Extrémy funkcie

[E.Masár, ver. 26.11.2011]

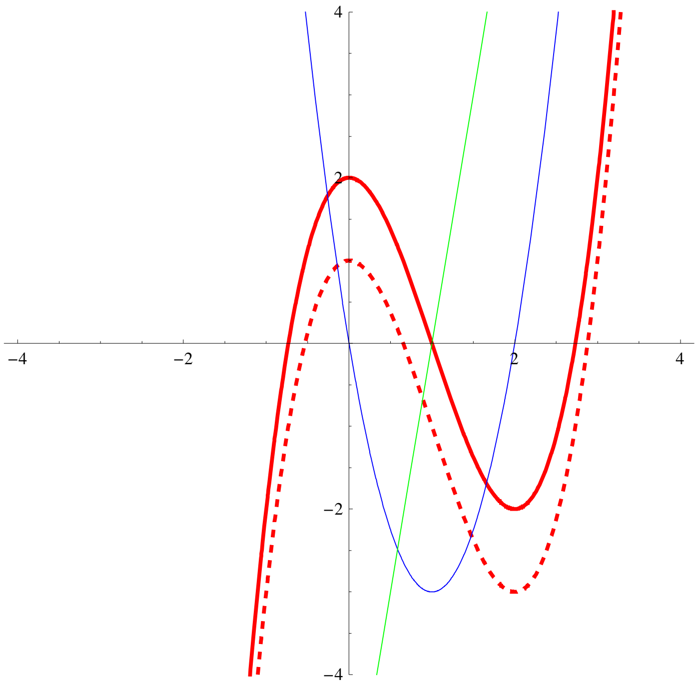
Prvý obrázok dáva návod na zisťovanie "slušných" lokálnych extrémov, v ktorých existuje konečná prvá aj druhá derivácia. Druhý obrázok ukazuje príklad extrému, v ktorom derivácia neexistuje.

***Farby**: funkcia: **červená**, 1.derivácia: modrá, 2.derivácia: zelená.*

$f(x)=2-3x^2+x^3$

$f'(x)=3(-2+x)x$

$f''(x)=6(-1+x)$



Plnou červenou čiarou je vykreslená funkcia $f(x)$. Čiarkovane je vykreslená funkcia $g(x) = f(x) -1$. Pretože $g(x)$ sa od $f(x)$ líši len konštantou, $g(x)$ má rovnaké derivácie (a teda aj polohu extrémov) ako $f(x)$. Ďalej sa budeme zaoberať funkciou $f(x)$.

Na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2,\infty)$ funkcia $f(x)$ rastie, čomu zodpovedá kladné znamienko prvej derivácie $f'(x)$. Na intervale $(0,2)$ funkcia $f(x)$ klesá, čomu zodpovedá záporné znamienko prvej derivácie $f'(x)$. V bode x = 0 má $f(x)$ lokálne maximum, v bode $x = 2$ má $f(x)$ lokálne minimum. Toto sú lokálne extrémy funkcie $f(x)$. Vidíme, že v lokálnych extrémoch je prvá derivácia nulová: $f'(0) = f'(2) = 0$.

Samotná nulovosť prvej derivácie ale nepostačuje na to, aby v danom bode mala funkcia extrém. Tomu sa hovorí, že $f'(a) = 0$ je nutná, ale nie postačujúca podmienka extrému v bode $x=a$. Ak by sa prvá derivácia (modrá krivka na grafe) len dotýkala osi x, tak v tom bode by funkcia $f(x)$ nemala extrém. V bode $x = a$ má $f(x)$ lokálny extrém iba vtedy, ak sa v jeho okolí **mení znamienko prvej derivácie**. V našom prípade je to splnené, lebo v bodoch $x = 0$, $x = 2$ prvá derivácia $f'(x)$ pretína os x.

Namiesto testovania zmeny znamienka $f'(x)$ v okolí bodu $x=a$, v ktorom platí $f'(a) = 0$ stačí, ak sa presvedčíme, že $f''(a) \neq 0$. Prvá derivácia f' je tiež funkcia, a teda znamienko druhej derivácie f'' hovorí, či prvá derivácia rastie alebo klesá. V lokálnom maxime funkcie jej prvá derivácia klesá, preto tam platí *f ’’ < 0.* Naopak, v lokálnom minime prvá derivácia rastie, preto tam musí platiť *f ’’ > 0.*

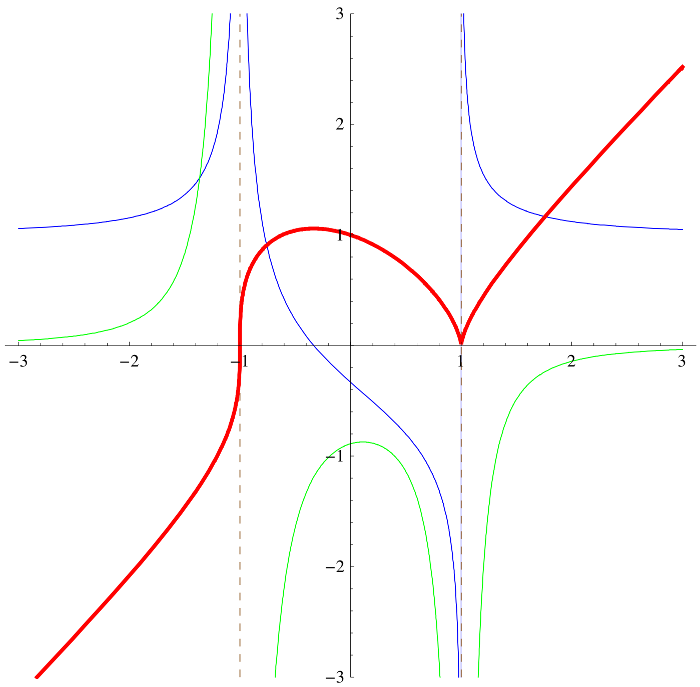
Ak teda *f ’ (a) = 0* a zároveň *f ’’ (a)≠ 0*, znamená to, že v *x = a* má funkcia lokálny extrém.
Ak *f '' (a) < 0*, jedná sa lokálne maximum, ak *f '' (a) > 0*, jedná sa o lokálne minimum.

V našom prípade f ''(0) = - 6, f ''(2) = 6, a preto je v bode x = 0 lokálne maximum a v bode x = 2 lokálne minimum.

$$f(x) = \left((-1+x)^2 (1+x)\right)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{(-1+x)(1+3x)}{3\left((-1+x)^2(1+x)\right)^{2/3}}$$

$$f''(x) = -\frac{8}{9(1+x)\left((-1+x)^2(1+x)\right)^{2/3}}$$



Funkcia má dva lokálne extrémy. V bode $x = -\frac{1}{3}$ je lokálne maximum, v ktorom existuje prvá aj druhá derivácia. V bode $x = 1$ je lokálne minimum, v ktorom neexistuje derivácia, lebo derivácie zľava a sprava su rôzne.

V bode $x = -1$ funkcia veľmi prudko rastie. V tomto bode nadobúda prvá derivácia nekonečnú kladnú hodnotu a druhá derivácia neexistuje.