektor $\mathbf{x}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov štandardnej bázy:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\,.$$

Skalárny súčin dvoch vektorov

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

je reálne číslo $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ definované ako:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\,y_i\,. \tag{68}$$

Je dobré si postupne zvykať na zápis súčtov pomocou súm (je to zápis, ktorý je rovnako pracný vo vektorových priestoroch ľubovoľnej dimenzie).

Ak $\mathbf{x}.\mathbf{y} = 0$, hovoríme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ sú ortogonálne.

Jednoducho sa možno presvedčiť, že (68) spĺňa axiómy skalárneho súčinu (23).

Dĺžka vektora (*norma vektora*) $\mathbf{x}$ definovaná vzťahom

$$|\mathbf{x}| \;=\; \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} \;=\; \sqrt{x_1^2 \,+\, x_2^2 \,+\, x_2^3}\,, \tag{69}$$

tiež spĺňa obvyklé axiómy (24). Ak $|\mathbf{x}| \;=\; 1$, vektor sa nazýva normovaný (na jednotku).

Vektory štandardnej bázy $\mathbf{e}_i$, $i \;=\; 1, 2, 3$ tvoria *ortonormálnu bázu* lebo platí:

$$|\mathbf{e}_i|^2 \;=\; \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_i \;=\; 1\,, \quad i \;=\; 1, 2, 3\,,$$

$$\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j \;=\; 0\,, \quad \text{pre } i \neq j\,.$$

Tieto vzťahy sa zvyknú kompaktne zapisovať takto:

$$\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j \;=\; \delta_{ij}\,,$$

kde δ_{ij} je *Kroneckerov symbol delta* definovaný ako

$$\delta_{ii} \;=\; 1\,, \quad \delta_{ij} \;=\; 0\,, \quad \text{pre } i \neq j\,.$$

Poznámka: Pre skalárny súčin dvoch vektorov platí formula, podľa ktorej je rovný súčinu dĺžok vektorov a kosínusu zovretého uhla:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} \;=\; |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos\theta\,. \tag{70}$$

Tento vzťah evidentne platí prípade vektora $\mathbf{x}$ v smere 3-tej osi a vektora $\mathbf{y}$

orientovaného v ľubovoľnom smere danom sférickými uhlami θ a φ:

$$\mathbf{x} \;=\; |\mathbf{x}| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \; \mathbf{y} \;=\; |\mathbf{y}| \begin{pmatrix} \cos\varphi \, \sin\theta \\ \sin\varphi \, \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Stačí dosadiť zložky oboch vektorov do rovnice (68). Všeobecný prípad plynie z invariantosti skalárneho súčinu vzhľadom k rotáciam (toto ukážeme neskôr).

Vektorový súčin dvoch vektorov je operácia, ktorá je typická pre trojrozmerné vektory.

Definícia: Vektorový súčin dvoch vektorov

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \; \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

je *vektor* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, ktorý je definovaný takto:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} x_2 \, y_3 \; - \; x_3 \, y_2 \\ x_3 \, y_1 \; - \; x_1 \, y_3 \\ x_1 \, y_2 \; - \; x_2 \, y_1 \end{pmatrix} . \tag{71}$$

Vektorový súčin má nasledujúce dôležité vlastnosti:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \;=\; -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \quad - \quad \text{antisymetria} ,$$

$$(a\,\mathbf{x} \,+\, b\,\mathbf{y}) \times \mathbf{z} \;=\; a\,\mathbf{x} \times \mathbf{z} \,+\, b\,\mathbf{y} \times \mathbf{z} \quad - \quad \text{linearita} ,$$

$$\mathbf{x} \,.\, (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \;=\; \mathbf{y} \,.\, (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \;=\; 0 \quad - \quad \text{ortogonalita} . \tag{72}$$

Z prvých dvoch vzťahov vyplýva, že $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \;=\; 0$ ak jeden z vektorov je násobkom druhého.

Posledný vzťah nám hovorí, že vektorový súčin $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je vektor kolmý na $\mathbf{x}$ aj $\mathbf{y}$.

Poznámka: Tvar zložiek vektorového súčinu $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ si ľahko zapamätáme:

1) Prvá zložka je daná ako $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 = x_2 \, y_3 - x_3 \, y_2$:

- prvá trojica indexov je tu 123 (1 naľavo) a (2 a 3 napravo so znamienkom "$+$" pred $x_2 \, y_3 - x_3 y_2$),

- druhá trojica indexov je 132 (1 naľavo) a (2 a 3 napravo so znamienkom "$-$" pred $x_3 \, y_2$),

2) V druhej zložke $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 = x_3 \, y_1 - x_1 \, y_3$ indexy sú dané rovnakou *cyklickou* zámenou $1 \to 2$, $2 \to 3$ a $3 \to 1$ v oboch členoch.

3) Napokon v tretej zložke $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3 = x_1 \, y_2 - x_2 \, y_1$ indexy sú dané v oboch členoch opäť *cyklickou* zámenou ($2 \to 3$, $3 \to 1$ a $1 \to 2$).

Geometrický význam vektorového súčinu. Uvažujme dva vektory v (12)-rovine:

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{y} = |\mathbf{y}| \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ich vektorový súčin $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je vektor orientovaný v smere osi 3 (lebo je kolmý ako na osi 1 aj 2):

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\phi \end{pmatrix},$$

kde $\phi = \beta - \alpha$ je uhol zovretý oboma vektormi. Jeho veľkosť je súčin dĺžok oboch vektorov vynásobený absolútnou hodnotou sínusu zovretého uhla:

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \, |\sin\phi| \, .$$

Toto je práve plocha rovnobežníka vytvoreného oboma vektormi.

Pre vektorový súčin prvkov štandardnej bázy platí

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \;=\; \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \;=\; \mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \;=\; \mathbf{e}_2\,.$$

Tieto vzťahy sa zvyknú kompaktne zapisovať takto:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \;=\; \varepsilon_{ijk}\, \mathbf{e}_k\,, \tag{73}$$

kde ε_{ijk} je *Levi-Civitov symbol epsilon* definovaný ako

(i) $\varepsilon_{123} = 1$ a ďalšie hodnoty symbolu plynú z toho, že

(ii) ε_{ijk} mení znamienko pri výmene ľubovoľných dvoch indexov:

$$\varepsilon_{ijk} \;=\; -\,\varepsilon_{jik} \;=\; -\,\varepsilon_{ikj} \;=\; -\,\varepsilon_{kji}\,.$$

Evidentne $\varepsilon_{ijk} = 0$, ak aspoň dva indexy sú rovnaké, ak indexy i, j, k, sú navzájom rôzne, potom $\varepsilon_{ijk} = \pm 1$ (znamienko ľahko plynie z pravidiel (i) a (ii)).

Zmiešaný súčin a viacnásobné súčiny

Zmiešaný súčin troch vektorov

$$\mathbf{a} \;=\; \sum_{i=1}^{3} a_i\, \mathbf{e}_i\,, \quad \mathbf{b} \;=\; \sum_{j=1}^{3} b_j\, \mathbf{e}_j\,, \quad \mathbf{c} \;=\; \sum_{k=1}^{3} c_k\, \mathbf{e}_k\,,$$

je reálne číslo definované vzťahom:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\,.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \;&=\; \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_i\, b_j\, c_k\, \mathbf{e}_i\,.(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \\ &=\; \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_i\, b_j\, c_k\, \varepsilon_{ijk}\,. \end{aligned}$$

Posledná formula je priamym dôsledkom (73). Zmiešaný súčin troch vektorov má názorný geometrický význam: $\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ je objem rovnobežnostena určeného vektormi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Dvojnásobný vektorový súčin vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ je vektor definový ako:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}) \;-\; \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.$$

Vzorec sa ľahko zapamätá ako formula *"bac mínus cab"*. Je priamym dôsledkom užitočnej identity:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} \;=\; \delta_{jl}\,\delta_{km} \;-\; \delta_{jm}\,\delta_{kl}\,.$$

Spojením oboch predchádzajúcich vzorcov dostaneme formulu:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,.\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \;=\; (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{d}) \;-\; (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})\,.$$

Lineárne zobrazenia a matice

Zobrazenie vektorov

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\mapsto\; \mathbf{x}' \;=\; \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}\,. \tag{74}$$

tvaru

$$\begin{aligned} x_1 \;&\mapsto\; A_{11}\,x_1 \;+\; A_{12}\,x_2 \;+\; A_{13}\,x_3 \;=\; x'_1\,, \\ x_2 \;&\mapsto\; A_{21}\,x_1 \;+\; A_{22}\,x_2 \;+\; A_{23}\,x_3 \;=\; x'_1\,, \\ x_3 \;&\mapsto\; A_{31}\,x_1 \;+\; A_{32}\,x_2 \;+\; A_{33}\,x_3 \;=\; x'_2\,, \end{aligned} \tag{75}$$

nazveme *lineárnym zobrazením* vo $\mathbf{V}_3$ zadaným pomocou 3×3 reálnej matice:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33} \end{pmatrix}\,,\; A_{ij}\,\in\,\mathbf{R}\,. \tag{76}$$

Ak *definujeme* násobenie 3×3 matice A a 3-zložkového vektora (stĺpca) $\mathbf{x}$ ako

$$\begin{pmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\equiv\; \begin{pmatrix} A_{11}\,x_1 \,+\, A_{12}\,x_2 \,+\, A_{13}\,x_3 \\ A_{21}\,x_1 \,+\, A_{22}\,x_2 \,+\, A_{23}\,x_3 \\ A_{31}\,x_1 \,+\, A_{32}\,x_2 \,+\, A_{33}\,x_3 \end{pmatrix}\,, \tag{77}$$

potom rovnica (77) dá sa stručne zapísať takto:

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{x}'\,. \tag{78}$$

Ľubovoľný prvok matice A môžme opäť vyjadriť pomocou jej maticových prvkov v štandardnej báze (72):

$$A_{ij} \;=\; \mathbf{e}_i\,.\,(A\,\mathbf{e}_j)\,,\;\; i\,,j \;=\; 1\,,2\,,3\,. \tag{79}$$

Algebra matíc. Množina 3×3 matíc je *algebra*, lebo sú v nej definované dve operácie:

(i) *Lineárna kombinácia* $a\,A\,+\,b\,B$ dvoch matíc A a B s prvkami A_{ij} resp. B_{ij}, $i\,,j\;=\;1,2,3$, je definovaná ako matica s prvkami $a\,A_{ij}\,+\,b\,B_{ij}$, $i\,,j\;=\;1,2,3$.

Vzhľadom k takto zavedenej lineárnej kombinácii matice tvoria vektorový (lineárny) priestor, v ktorom úlohu počiatku hrá *nulová matica* O s nulovými prvkami $O_{ij}\;=\;0$, $i\,j\;=\;1,2,3$.

(ii) *Súčin* $A\,B$ matice A s maticou B je definovaný ako matica $A\,B$ s prvkami

$$(A\,B)_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{3} A_{ik}\,B_{kj}$$
$$=\; A_{i1}\,B_{1j} \,+\, A_{i2}\,B_{2j} \,+\, A_{i3}\,B_{3j}\,, \quad i\,j \;=\; 1,2,3\,. \tag{80}$$

Poznamejme, že maticový súčin je asociatíny: $A\,(B\,C) \;=\; (A\,B)\,C \;\equiv\; A\,B\,C$.

Transponovaná matica A^t k matici A s prvkami A_{ij} je matica s prvkami $A^t_{ij} \;=\; A_{ij}$, $i\,,j \;=\; 1,2,3$. V matici A^t riadky a stĺpce matice A sú navzájom vymenené: A^t matica je otočená okolo hlavnej diagonály matice A. Pre transpozíciu súčinu matíc platí: $(A\,B)^t \;=\; B^t\,A^t$.

Ľahko potom možno ukázať, že skalárny súčin spĺňa nasledujúcu identitu:

$$\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; (A^t\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}\,. \tag{81}$$

Dokázať sa to dá jednoducho priamym dosadením:

$$\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; \sum_{i=1}^{3} x_i\,(\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\,y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i\,A_{ij}\,y_j$$
$$=\; \sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3} A^t_{ji}\,x_i)\,y_j \;=\; (A^t\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}\,.$$

Špeciálne pre symetrickú maticu máme: $\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) \;=\; (A\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}$.

Jednotková matica I je matica s prvkami $I_{ij} \;=\; \delta_{ij}$, t.j. $\delta_{ii} \;=\; 1$ na diagonále a $\delta_{ij} \;=\; 0$ pre $i \neq j$, mimo nej. Jednotková matica hrá úlohu "jednotky" v maticovom súčine: $I\,A \;=\; A\,I \;=\; A$.

Inverzná matica a determinant matice. Hovoríme, že matica A je *regulárna (invertibilná)*, ak k nej existuje *inverzná matica* A^{-1}, pre ktorú platí:

$A\,A^{-1} \;=\; A^{-1}\,A \;=\; I$.

Pokiaľ matice A a B sú invertibilné, ich súčin je invertibilný a platí: $(A\,B)^{-1} \;=\; B^{-1}\,A^{-1}$.

Determinant matice je reálne číslo priradené matici A predpisom

$$\det A \;\equiv\; \begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33} \end{vmatrix} \;=\; \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,A_{1i}\,A_{2j}\,A_{3k}\,. \tag{82}$$

V poslednom výraze vystupuje vyššie zavedený úplne antisymetrický symbol ε_{ijk}.

Determinant má nasledujúce vlastnosti:

(i) Determinant transponovanej matice A^t je rovný determinantu matice A:

$$\det A^t \;=\; \det A\,. \tag{83}$$

(ii) Determinat zmení znamienko, ak vymeníme ľubovoľné dva riadky (stĺpce).

(iii) Determinat sa nezmení, ak k niektorému riadku (stĺpcu) pripočítame ľubovoľnú lineárnu kombináciu ostatných riadkov (stĺpcov).

(iv) Determinant súčinu dvoch matíc sa rovná súčinu ich determinantov: $\det{(A\,B)} \;=\; \det A \det B$.

(v) Matica A je invertibilná práve vtedy, keď $\det A \;\neq\; 0$. Prvky inverznej matice A^{-1} sú dané formulou:

$$(A^{-1})_{ij} \;=\; \frac{(-1)^{i+j}}{\det A}\,\det A'_{ji}\,, \tag{84}$$

kde A'_{ij} je 2×2 matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca (pozor na *vymenené* indexy i a j na pravej strane).

Dôkaz (iv) vyplýva z definícií súčinu matíc a determinantu; podobne vlastnosť (v) vyplýva z definícií 2×2 a 3×3 determinantov (oba dôkazy sú zdĺhavé).

Zápis priamok a rovín v priestore.

Parametrický zápis.

Priamka. Body priamky p prechádzajúcej bodom $\mathbf{x}_0$ v smere vektora $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ sú zadané pomocou jedného reálneho parametra t' takto:

$$p: \ \mathbf{x} \ = \ \mathbf{a}t' \ + \ \mathbf{x}_0 \, , \tag{85}$$

Ak zavedieme nový parameter $t \ = \ |\mathbf{a}| \, t'$, rovnicu priamky môžeme prepísať takto:

$$\mathbf{x} \ = \ \mathbf{n} \, t \ + \ \mathbf{x}_0 \, , \ t \in \mathbf{R} \, , \tag{86}$$

kde $\mathbf{n} \ = \ |\mathbf{a}|^{-1} \, \mathbf{a}$ je vektor jednotkovej dĺžky v smere priamky.

Rovina. Body roviny R určenej dvojicou lineárne nezávislých vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ a prechádzajúcou bodom $\mathbf{x}_0$ sú zadané dvojicou reálnych parametrov t_1' a t_2' takto:

$$R: \ \mathbf{x} \ = \ \mathbf{a}_1 \, t_1' \ + \ \mathbf{a}_2 \, t_2' \ + \mathbf{x}_0 \, . \tag{87}$$

Namiesto vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ môžme zaviesť ortonormálnu dvojicu $\mathbf{e}_1'$ a $\mathbf{e}_2'$ *Schmidtovým-Grammovým ortonormalizačným procesom*:

(i) Položíme $\mathbf{e}_1' \ = \ |\mathbf{a}_1|^{-1} \, \mathbf{a}_1$ a druhý vektor hľadáme v tvare

$$\mathbf{e}_2' \ = \ b \, (\mathbf{a}_2 \ - \ c \, \mathbf{e}_1') \, .$$

(ii) Z podmienky

$$0 \ = \ \mathbf{e}_1' \, . \, \mathbf{e}_2' \ = \ b \, (\mathbf{e}_1' \, . \, \mathbf{a}_2 \ - \ c)$$

určíme $c = \mathbf{e}'_1 \,.\, \mathbf{a}_2$. Nakoniec, b sa určí z normalizačnej podmienky:

$$1 \;=\; |\mathbf{e}'_2|^2 \;=\; b^2, (\mathbf{a}_2 \;-\; c\,\mathbf{e}'_1)^2 \;=\; b^2, (|\mathbf{a}_2|^2 \;-\; c^2)\,.$$

Pretože $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ sú lineárne nezávislé, $\mathbf{a}_2 \;-\; c\,\mathbf{e}'_1 \;\neq\; \mathbf{0}$ - takže b bude existovať.

Body roviny môžeme vyjadriť aj pomocou ortonormálnych vektorov $\mathbf{e}'_1$ a $\mathbf{e}'_2$:

$$R: \;\mathbf{x} \;=\; \mathbf{e}'_1\,t_1 \;+\; \mathbf{e}'_2\,t_2 \;+\; \mathbf{x}_0\,. \tag{88}$$

Vzťah medzi dvojicami parametrov $t_1\,, t_2$ a $t'_1\,, t'_2$ plynie z ortonormalizačného procesu (skúste si ho odvodiť).

Zápis pomocou rovnice.

Rovina. Rovinu R prechádzajúcu bodom $\mathbf{x}_0$ tiež môžme zadať pomocou jednej rovnice:

$$\mathbf{m}\,.\,(\mathbf{x} \;-\; \mathbf{x}_0) \;=\; 0\,, \tag{89}$$

kde $\mathbf{m}$ je vektor jednotkovej dĺžky kolmý na rovinu. Po vynásobení číslom $b \;>\; 0$ túto rovnicu môžeme prepísať do všeobecnejšieho tvaru

$$\mathbf{b}\,.\,\mathbf{x} \;+\; c \;=\; 0\,, \tag{90}$$

kde $\mathbf{b} \;=\; b\,\mathbf{m}$ a $c \;=\; -\,b\,\mathbf{m}.\mathbf{x}_0$.

Ak je rovina zadaná v parametrickom tvare (87) pomocou dvojice lineárne nezávislých vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$, potom vektor $\mathbf{b}$ je úmerný $\mathbf{a}_1 \;\times\; \mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{b} \;\sim\; \mathbf{a}_1 \;\times\; \mathbf{a}_2\,.$$

Jednotkový vektor $\mathbf{m}$ kolmý na rovinu je daný ako

$$\mathbf{b} \;=\; \frac{\mathbf{a}_1 \;\times\; \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \;\times\; \mathbf{a}_2|} \;=\; \mathbf{e}'_1 \;\times\; \mathbf{e}'_2 \;\equiv\; \mathbf{e}'_3\,.$$

Vektory $\mathbf{e}'_i$, $i = 1,2,3$, tvoria ortonormálnu bázu vo $\mathbf{V}_3$: $\mathbf{e}'_i.\mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ (inú ako je štandardná báza).

Dve roviny zadané rovnicami

$$R_1: \quad \mathbf{b}_1 . \mathbf{x} + c_1 = 0 ,$$

$$R_2: \quad \mathbf{b}_2 . \mathbf{y} + c_2 = 0 ,$$

sú *nerovnobežné* a pretínajú sa ak vektory $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$ sú lineárne nezávislé.

Priamka. Priamku p v trojrozmernom priestore môžeme zadať ako priesečník dvoch nerovnobežných rovín prechádzajúcich tým istým bodom $\mathbf{x}_0$: body $\mathbf{x} \in p$ sú riešením sústavy rovníc

$$\mathbf{b}_1 . (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 ,$$

$$\mathbf{b}_2 . (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 .$$

Ľahko sa možno presvedčiť (priamym dosadením), že v parametrickom tvare priamka p je daná buď ako

$$p: \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{x}_0 , \ \mathbf{a} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 ,$$

alebo pomocou smerového vektora $\mathbf{n}$ jednotkovej dĺžky

$$p: \quad \mathbf{x} = \mathbf{n}t' + \mathbf{x}_0 , \text{ kde } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|} , \ t' = t\,|\mathbf{a}| .$$

Príklad. Nech rovina R je zadaná rovnicou

$$\mathbf{m} . \mathbf{x} + c = 0 , \tag{91}$$

kde **m** je vektor jednotkovej dĺžky kolmý na rovinu. Určite vzdialenosť bodu $Q = [q_1; q_2; q_3]$ od roviny.

Riešenie: Priamka p kolmá na rovinu R a prechádzajúca bodom Q je v parametrickom tvare daná ako

$$p: \quad \mathbf{x} = \mathbf{m}\,t + \mathbf{q}\,, \tag{92}$$

kde **q** je vektor s koncovým bodom Q (jeho zložky sú q_1, q_2, q_3). Dosadením (92) do (91) dostaneme rovnicu pre hodnotu parametra t, zodpovedajúcu bodu P priamky p, v ktorom priamka p pretína rovinu R:

$$t + \mathbf{m} \,.\, \mathbf{q} + c = 0\,.$$

Jej riešenie $t = -\mathbf{m} \,.\, \mathbf{q} - c$ dosadíme do (92) a výsledný vektor označíme ako **p**:

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{m}\,(c + \mathbf{m} \,.\, \mathbf{q})\,,$$

Koncový bod P vektora **p** odpovedá práve prieniku priamky a roviny. Vzdialenosť bodu Q od roviny R je rovná

$$d = d(Q,P) = |\mathbf{q} - \mathbf{p}| = |c + \mathbf{m} \,.\, \mathbf{q}|\,.$$

Sústavy lineárnych rovníc

V tejto časti sa budeme zaujímať o riešenie sústavy troch lineárnych algebraických rovníc

$$A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 + A_{13}\,x_3 = b_1\,,$$

$$A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 + A_{23}\,x_3 = b_2\,,$$

$$A_{31}\, x_1 \ + \ A_{32}\, x_2 \ + \ A_{33}\, x_3 \ = \ b_3\,, \tag{93}$$

pre neznáme x_1, x_2, x_3. Čísla b_1, b_2, b_3 označujú pravú stranu sústavy rovníc. Ak je pravá strana nulová, hovoríme o homogénnej sústave rovníc; ak je nenulová, sústava sa nazýva nehomogénna. Vo maticovom zápise túto sústavu môžme zapísať ako vektorovú rovnicu:

$$A\,\mathbf{x} \ = \ \mathbf{b}\,. \tag{94}$$

Riešenie sústavy pomocou determinantov.

(i) Ak $D \ \equiv \ \det A \ \neq \ 0$ sústava má *práve jedno* riešenie dané formulami:

$$x_i \ = \ \frac{D_i}{D}\,, \quad i \ = \ 1,\, 2,\, 3\,, \tag{95}$$

kde D_i označuje determinant matice, ktorú dostaneme tak, že v matici A nahradíme i-ty stĺpec zložkami vektora $\mathbf{b}$ na pravej strane rovnice.

Dôkaz: Vynásobme rovnicu (94) maticou A^{-1}: $\mathbf{x} \ = \ A^{-1}\,\mathbf{b}$. Ak použijeme vzorec (84) a vyčíslime $A^{-1}\,\mathbf{b}$, hneď dostaneme hľadané riešenie (56).

(ii) Prípady s $D \ = \ 0$ diskutujeme nižšie.

Riešenie sústavy pomocou rozšírenej matice.

Sústavu lineárnych algebraických rovníc (93) zapíšeme ako 3×4 rozšírenú maticu (tabuľku čísiel):

$$(A\,|\,b) \ \equiv \ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & | & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & | & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & | & b_3 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Jedná sa o maximálne úsporný zápis sústavy (93). Neznáme x_1, x_2 a x_3 explicitne nevypisujeme, vieme ale že:

• x_i vynásobíme i-ty stĺpec a všetky stĺpce sčítame,

• súčty jednotlivých riadkov sa rovnajú príslušným členom v poslednom (štvrtom) stĺpci rozšírenej matice.

Veta: Sústava lineárnych algebraických rovníc popísaných rozšírenou maticou $(A\,|\,b)$ má riešenie práve vtedy, keď počet lineárne nezávislých riadkov matice sústavy A sa rovná počtu lineárne nezávislých riadkov rozšírenej matice $(A\,|\,b)$.

Komentár:

(i) Ak všetky (tri) riadky A aj $(A\,|\,b)$ sú lineárne nezávislé, tak $D = \det A \neq 0$ a existuje jednoznačné riešenie sústavy dané (95).

(ii) Ak matice $(A\,|\,b)$ a A majú rovnaký počet $n = 1, 2$ lineárne nezávislých riadkov (takže $D = 0$), potom sústava sa redukuje na n nezávislých rovníc. Riešení je nekonečne veľa:

- pri $n = 1$ riešenia určujú rovinu, kým

- pri $n = 2$ riešenia určujú priamku.

(iii) Ak rozšírená matica $(A\,|\,b)$ má viac lineárne nezávislých riadkov ako matica A (a tiež $D = 0$), potom sústava nemá riešenie.

Grupa regulárnych matíc

Maticu A zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ nazveme *regulárnou*, ak jej determinant je nenulový: $\det A \neq 0$.

• Regulárne zobrazenia zobrazujú priestor $\mathbf{V}_3$ jednoznačne na seba.

• Regulárne zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto B\,\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}' \mapsto A\,\mathbf{x}'$ môžeme skladať: zloženému zobrazeniu odpovedá súčin matíc: $A\,(B\,\mathbf{x}) = (A\,B)\,\mathbf{x}$.

V množina regulárnych matíc $\mathcal{G}$ môžeme definovať operáciu - maticový súčin:

$$A\,,\,B \in \mathcal{G} \;\to\; A\,B \in \mathcal{G}\,,$$

ktorý má nasledujúce vlastnosti grupového súčinu:

(i) *Asociatívnosť.* Pre ľubovoľnú trojicu $A\,(B\,C)$ z $\mathcal{G}$ platí: $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$;

(ii) *Existencia jednotkového prvku* I. Pre ľubovolný prvok A z $\mathcal{G}$ platí: $A\,I = I\,A = A$;

(iii) *Existencia inverzného prvku.* Ku každému prvku A z $\mathcal{G}$ existuje A^{-1}, pre ktorý platí: $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$.

Poznámka 1. Množina 3×3 regulárnych matíc s nenulovým determinantom je grupa vzhľadom k maticovému súčinu, ktorá sa zvykne označovať ako $\mathcal{G} = GL(3, \mathbf{R})$: jednotková matica odpovedá jednotkovému prvku grupy a inverzná matica odpovedá inverznému prvku.

Poznámka 2. Jej podmožina matíc s jednotkovým determinantom je grupa, ktorá sa zvykne označovať ako $\mathcal{G}' = SL(3, \mathbf{R})$. Je dôsledkom toho, že vzťah $\det{(AB)} = \det A \det B$ je konzistentný s podmienkou $\det A = 1$.

Poznámka 3. Matica A sa nazýva ortogonálnou, ak pre jej transponovanú maticu A^t platí: $A^t\,A = I$. Množina ortogonálnych matíc tvorí grupu $\mathcal{H} = O(3)$.

Poznámka 4. Zo vzťahu $A^t\,A = I$ vyplýva $\det A = \pm 1$. Ortogonálne matice s $\det A = +1$, tvoria podgrupu $\mathcal{H}' = SO(3)$ grupy $\mathcal{H} = O(3)$, ktorá sa nazýva sa grupou vlastných rotácií priestoru.

Poznámka 5. Každá ortogonálna matica zachováva skalárny súčin. Skutočne, zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}' \mapsto A\,\mathbf{x}'$ a rovnica (81) implikujú:

$$(A\,\mathbf{x})\,.\,(A\,\mathbf{x}') \;=\; \mathbf{x}\,.\,(A^t A\,\mathbf{x}') \;=\; \mathbf{x}\,.\,\mathbf{x}'$$

Poznámka 5. Matice z grupy rotácií s determinantom rovným -1 netvoria podgrupu: súčin dvoch takýchto matíc je matica s determinantom $+1$. Každá ortogonálna matica A' s determinantom rovným -1, ale môže byť zapísaná ako súčin matice

$$E \;=\; \begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & -1 \end{pmatrix},$$

odpovedajúcej priestorovej reflexii (odrazu v zrkadle umiestnenom v 1. súradnicovej osi v rovine) a vlastnej rotácie A: $A' = E\,A$, kde $\det A = +1$.

Poznámka 6. Grupa $SO(3)$ je podgrupou ako grupy $SL(3, \mathbf{R})$, tak aj grupy $O(3)$. Naviac platí: $SO(3) = SL(3, \mathbf{R}) \bigcap O(2)$.

Všeobecné bázy vo vektorovom priestore

Uvažujme lineárne zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ generované regulárnou maticou $A \in GL(3, \mathbf{C})$ s prvkami A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Pôsobením na štandardnú ortonormálnu bázu

$$\mathbf{e}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; \mathbf{e}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; \mathbf{e}_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obdržíme trojicu vektorov

$$\mathbf{f}_1 \;=\; A\,\mathbf{e}_1 \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{f}_2 \;=\; A\,\mathbf{e}_2 \;=\; \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{f}_3 \;=\; A\,\mathbf{e}_3 \;=\; \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix}.$$

Trojica vektorov $\mathbf{f}_i$, $i \;=\; 1, 2, 3$, predstavuje všeobecnú (neortonormálnu) bázu vo vektorovom priestore, t.j. každý vektor $\mathbf{x}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{f}_i$, $i \;=\; 1, 2, 3$:

$$\mathbf{x} \;=\; \sum_{i=1}^{3} x_i\,\mathbf{e}_i \;=\; \sum_{i=1}^{3} x'_i\,\mathbf{f}_i\,,$$

kde koeficienty rozvoja x'_i, $i \;=\; 1, 2, 3$, vektora v neortonormálnej báze sú určené rovnicami

$$\begin{aligned} A_{11}\,x'_1 \;+\; A_{12}\,x'_2 \;+\; A_{13}\,x'_3 \;&=\; x_1\,, \\ A_{21}\,x'_1 \;+\; A_{22}\,x'_2 \;+\; A_{23}\,x'_3 \;&=\; x_2\,, \\ A_{31}\,x'_1 \;+\; A_{32}\,x'_2 \;+\; A_{33}\,x'_3 \;&=\; x_2\,. \end{aligned}$$

Vďaka tomu, že A je regulárna matica, táto sústava má jednoznačné riešenie pri ľubovoľnom x_i, $i \;=\; 1, 2, 3$.

Vektor $\mathbf{x}$ sa nazýva *normovaným vlastným vektorom* matice A k vlastnej hodnote λ, ak existuje *reálne* číslo λ tak, že je splnená rovnica

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \lambda\,\mathbf{x} \;\;\Leftrightarrow\;\; (A \,-\, \lambda\,I)\,\mathbf{x} \;=\; 0\,, \;\; |\mathbf{x}| \;=\; 1\,. \tag{97}$$

Jedná sa o homogénnu sústavu lineárnych algebraických rovníc pre zložky vektora $\mathbf{x}$. Aby táto sústavu rovníc mala nenulové riešenie, determinant sústavy sa musí rovnať nule:

$$\det(A \,-\, \lambda\,I) \;=\; 0\,.$$

Tento vzťah je kubická rovnica pre neznámu λ. Dá sa ukázať, že pre nesymetrickú maticu táto rovnica nemá reálne riešenie. V ďalšom sa preto obmedzíme na symetrické matice. Opäť platí

Veta: *Vlastné vektory symetrickej matice k rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne.*

Poznámka: Ak $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ sú dva lineárne nezávislé vlastné vektory k rovnakej vlastnej hodnote $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, tak vždy možno najsť také lineárne kombinácie

$$\mathbf{x}'_1 = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 , \quad \mathbf{x}'_2 = b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 ,$$

že oba vektory sú ortogonálne: $\mathbf{x}'_1 \,.\, \mathbf{x}'_2 = 0$ (tvrdenie platí pre ľubovoľný systém lineárne nezávislých vektorov a bližšie si ho všimneme v ďalšej časti). Oba vektory $\mathbf{x}'_1$ aj $\mathbf{x}'_2$ sú evidentne vlastné vektory k vlastnej hodnote λ. Podľa tohto systém vlastných vektorov je možné vždy ortonormalizovať.

Bez ujmy na obecnosti uvažujme ortonormálny systém vlastných vektorov $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$, pre ktorý platí: $\mathbf{x}_i \,.\, \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$. V ortonormálnej báze svojich vlastných vektorov, každá symetrická matica A je diagonálna s vlastnými hodnotami na diagonále. Skutočne, maticové prvky A v báze jej vlastných vektorov sú

$$\Lambda_{ij} \equiv \mathbf{x}_i \,.\, (A\mathbf{x}_j) = \lambda_j \, \mathbf{x}_i \,.\, \mathbf{x}_j = \lambda_j \, \delta_{ij} \,.$$

Poznámka: Pre výpočet koreňov kubickej rovnice platia podobné (Cardanove) vzorce ako pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice. Sú ale komplikovanejšie, a preto sa obmedzíme na prípad, keď symetrická matica A má nulový determinant, takže jeden z koreňov je $\lambda = 0$. Pre ostávajúce dva korene dostaneme kvadratickú rovnicu.

3 Konečne rozmerné vektorové priestory

Definícia 1: Množina $\mathbf{V}$ je reálny (komplexný) vektorový priestor nad telesom reálnych čísiel $\mathbf{R}$ (komplexných čísiel $\mathbf{C}$), ak je definovaná *lineárna kombinácia* pre ľubovolnú dvojicu jeho prvkov:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \ \mapsto \ a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y} \in \mathbf{V}\,,$$

s reálnymi koeficientami $a\,b \in \mathbf{R}$ (komplexnými koeficientami $a\,b \in \mathbf{C}$), tak, že platí:

$$0\,\mathbf{x} = \mathbf{O}\,,\ 1\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,,\ a\,(b\,\mathbf{x}) = (ab)\,\mathbf{x}\,,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{O} = \mathbf{x}\,,\ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}\,,\ \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}\,,$$

$$a\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\,\mathbf{x} + a\,\mathbf{y}\,,\ (a + b)\,\mathbf{x} = a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{x}\,.$$

Prvok $\mathbf{O}$ nazýva sa nulový vektor (počiatok) vektorového priestoru $\mathbf{V}$.

Príklad: Vektorový priestor $\mathbf{R}^n$ tvoria n-tice reálnych čísiel usporiadaných do stĺpca (podobne, vektorový priestor $\mathbf{C}^n$ tvoria stĺpce n komplexných čísiel)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\,, \quad x_1\,, \dots\,, \in \mathbf{R} \ \ (\mathbf{C})\,.$$

Lineárna kombinácia vektorov (stĺpcov) je definovaná takto:

$$a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x_1 + b\,y_1 \\ \dots \\ a\,x_n + b\,y_n \end{pmatrix}.$$

Definícia 2: Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ z priestoru $\mathbf{V}$ sú *lineárne nezávislé*, ak rovnica

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \ldots a_m \mathbf{x}_m = \mathbf{O}$$

má *len* triviálne riešenie: $a_1 = \ldots a_m = 0$.

Poznámka: Ak táto rovnica má netriviálne riešenie s $a_i \neq 0$, potom môžeme $\mathbf{x}_i$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov uvažovaného systému:

$$\mathbf{x}_i = -\frac{a_1}{a_i} \mathbf{x}_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} \mathbf{x}_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} \mathbf{x}_{i+1} - \ldots - \frac{a_m}{a_i} \mathbf{x}_m .$$

Definícia 3: Vektorový priestor $\mathbf{V}$ je n-rozmerný (má dimenziu n), ak v ňom existuje systém n lineárne nezávislých vektorov $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ tak, že každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ sa dá vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{f}_1 + \ldots x_n \mathbf{f}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{f}_i .$$

Hovoríme, že vektory $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbf{V}$.

Príklad: Systém vektorov

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

tvorí *štandardnú* bázu priestoru $\mathbf{R}^n$ alebo $\mathbf{C}^n$ (podľa toho, či uvažujeme ich reálne alebo komplexné lineárne kombinácie).

Dôkaz: Vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sú lineárne nezávislé, lebo rovnica $a_1 \mathbf{e}_1 + \ldots a_n \mathbf{e}_n = \mathbf{O}$, t.j.

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

má iba triviálne riešenie: $a_1 = \ldots a_n = 0$. Naviac, každý vektor $\mathbf{x}$ z priestoru $\mathbf{R}^n$ (alebo $\mathbf{C}^n$) sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n .$$

Lineárne zobrazenia. Zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ vo vektorovom priestore $\mathbf{V}$ je lineárne, ak platí:

$$A(a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y}) = a\,A\mathbf{x} + b\,A\mathbf{y} .$$

Pôsobenie operátora lineárneho zobrazenia A stačí definovať na vektoroch bázy $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{f}_i \mapsto A\mathbf{f}_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j\, A_{ji}\,, \; i = 1, \ldots, n .$$

Tu sme využili, že vektor $A\mathbf{f}_i$ možno rozložiť v báze $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Lineárne zobrazenie A je potom definované tak, že sa zadajú prvky A_{ij} matice zobrazenia (A) v uvažovanej báze:

$$(A) \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} .$$

Poznámka: Maticové prvky A_{ij} zobrazenia v reálnom (komplexnom) vektorovom priestore sú reálne (komplexné) čísla. Matica $(A) = (A_{ij})$ odpovedajúca lineárnemu zobrazeniu A je vo všeobecnosti rôzna v rôznych bázach. Pokiaľ nevznikne nedorozumenie, budeme zobrazenie aj jeho maticu označovať jednoducho symbolom A.

Lineárna kombinácia matíc $a\,A + b\,B$ matice $A = (A_{ij})$ a matice $B = (B_{ij})$ je matica s prvkami

$$(a\,A + b\,B)_{ij} \;=\; a\,A_{ij} + b\,B_{ij}\,.$$

V maticovom zápise to môžeme zapísať takto:

$$a \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \;+\; b \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aA_{11} + bB_{11} & \dots & aA_{1n} + bB_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ aA_{n1} + bB_{n1} & \dots & aA_{nn} + bB_{nn} \end{pmatrix} .$$

Súčin matíc $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ je matica AB s prvkami

$$(AB)_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj} \quad i\,,j \;=\; 1\,,\dots\,,n\,.$$

Matica AB odpovedá zloženému lineárnemu zobrazeniu $\mathbf{x} \mapsto AB\mathbf{x}$ definovanému vzťahom: $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$.

Transponovaná matica A^t je definovaná ako matica s vymenenými riadkami a stĺpcami:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teda, $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$. Pre transponovanie súčinu matíc platí: $(AB)^t = B^t A^t$.

Matica A sa nazýva *symetrická* ak $A = A^t$, t.j. ak pre jej prvky platí $A_{ij} = A_{ji}$. Matica sa nazýva *antisymetrická* ak $A = -A^t$, t.j. ak $A_{ij} = -A_{ji}$.

Hermitovsky združená matica $A^\dagger$ ku **komplexnej** matici A je definovaná takto:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \dots & \bar{A}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{A}_{1n} & \dots & \bar{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teda, $(A^\dagger)_{ij} = \bar{A}_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$: vymenili sme riadky a stĺpce a potom sme ich komplexne združili ($\bar{a}$ označuje komplexné združenie čísla a). Pre hermitovské združenie súčinu matíc platí: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Poznámka: Hermitovské združenie matice je definované len pre komplexné matice!

Matica A sa nazýva *hermitovská*, ak $A = A^\dagger$, t.j. ak pre jej prvky platí $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$. Matica sa nazýva *antihermitovská* ak $A = -A^\dagger$, t.j. ak $A_{ij} =$

$-\bar{A}_{ji}$.

Poznámka: Lineárnu kombináciu je možné definovať aj pre obdĺžnikové $(n \times m)-$matice A a B (s n riadkami a m stĺpcami): matica $a\,A\,+\,b\,B$ má prvky $a\,A_{ij}\,+\,b\,B_{ij}$, $i\,=\,1,,\ldots,n$, $j\,=\,1,,\ldots,m$.

Podobne, možno definovať súčin $(n \times k)-$matice s $(k \times m)-$maticou: ak

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nk} \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & A_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{k1} & \ldots & A_{km} \end{pmatrix},$$

potom AB je $(n \times m)-$matica s prvkami (počet stĺpcov prvej matice sa *musí* rovnať počtu riadkov druhej matice):

$$(AB)_{ij} \;=\; A_{i1}\,B_{1j} \,+\, \ldots \,+\, A_{ik}\,B_{kj} \;=\; \sum_{l=1}^{k} A_{il}\,B_{lj}\,.$$

Jednotková a inverzná matica. Jednotková matica I je definovaná ako matica s prvkami $I_{ij} \;=\; \delta_{ij}$ (jednotky na diagonále a nuly mimo nej):

$$I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzná matica A^{-1} k matici A je definovaná ako matica, pre ktorú platí: $A^{-1}\,A \;=\; A\,A^{-1} \;=\; I$. Matica sa nazýva *regulárna*, ak k nej existuje inverzná matica A^{-1}.

Determinant matice A je číslo

$$\det A \ \equiv \ \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \,,$$

priradené matici A. Toto priradenie má nasledujúce vlastnosti:

1. Linearita v stĺpcoch matice

$$\begin{vmatrix} aA_{11}+bB_{11} & A_{12} & \dots & aA_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ aA_{n1}+bB_{n1} & A_{12} & \dots & aA_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \ a \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & aA_{nn} \end{vmatrix} \ + \ b \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & A_{n2} & \dots & aA_{nn} \end{vmatrix} \,.$$

2. Determinant trojuholníkovej matice s nulami pod (nad) hlavnou diagonálou je rovný súčinu diagonálnych prvkov:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \ = \ A_{11}\,A_{22}\,\dots\,A_{nn}\,.$$

3. Determinant transponovanej matice je rovný determinantu matice a determinant súčinu matíc je rovný súčinu determinantov:

$$\det A \ = \ \det A^t \,, \quad \det (AB) \ = \ \det A \det B \,.$$

Dôsledky:

4. Determinant zmení znamienko, ak prehodíme ľubovoľné dva riadky (stĺpce) matice.

5. Determinant sa násobí číslom a, ak niektorý riadok (stĺpec) matice vynásobíme číslom a.

6. Determinant sa nezmení, ak k niektorému riadku (stĺpcu) pripočítame ľubovoľnú lineárnu kombináciu ostatných riadkov (stĺpcov).

7. Determinant $D = \det A$ z $n \times n$ matice $A = (A_{ij})$ možno vyjadriť pomocou $(n-1) \times (n-1)$ determinantov rozvojom podľa j-teho stĺpca:

$$D = (-1)^{1+j} A_{1j} D_{1j} + \ldots + (-1)^{n+j} A_{nj} D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij} ,$$

kde D_{ij} je determinant $(n-1) \times (n-1)$ matice, ktorú dostaneme z matice A vyškrtnutím i-teho riadku a j-ho stĺpca.

Výpočet determinantov. Rozvoj determinantu podľa stĺpca (vlastnosť 7) dovoľuje *induktívne* definovať determinant:

• Determinant $n \times n$ matice vyjadríme pomocou determinantov $(n-1) \times (n-1)$ matíc. Tieto vyjadríme pomocou determinantov $(n-2) \times (n-2)$ matíc, atď.

• Opakovaním tohto postupu by sme výpočet determinantu redukovali na výpočet determinantov z "malých" matíc (1×1, 2×2, 3×3), ktoré už vieme rátať.

Uvedený postup síce vedie k výsledku, ale nie je praktický. Podstatne efektívnejšia je nasledujúca stratégia pri výpočte determinantov (využívajúca vlastnosti 4 až 6):

(i) Ak $A_{11} \neq 0$, odčítame vhodný násobok prvého riadku od ostatných riadkov tak, aby sme vynulovali prvý stĺpec pod A_{11} (ak $A_{11} = 0$ v prvom stĺpci matice vyberieme prvok $A_{i1} \neq 0$, i-ty riadok vymeníme s prvým, zmeníme znamienko a postupujeme tak, ako je naznačené).

(ii) Po tomto kroku druhý riadok bude mať tvar $0, A'_{22} \dots A'_{2n}$. Ak $A'_{22} \neq 0$, odčítame vhodný násobok druhého riadku od ostatných riadkov tak, aby sme vynulovali druhý stĺpec pod A'_{22} (ak $A'_{22} = 0$ pod A'_{22} vyberieme prvok $A'_{2i} \neq 0$, i-ty riadok vymeníme s prvým, zmeníme znamienko).

Analogicky postupujeme ďalej, až po n krokoch obdržíme trojuholníkovú maticu s nulami pod hlavnou diagonálou, ktorej determinat je rovný súčinu diagonálnych prvkov (analogickými úpravami so stĺpcami dostali by sme trojuholníkovú maticu s nulami nad hlavnou diagonálou):

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \dots = \pm \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \pm A'_{11} A'_{22} \dots A'_{nn} \,.$$

Znamienko je dané počtom permutácií (výmien) riadkov, vykonaných pri úprave matice na trojuholníkový tvar.

Výpočet inverznej matice. Štvorcová $n \times n$ matica

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva *regulárna*, ak má nenulový determinat. Ku každej regulárnej matici existuje inverzná matica A^{-1}. Prvky inverznej matice sú dané vzorcom (ktorý vyplýva z vlastnosti 7):

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{D_{ji}}{D} \,, \quad i, j = 1, \dots, n \,.$$

Tu $D = \det A$ a D_{ij} je determinant $(n-1)\times(n-1)$ matice, ktorú dostaneme z matice A vyškrtnutím i-teho riadku a j-ho stĺpca (pozor na vymenené poradie indexov i a j na pravej strane).

Inverzná matica A^{-1} je riešením maticovej rovnice

$$A\,X \;=\; I\,. \tag{98}$$

ktorá predstavuje sústavu lineárnych rovníc pre neznáme prvky matice $X = (X_{ij})$ s nulami a jednotkami na pravej strane. Rovnicu (98) môžeme reprezentovať rozšírenou maticou:

$$(A\,|\,I) \;\equiv\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \dots & A_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right). \tag{99}$$

Ak vynásobeníme rovnicu (98) zľava regulárnou maticou T, dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$T\,A\,X \;=\; T\,.$$

Výberom vhodných matíc T možno realizovať základné ekvivaletné úpravy rovnice (98), ktoré odpovedajú nasledujúcim úpravám rozšínej matice:

1. Násobeniu i-teho riadku číslom $a \neq 0$.
2. Pripočítaniu i-teho riadku k j-temu riadku.
3. Výmene i-teho a k j-temu riadku.

Prvú ekvivalentnú úprava možno realizovať diagonálnou maticou T s $T_{jj} = 1$ pre $j \neq i$ a $T_{ii} = a$.

Druhú ekvivalentnú úprava možno realizovať maticou $T = I + E_{(ij)}$, kde $E_{(ij)}$ je matica, ktorá má 0 všade okrem 1 v i-tom riadku na j-tom mieste.

Skladaniu týchto úprav odpovedá násobenie odpovedajúcich matíc T. Takto sa dá zložiť úprava 3, ako aj pripočítanie k i-temu riadku lineárnej kombinácie ostatných riadkov.

Inverznú maticu dostaneme ekvivalentnými úpravami rozšírenej matice $(A \,|\, I)$:

- postupujeme tak, aby matica A prešla na jednotkovú maticu I, potom
- jednotková matica I prejde na inverznú maticu A^{-1}. Teda

$$(A \,|\, I) \;\sim\; \ldots \;\sim\; (I \,|\, A^{-1})$$

(symbol "$\sim$" označuje ekvivalentnosť matíc).

Sústavy lineárnych rovníc.

Regulárna sústava n rovníc. Uvažujme maticovú rovnicu

$$A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}\,. \tag{100}$$

V prípade, že A je regulárna matica ($\det A \neq 0$), existuje inverzná matica A^{-1}. Po vynásobení rovnice (100) zľava maticou A^{-1}, dostaneme jednoznačné riešenie

$$\mathbf{x} \;=\; A^{-1}\,\mathbf{b}\,. \tag{101}$$

Maticovej rovnici (100) odpovedá sústava n lineárnych rovníc pre n neznámych $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 \;+\; \ldots \;+\; A_{1n}\,x_n \;&=\; b_1 \\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots& \\ A_{n1}\,x_1 \;+\; \ldots \;+\; A_{nn}\,x_n \;&=\; b_n\,. \end{aligned} \tag{102}$$

A. Riešenie sústavy (102) (korešpondujúce (101)) môžeme vyjadriť pomocou determinantov:

$$x_i \;=\; \frac{D_i}{D}\,,\; i \;=\; 1, \ldots\,, \tag{103}$$

kde $D = \det A$ a D_i je determinant, v ktorom i-ty stĺpec matice A je nahradený stĺpcom odpovedajúcim $\mathbf{b}$:

$$D_i = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1\,i-1} & b_1 & A_{1\,i+1} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{n\,i-1} & b_n & A_{n\,i+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

B. Sústavu (102) možno efektívne riešiť ekvivalentnými úpravami rozšírenej matice $(A\,|\,\mathbf{b})$ sústavy (102) tak, aby matica A prešla na jednotkovú maticu I:

$$(A\,|\,\mathbf{b}) \sim \dots \sim (I\,|\,\mathbf{x}).$$

Podrobnejšie, ekvivalentnými úpravami prejdeme najprv k rozšírenej matici $(A'\,|\,\mathbf{b}')$ s trojuholníkovou maticou A' a potom ďalšími ekvivalentnými úpravami k cieľovej rozšírenej matici $(I\,|\,\mathbf{x})$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & | & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & | & b_n \end{pmatrix} \sim$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2n} & | & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{nn} & | & b'_n \end{pmatrix} \sim$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & | & x_n \end{pmatrix}.$$

Pri praktických výpočtoch sa obyčajne stačí zastaviť pri rozšírenej matici $(A' \,|\, \mathbf{b}')$ s trojuholníkovou maticou A', lebo odpovedajúca sústava sa už dá jednoducho riešiť. Poznamenajme, že $A'_{11} \neq 0$, ... ,$A'_{nn} \neq 0$ (lebo $\det A' \neq 0$).

Sústava m lineárnych rovníc pre n neznámych. Uvažujme sústavu m lineárnych rovníc pre n neznámych (medzi m a n nepredpokladáme žiadny vzťah):

$$\begin{aligned} A_{11}\, x_1 \;+\; \ldots \;+\; A_{1n}\, x_n \;&=\; b_1 \\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;&\ldots\;\ldots \\ A_{m1}\, x_1 \;+\; \ldots \;+\; A_{mn}\, x_n \;&=\; b_n\,. \end{aligned} \tag{104}$$

Sústavu budeme riešiť ekvivalentnými úpravami rozšírenej matice

$$(A\,|\,b) \;\equiv\; \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & | & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Nech h označuje počet lineárne nezávislých riadkov $m \times n$ matice sústavy A, zrejme $h \leq m$. Podobne, h' nech je počet lineárne nezávislých riadkov $m \times (n+1)$ rozšírenej matice sústavy $(A\,|\,b)$; pritom $h' \geq h$. Pre existenciu riešenia sústavy (104) platí klasifikácia:

1. Ak $h = h' = n$, sústava má *práve jedno riešenie.* V tomto prípade rozšírenú maticu sústavy $(A\,|\,b)$ vieme upraviť ekvivalentnými úpravami na

tvar

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2n} & | & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{nn} & | & b'_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

s $A'_{11} \neq 0$, ... ,$A'_{nn} \neq 0$.

2. Ak $h = h' < n$, sústava má *nekonečne veľa riešení.* Teraz rozšírenú maticu sústavy $(A\,|\,b)$ vieme upraviť ekvivalentnými úpravami na tvar (ak treba môžeme preusporiadať stĺpce matice A - vo výsledku to odpovedá preznačeniu indexov premenných $x_1, \dots, x_n$):

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1h} & \dots & A'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2h} & \dots & A'_{2n} & | & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{hh} & \dots & A'_{1n} & | & b'_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

s $A'_{11} \neq 0$, ... ,$A'_{hh} \neq 0$. Premenné $x_1, \dots, x_h$ sa nazývajú hlavné a je ich možné vyjadriť ako lineárne funkcie zostávajúcich premenných $x_{h+1}, \dots, x_n$: $(h+1)$-vý stĺpec až n-tý prenesieme na pravú stranu, čím pre neznáme $x_1, \dots, x_h$ dostaneme predchádzajúci prípad.

3. Ak $h < h'$, sústava *nemá riešenie.* Maticu sústavy $(A\,|\,b)$ vieme upraviť ekvivalentnými úpravami na tvar (ak treba, preusporiadame stĺpce

matice A):

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1h} & \dots & A'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2h} & \dots & A'_{2n} & | & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{hh} & \dots & A'_{1n} & | & b'_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b'_{h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b'_m \end{pmatrix},$$

pričom aspoň jedno z čísiel $b'_{h+1}, \dots, b'_m$ je *rôzne* od nuly (niektorú z posledných $m - h$ rovníc nie je možné splniť).

Niektoré maticové grupy.

Vlastnosť súčinu determinantov

$$\det(AB) \ = \ \det A \det B \, ,$$

dovoľuje zaviesť rôzne grupy z *regulárnych* matíc. Pritom,

• *asociatívnemu grupovému súčinu* odpovedá súčin matíc $(A,\, B) \ \mapsto \ A\,B$:

$$A\,(B\,C) \ = \ (A\,B)\,C \, ,$$

• *jednotkovému prvku* v grupe odpovedá jednotková matica: existuje I také, že pre každý prvok A platí

$$A\,I \ = \ I\,A \ = \ A \, ,$$

• *inverznému prvku* v grupe odpovedá inverzná matica: ku každému prvku A existuje A^{-1} tak, že

$$A\,A^{-1} \ = \ A^{-1}\,A \ = \ I \, .$$

1. $GL(n, \mathbf{C})$ je grupa $n \times n$ komplexných *regulárnych* matíc s $\det A \neq 0$.

$SL(n, \mathbf{C})$ je grupa $n \times n$ komplexných matíc s $\det A = 1$. Je to podgrupa grupy $GL(n, \mathbf{C})$.

2. $O(n, \mathbf{C})$ je grupa $n \times n$ komplexných *ortogonálnych* matíc, ktoré spĺňajú vzťah $A^t A = I$ (kde A^t označuje transponovanú maticu). Potom, $(\det A)^2 = 1$, takže $\det A = \pm 1$.

$SO(n, \mathbf{C})$ je grupa $n \times n$ komplexných *ortogonálnych* matíc s $\det A = 1$. Je to podgrupa grupy $O(n, \mathbf{C})$.

3. 2. $Sp(2n, \mathbf{C})$ je grupa $2n \times 2n$ komplexných *symplektických* matíc, ktoré spĺňajú definičný vzťah

$$A^t E A \; = \; E \,, \quad \text{kde} \;\; E \; = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} .$$

Tu O resp. I označuje $n \times n$ nulovú resp. jednotkovú maticu (takémuto zápisu $2n \times 2n$ matice pomocou $n \times n$ matíc sa hovorí *blokový zápis*).

4. Grupy reálnych matíc

- $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$,
- $O(n, \mathbf{R}) \equiv O(n)$, $SO(n, \mathbf{R}) \equiv SO(n)$,
- $Sp(2n, \mathbf{R})$,

sú definované rovnakými vzťahmi ako ich komplexné analógy.

5. $U(n)$ je grupa $n \times n$ *komplexných unitárnych* matíc, ktoré spĺňajú vzťah $A^\dagger A = I$ (kde $A^\dagger$ označuje hermitovsky združenú maticu: transponovanú a komplexne združenú). Potom $|\mathrm{det} A|^2 = 1$ (lebo $\mathrm{det} A^\dagger = \overline{\mathrm{det} A^t} = \overline{\mathrm{det} A}$).

$SU(n)$ je grupa $n \times n$ *komplexných unitárnych* matíc s $\mathrm{det} A = 1$. Je to podgrupa grupy $U(n)$.

Skalárny súčin vo vektorovom priestore.

Definícia: Skalárny súčin v reálnom resp. komplexnom vektorovom priestore $\mathbf{V}$ je predpis, ktorým sa ľubovoľnej dvojici vektorov $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ priraďuje reálne resp. komplexné číslo $\mathbf{x}.\mathbf{y}$. Skalárny súčin spĺňa nasledujúce axiómy:

1. $\mathbf{x}.\mathbf{x} \, \geq \, 0$, $\mathbf{x}.\mathbf{x} \, = \, 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{x} \, = \, \mathbf{0}$,

2. $\mathbf{x}.\mathbf{y} \; = \; \mathbf{y}.\mathbf{x}$ v reálnom prípade resp.
$\mathbf{x}.\mathbf{y} \; = \; \overline{\mathbf{y}.\mathbf{x}}$ v komplexnom prípade,

3. $\mathbf{x} \, . \, (a \, \mathbf{y} \, + \, b \, \mathbf{z}) \; = \; a \, \mathbf{x}.\mathbf{y} \, + \, b \, \mathbf{x}.\mathbf{z}$ pre ľubovoľné reálne resp. komplexné

čísla.

Združená matica. Nech $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ je zobrazenie v reálnom resp. komplexnom vektorovom priestore so skalárnym súčinom, zadané reálnou resp. komplexnou maticou A:

- v reálnom prípade $\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) = (A^t\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}$,
- v komplexnom prípade $\mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y}) = (A^\dagger\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y}$.

Hovoríme, že v reálnom prípade transponovaná matica A^t resp. v komplexnom prípade hermitovsky združená matica $A^\dagger$ je *združená matica* k matici A.

Dôkaz urobíme v komplexnom prípade. Máme:

$$(A^\dagger\,\mathbf{x})\,.\,\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} A^\dagger_{ji}\, x_i \right)}\; y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, \bar{x}_i y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i\, A_{ij}\, y_j = \mathbf{x}\,.\,(A\,\mathbf{y})\,.$$

Tu sme využili to, že ak A_{ij} sú prvky matice A, potom matica $A^\dagger$ má prvky $A^\dagger_{ij} = \bar{A}_{ji}$, takže $\overline{A^\dagger_{ji}} = A_{ij}$.

Dĺžka vektora definovaná vzťahom $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} \geq 0$ má nasledujúce vlastnosti (axiómy normy):

1. $|\mathbf{x}| \geq 0$, $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $|a\,\mathbf{x}| = |a|\,|\mathbf{x}|$,
3. trojuholníková nerovnosť $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Vzťah medzi skalárnym súčinom a normou udáva dôležitá *Schwartzova* *nerovnosť*:

$$|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \;\leq\; |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,.$$

Dôkaz: Nerovnosť

$$(\mathbf{x} - t\,\mathbf{y})\,.\,(\mathbf{x} - t\,\mathbf{y}) \;\geq\; 0\,, \quad \text{pre}\ \ t = \frac{\mathbf{y}.\mathbf{x}}{\mathbf{y}.\mathbf{y}}$$

je ekvivalentná Schwarzovej nerovnosti.

Príklad 1: Nech

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{e}_i\,, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\mathbf{e}_i\,,$$

sú prvky

(i) reálneho vektorového priestoru $\mathbf{R}^n$, t.j. $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, v ktorom skalárny sa súčin definujeme takto:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\,,$$

(ii) komplexného vektorového priestoru $\mathbf{C}^n$ (t.j. $x_i, y_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$) so skalárnym súčinom:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\,y_i\,.$$

Priestor $\mathbf{R}^n$ resp. $\mathbf{C}^n$ opatrený skalárnym súčinom budeme nazývať n rozmerným reálnym resp. komplexným euklidovským priestorom a označovať ako $E^n_{\mathbf{R}}$ resp. $E^n_{\mathbf{C}}$.

Veta: Ortogonálne zobrazenia v reálnom vektorovom priestore $E^n_{\mathbf{R}}$ zadané maticou $A \in O(n)$ resp. unitárne zobrazenia v komplexnom vektorovom priestore $E^n_{\mathbf{C}}$ zadané maticou $A \in U(n)$ zachovávajú skalárny súčin vektorov:

$$A \in O(n) \;\;\Rightarrow\;\; (A\mathbf{x}).(A\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}.\mathbf{y} \;\;\text{pre všetky}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n\,,$$

$$A \in U(n) \quad \Rightarrow \quad (A\mathbf{x}).(A\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}.\mathbf{y} \quad \text{pre všetky} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n\,.$$

Dôkaz: V reálnom prípade máme

$$(A\mathbf{x}).(A\mathbf{y}) \;=\; (A^t A\mathbf{x}).\mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}.\mathbf{y}\,,$$

lebo v $\mathbf{R}^n$ združená matica k A je A^t a naviac pre ortogonálnu maticu platí $A^t A \,=\, I$.

V $\mathbf{C}^n$ združená matica k A je $A^\dagger$, takže stačí využiť unitárnosť matice $A^\dagger A \,=\, I$:

$$(A\mathbf{x}).(A\mathbf{y}) \;=\; (A^\dagger A\mathbf{x}).\mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}.\mathbf{y}\,.$$

Gramov - Schmidtov ortonormalizačný proces. Nech $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ je systém lineárne nezávislých vektorov. Potom existujú také lineárne kombinácie

$$\mathbf{e}'_i \;=\; a_{i1}\,\mathbf{f}_1 \,+\, \ldots \,+\, a_{im}\,\mathbf{f}_m\,, \quad i \,=\, 1, \ldots, m\,,$$

že vektory $\mathbf{e}'_1 \ldots, \mathbf{e}'_m$ tvoria *ortonormálny systém*:

$$\mathbf{e}'_i.\mathbf{e}'_j \;=\; \delta_{ij}\,,$$

t.j. $|\mathbf{e}'_1| = \ldots = |\mathbf{e}'_m| = 1$ a $\mathbf{e}'_i.\mathbf{e}'_j \;= 0$ pre $i \neq j$.

Dôkaz urobíme matematickou indukciou. Zrejme

$$\mathbf{e}'_1 \;=\; \frac{1}{|\mathbf{f}_1|}\,\mathbf{f}_1\,.$$

Predpokladajme, že pre $k < m$ už je zostrojený ortonormálny systém vektorov $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_k$. Položme

$$\mathbf{e}'_{k+1} \;=\; \frac{1}{a}\,(\mathbf{f}_{k+1} \,-\, b_1\,\mathbf{e}'_1 \,\ldots\, -\, b_k\,\mathbf{e}'_k)\,.$$

Z podmienok $\mathbf{e}'_i.\mathbf{e}'_{k+1} = 0$ pre $i \,=\, 1, \ldots, k$ dostaneme $b_i \,=\, \mathbf{e}'_i.\mathbf{f}_{k+1}$. Podmienka $|\mathbf{e}'_{k+1}| = 1$ je splnená ak

$$a \;=\; |\mathbf{f}_{k+1} \,-\, b_1\,\mathbf{e}'_1 \,\ldots\, -\, b_k\,\mathbf{e}'_k| \;=\; \sqrt{|\mathbf{f}_{k+1}|^2 \,-\, |b_1|^2 \,-\, \ldots \,-\, |b_k|^2}\,.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory lineárnych zobrazení.

Definíca: Vektor C sa nazýva *normovaným vlastným vektorom* zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ v reálnom resp. komplexnom vektorovom priestore $\mathbf{V}$, ak existuje reálne resp. komplexné číslo λ tak, že je splnená rovnica

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \lambda\,\mathbf{x} \;\;\Leftrightarrow\;\; (A \,-\, \lambda\,I)\,\mathbf{x} \;=\; 0\,, \;\; |\mathbf{x}| \;=\; 1\,. \tag{106}$$

číslo λ sa nazýva vlastnou hodnotou zobrazenia A; vlastný vektor k hodnote λ sa zvykne označovať ako $\mathbf{x}_\lambda$, pokiaľ máme viac vlastných vektorov k hodnote λ (hovorí, že vlastná hodnota je *degenerovaá*), označujeme ich $\mathbf{x}_\lambda$, $\mathbf{x}'_\lambda$, ... (alebo im pridáme index).

Poznámka: Vlastné vektory zobrazenia $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ majú význačné postavenie: zobrazujú sa veľmi jednoducho $\mathbf{x}_\lambda \mapsto \lambda\,\mathbf{x}_\lambda$ - pri zobrazení sa mení len dĺžka vlastného vektora.

Hovoríme, že matica B je *podobná* matici A, ak existuje regulárna matica T tak, že platí: $B \;=\; T\,A\,T^{-1}$. Dve podobné matice majú rovnaké spektrum (rovnaké vlastné hodnoty aj s ich násobnosťou). Skutočne:

$$A\,\mathbf{x}_\lambda \;=\; \lambda\,\mathbf{x}_\lambda \;\;\Leftrightarrow\;\; B\,\mathbf{y}_\lambda \;=\; \lambda\,\mathbf{y}_\lambda,\; \mathbf{y}_\lambda \;=\; T\,\mathbf{x}_\lambda\,.$$

V konečne rozmernom reálnom resp. komplexnom vektorovom priestore (ako je $\mathbf{E}^n_{\mathbf{R}}$ resp. $\mathbf{E}^n_{\mathbf{C}}$ rovnica na vlastné hodoty zobrazenia je reprezentovaná homogénnou sústavou lineárnych algebraických rovníc pre zložky vektora $\mathbf{x}$. Aby táto sústava rovníc mala nenulové riešenie, determinant sústavy musí sa rovnať nule:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \quad (107)$$

Poznámka: Rovnica (107) určujúca vlastné hodnoty je algebraická rovnica n-tého stupňa pre neznámu λ. Podľa základnej vety algebry, takáto rovnica má vždy n komplexných koreňov $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, z ktorých niektoré sa môžu opakovať: ak niektoré korene sú rovnaké, hovoríme, že matica A má *degenerované spektrum*, ak sú rôzne hovoríme, že spektrum matice je *nedegenerované*.

Rovnica (107) na vlastné hodnoty reálnej matice môže mať komplexné korene, vtedy príslušné zobrazenie dane maticou v reálnom vektorovom priestore (dané maticou A) nemá vlastné vektory. V komplexnom prípade algebraická rovnica (107) má vždy n koreňov (niektoré môžu byť aj viacnásobné).

V ďalšom sa ohraničíme dôležitým prípadom zobrazení popísaných symetrickými resp. hermitovskými maticami, pre ktoré úloha na vlastné hodnoty má vždy riešenie.

Vlastné vektory symetrických a hermitovských matíc. Pre reálne symetrické matice a komplexné hermitovské matice platí nasledujúca dôležitá

Veta: Nech A je $n \times n$ reálna symetrická matica odpovedajúca zobrazeniu v $E^n_{\mathbf{R}}$ resp. A je komplexná hermitovská matica odpovedajúca zobrazeniu v $E^n_{\mathbf{C}}$. Potom

(i) vlastné hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matice A sú reálne,

(ii) vlastné vektory matice A k rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne,

(iii) existuje n lineárne nezávislych vlastných vektorov $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, ktoré možno vybrať ortonormálne.

Dôkaz urobíme pre hermitovskú maticu.

(i) Rovnicu na vlastné hodnoty

$$A\,\mathbf{x}_\lambda \;=\; \lambda\,\mathbf{x}_\lambda\,,$$

vynásobme najprv zľava normovaným vektorom $\mathbf{x}_\lambda$:

$$\mathbf{x}_\lambda\,.\,(A\,\mathbf{x}_\lambda) \;=\; \mathbf{x}_\lambda\,.\,(\lambda\,\mathbf{x}_\lambda) \;=\; \lambda\,(\mathbf{x}_\lambda\,.\,\mathbf{x}_\lambda) \;=\; \lambda\,.$$

Po vynásobení normovaným vektorom $\mathbf{x}_\lambda$ sprava dostaneme rovnicu:

$$(A\,\mathbf{x}_\lambda)\,.\,\mathbf{x}_\lambda \;=\; (\lambda\,\mathbf{x}_\lambda)\,.\,\mathbf{x}_\lambda \;=\; \bar{\lambda}\,(\mathbf{x}_\lambda\,.\,\mathbf{x}_\lambda) \;=\; \bar{\lambda}\,.$$

Vzhľadom k hermitovosti matice A máme $\mathbf{x}_\lambda\,.\,(A\,\mathbf{x}_\lambda) \;=\; (A\,\mathbf{x}_\lambda)\,.\,\mathbf{x}_\lambda$, takže musí byť $\lambda \;=\; \bar{\lambda}$.

(ii) Nech $\mathbf{x}_i$ je vlastný vektor k reálnej vlastnej hodnote λ_i, $i = 1, 2$:

$$A\,\mathbf{x}_1 \;=\; \lambda_1\,\mathbf{x}_1\,,$$

$$A\,\mathbf{x}_2 \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_2\,.$$

Vynásobme prvú rovnicu sprava vektorom $\mathbf{x}_2$ a druhú zľava vektorom $\mathbf{x}_1$:

$$(A\,\mathbf{x}_1)\,.\,\mathbf{x}_2 \;=\; \lambda_1\,\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{x}_2\,,$$

$$\mathbf{x}_1\,.\,(A\,\mathbf{x}_2) \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{x}_2\,.$$

Ľavé strany sa rovnajú vzhľadom k hermitovosti matice A, takže

$$\lambda_1\,\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{x}_2 \;=\; \lambda_2\,\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{x}_2\,.$$

Ak $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak musí byť $\mathbf{x}_1 \,.\, \mathbf{x}_2 = 0$.

(iii) Ak rovnica $\det(A - \lambda) = 0$ má k-násobný koreň λ_a, tak existuje k lineárne nezávislych riešení $\mathbf{x}^1_{\lambda_a}, \ldots, \mathbf{x}^k_{\lambda_a}$ rovnice $A\mathbf{x} = \lambda_a \mathbf{x}$, ktoré môžeme vybrať ortonormálne (ak treba, použijeme Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces). Pretože vlastné vektory k rôznym vlastným hodnotám sú ortogonálne, tak výsledný systém vlastných vektorov bude ortonormálny (bude ich práve n, lebo toľko je vlastných hodnôt aj s násobnosťou).

Poznámka: Ortonormálny systém vlastných vektorov $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ samozdruženej (reálnej symetrickej resp. komplexnej hermitovskej) matice A môže slúžiť ako ortonormálna báza v reálnom resp. komplexnom vektorovom priestore. V báze svojich vlastných vektorov je matica A diagonálna:

$$\mathbf{x}_i \,.\, (A\mathbf{x}_j) = \lambda_i \, \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Táto dôležitá vlastnosť je typická aj pre oveľa všeobecnejšie samozdružené zobrazenia v nekonečno rozmerných vektorových priestoroch.

Kvadratické a hermitovské formy vo vektorovom priestore.

Kvadratická forma v reálnom vektorovom priestore $\mathbf{E}^n_{\mathbf{R}}$ je definovaná pomocou symetrickej matice $A = A^t$ ako kvadratická funkcia (zložiek) vektora:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}).\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \, x_i \, x_j \,,$$

kde x_i, $i = 1, \ldots, n$, sú zložky vektora $\mathbf{x}$ a $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, označujú zložky matice A (v štandardnej báze). *Hodnosť formy* $\mathcal{A}$ je definovaná ako počet lineárne nezávislých riadkov matice A.

Nech $T = (T_{ij})$ je *regulárna matica* so zložkami T_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$. Uvažujme teraz kvadratickú formu zadanú maticou $B = T^t A T$:

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}.(B\mathbf{y}) == \mathbf{y}.(T^t AT\mathbf{y})$$

$$= (T\mathbf{y}).(AT\mathbf{y})$$

Teda $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. V zložkách

$$\sum_{k,l=1}^{n} B_{kl}\, y_k\, y_l = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j\,, \text{kde} \;\; x_i = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}\, y_k\,.$$

Platí nasledujúca veta o diagonalizácii reálnej kvadratickej formy:

Veta: Ku každej kvadratickej forme $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ hodnosti r v reálnom n-rozmernom vektorovom priestore možno nájsť súradnice $\mathbf{y}$, t.j. regulárnu maticu T tak, že forma odpovedajúca matici $B = T^t A T$ je diagonálna:

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k^2\,.$$

Dôkaz: Pre $r = 0$ máme $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \equiv 0$ a nie je čo dokazovať; nech teda $r > 0$.

(i) Ak všetky $A_{ii} = 0$, nájdeme $A_{ij} \neq 0$. Zobrazením

$$x'_i = x_1\,,\;\; x'_j = x_2\,,\;\; x'_1 = x_i\,,\;\; x'_2 = x_j\,,\;\; x'_k = x_k\,,\;\; k \neq 1,2,i,j\,,$$

dostaneme formu odpovedajúcu matici (A'_{ij}) s nulami na diagonále a $A'_{12} \neq 0$. Ďalším zobrazením

$$x''_1 = x'_1 - x'_2\,,\;\; x''_2 = x'_1 + x'_2\,,\;\; x''_k = y_k\,,\;\; k = 3,4,\ldots,n\,,$$

dostaneme formu odpovedajúcej matici (A''_{ij}) s $A''_{11} \neq 0$.

(ii) Ak existuje $A_{ii} \neq 0$, zobrazením

$$x''_i = x_1\,,\;\; x''_1 = x_i\,,\;\; x''_k = x_k\,,\;\; k \neq 1,i\,,$$

prejdeme k forme odpovedajúcej matici (A''_{ij}) s $A''_{11} \neq 0$.

Môžeme teda predpokladať, že máme formu odpovedajúcu (A_{ij}) s $A_{11} \neq 0$. Túto upravíme takto:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; A_{11}\,x_1^2 \,+\, 2\,A_{12}\,x_1\,x_2 \,+\, \ldots \,+\, 2\,A_{1n}\,x_1\,x_n \;+\; \sum_{i,j=2}^{n} A_{ij}\,x_i\,x_j$$

$$=\; \frac{1}{A_{11}}\,(A_{11}\,x_1 \,+\, \ldots \,+\, A_{1n}\,x_n)^2 \;+\; \sum_{i,j=2}^{n}(A_{ij} - A_{11}\,\delta_{ij})\,x_i\,x_j\,.$$

V premenných $y_1 = A_{11}\,x_1 + \ldots + A_{1n}\,x_n$, $y_2 = x_2$, ... ,$y_n = x_n$, máme

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{A_{11}}\,y_1^2 \;+\; \mathcal{A}_1(\mathbf{y})$$

kde kvadratická forma

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i,j=2}^{n}(A_{ij} - A_{11}\,\delta_{ij})\,x_i\,x_j\,,$$

závisí len od premenných $x_2, \ldots, x_n$. Uvedený postup zopakujeme s $\mathcal{A}_1(\mathbf{x})$ a prídeme k forme $\mathcal{A}_2(\mathbf{x})$, ktorá závisí od premenných $x_3, \ldots, x_n$, atď. Po n krokoch nakoniec obdržíme hľadanú diagonálnu formu $\mathcal{B}(\mathbf{y})$.

Poznámka: Po skončení procesu diagonalizácie miesto kvadratickej formy $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ s hodnosťou r obdržíme formu

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,y_k^2\,,$$

v ktorej

- p koeficientov α_k je kladných,
- q koeficientov je záporných, a
- ostávajúcich $n - p - q$ koeficientov je nulových.

Dvojica (p, q) sa nazýva signatúrou formy $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, súčet $r = p + q$ je rovný jej hodnosti. Zavedením nových premenných $z_k = \sqrt{|\alpha_k|}\,y_k$ (pre tie k, pre ktoré $\alpha_k \neq 0$) a ich vhodným preindexovaním, napokon upravíme formu na *kanonický tvar*:

$$\mathcal{C}(\mathbf{z}) \;=\; z_1^2 + \ldots + z_p^2 \;-\; z_{p+1}^2 \ldots - z_{p+q}^2 \,.$$

Hermitovská forma v komplexnom vektorovom priestore $\mathbf{E}^n_{\mathbf{C}}$ je definovaná pomocou hermitovkej matice $A = A^\dagger$ ako bilineárna funkcia zložiek x_i a $\bar{x}_i$ vektora $\mathbf{x}$ a komplexne združeného vektora $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x}.(A\mathbf{x}) \;=\; (A\mathbf{x}).\mathbf{x} \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \bar{x}_i\, x_j \,.$$

Vďaka hermitovosti matice $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, je číslo $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ reálne: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$. *Hodnosť formy* A je opäť definovaná ako počet lineárne nezávislých riadkov matice A.

V komplexnom vektorovom priestor tiež platí veta o diagonalizácii hermitovskej formy:

Veta: Ku každej hermitovskej forme $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ hodnosti r v komplexnom n-rozmernom vektorovom priestore možno najsť súradnice $\mathbf{y}$, t.j. regulárnu maticu T, tak, že forma odpovedajúca matici $B = T^t\, A\, T$ je diagonálna:

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, |y|_k^2 \,,$$

s reálnymi diagonálnymi prvkami $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Dôkaz: Analogickými úpravami ako v reálnom prípade, možno dosiahnuť, že $A_{11} \neq 0$. Takúto hermitovskú formu upravíme takto:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; A_{11}\, \bar{x}_1\, x_1 \;+\; A_{12}\, \bar{x}_1\, x_2 \;+\; A_{21}\, \bar{x}_2\, x_1 \;+\; \ldots \;+\; A_{1n}\, \bar{x}_1\, x_n \;+\; A_{n1}\, \bar{x}_n\, x_1$$

$$+ \sum_{i,j=2}^{n} A_{ij}\, \bar{x}_i\, x_j \;=\; \frac{1}{A_{11}}\, |A_{11}\, x_1 + \ldots + A_{1n}\, x_n|^2 \;+\; \sum_{i,j=2}^{n} (A_{ij} - A_{11}\, \delta_{ij})\, \bar{x}_i\, x_j \,.$$

V premenných $y_1 = A_{11}\, x_1 + \ldots + A_{1n}\, x_n$, $y_2 = x_2$, ... ,$y_n = x_n$, máme

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{A_{11}}\, |y|_1^2 \;+\; \mathcal{A}_1(\mathbf{y})$$

kde kvadratická forma $\mathcal{A}_1(\mathbf{x})$ závisí len od premenných $x_2, \ldots, x_n$. Opakovaním tohto postupu po n krokoch nakoniec obdržíme hľadanú diagonálnu formu $\mathcal{B}(\mathbf{y})$.

Poznámka: Po skončení procesu diagonalizácie miesto hermitovskej formy $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ s hodnosťou r obdržíme formu

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, |y|_k^2\,,$$

v ktorej p koeficientov α_k je kladných, q koeficientov je záporných, a ostávajúcich $n-p-q$ koeficientov je nulových. Dvojica (p,q) sa nazýva signatúrou formy $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, súčet $r = p+q$ je rovný jej hodnosti. Zavedením nových premenných $z_k = \sqrt{|\alpha_k|}\, y_k$ (pre tie k, pre ktoré $\alpha_k \neq 0$) možno formu upraviť na *kanonický tvar*:

$$\mathcal{C}(\mathbf{z}) \;=\; |z|_1^2 + \ldots + |z|_p^2 \;-\; |z|_{p+1}^2 \ldots - |z|_{p+q}^2\,.$$

Diagonalizácia foriem v báze vlastných vektorov.

Kvadratická reálna forma

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad \text{kde } A_{ij} \;=\; A_{ji}\,,$$

je zadaná pomocou reálnej symetrickej matice $A = (A_{ij})$, ktorá má reálne vlastné hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Príslušné vlastné vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \ldots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \ldots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \ldots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

pre $j = 1, 2, \ldots, n$, spĺňajú po rade rovnice

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \, \mathbf{x}_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \, x_{kj} = \lambda_j \, x_{ij} \, .$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, vyberieme tak, že tvoria ortonormálny systém:

$$\mathbf{x}_i \, . \, \mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \, x_{kj} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Posledné vzťahy sú ekvivaletné tomu, že matica

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

(ktorej stĺpce odpovedajú vlastným vektorom) je ortogonálna. Podmienka ortogonality $X^t \, X = I$ odpovedá práve ortonormalite systému vlastných vektorov:

$$(X^t \, X)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x^t_{ik} \, x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \, x_{kj} = \delta_{ij} \, .$$

Poznamenajme ešte, že platí

$$(A \, X)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \, x_{kj} = \lambda_j \, x_{ij} \, .$$

Teraz už jednoducho ukážeme, že matica $B = X^t \, A \, X$ je diagonálna. Skutočne,

$$B_{ij} = (X^t \, A \, X)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x^t_{ik} (A \, X)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \, \lambda_j \, x_{kj}$$

$$= \lambda_j \sum_{k=1}^{n} x_{ki}\, x_{kj} \;=\; \lambda_j\, \delta_{ij}\,.$$

Hermitovská komplexná forma

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \bar{x}_i\, x_j\,, \quad \text{kde } A_{ij} \;=\; \bar{A}_{ji}\,,$$

je zadaná pomocou hermitovskej matice $A^\dagger \;=\; A$, ktorá má reálne vlastné hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Príslušné ortonormálne vlastné vektory

$$\mathbf{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \ldots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \ldots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad \ldots,\quad \mathbf{x}_n \;=\; \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \ldots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

pre $j \;=\; 1, 2, \ldots, n$, spĺňajú vzťahy

$$\mathbf{x}_i \,.\, \mathbf{x}_j \;=\; \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_{ki}\, x_{kj} \;=\; \delta_{ij} \quad i, j \;=\; 1, 2, \ldots, n\,,$$

ktoré sú ekvivaletné tomu, že matica

$$X \;=\; \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

je unitárna: $X^\dagger\, X \;=\; I$. Rovnakým postupom ako v reálnom prípade, možno dokázať, že matica $B \;=\; X^\dagger\, A\, X$ je diagonálna:

$$B_{ij} \;=\; (X^\dagger\, A\, X)_{ij} \;=\; \lambda_j\, \delta_{ij}\,.$$

Poznámka: Ako sme videli vyššie, kvadratickú formu môžeme celkom jednoducho (induktívne) diagonalizovať vhodnou regulárnou maticou

$T \in GL(n, \mathbf{R})$ resp. $T \in GL(n, \mathbf{C})$:

$$A \mapsto B = T^t A T ,$$

kde B je diagonálna matica v kanonickom tvare s nulami a ± 1-mi na diagonále.

Diagonalizácia pomocou ortogonálnej alebo unitárnej matice $T \in O(n)$ resp. $T \in U(n)$

$$A \mapsto B = T^t A T ,$$

je oveľa komplikovanejšia, lebo vyžaduje riešenie algebraickej rovnice na vlastné hodnoty $|A - \lambda I| = 0$, ktorá je n-tého stupňa. Ako za "odmenu" diagonálna matica B bude mať na diagonále vlastné hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ktoré poskytujú o matici (zobrazení) oveľa úplnejšiu informáciu ako jej kanonický tvar.