Priklady na cvicenie z kvantove teorie

1. Napiste spamati, aku integralnu rovnost musi splnat hermitovsky operator $\hat{A}$ pre kazde dve vlnove funkcie $\Psi(x)$ a $\Phi(x)$ (kvadraticky integrovatelne).
Je operator komplexneho zdruzenia $\hat{K}$ definovany ako $\hat{K}\Psi(x) = \Psi(x)^*$ hermitovsky? (Je vobec linearny?)
Je operator absolutnej hodnoty $\hat{A}$ definovany ako $\hat{A}\Psi(x) = |\Psi(x)|$ hermitovsky? (Je vobec linearny?)
Je operator suradnice (polohy) $\hat{x}$ definovany ako $\hat{x}\,\Psi(x) = x\,\Psi(x)$ hermitovsky? (Je linearny?)
Je operator derivacie podla suradnice $\hat{D}$ definovany ako $\hat{D}\,\Psi(x) = \frac{d}{dx}\,\Psi(x)$ hermitovsky? (Je linearny?)
Je operator druhej derivacie podla suradnice $\hat{D^2}$ definovany ako $\hat{D^2}\,\Psi(x) = (\hat{D})^2\,\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,\Psi(x)$ hermitovsky? (Je linearny?)

2. Pre lubovolne tri operatory $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, vyjadrite komutator $[\hat{A},\, \hat{B}\hat{C}]$ pomocou jednoduchsich komutatorov $[\hat{A},\, \hat{B}]$ a $[\hat{A},\, \hat{C}]$. Odpoved sa zide v dalsich prikladoch, aj na domacu ulohu.

3. Vyuzite **2.** na vypocet komutatora $[\hat{x},\, \hat{p}_x^2]$ pomocou znameho vysledku pre $[\hat{x},\, \hat{p}_x]$. (Ak si nie ste isti, comu sa rovna $[\hat{x},\, \hat{p}_x]$, odvodte si ho rychlo zo znameho tvaru operatora $\hat{p}_x$. $\hat{p}_x$ si treba pamatat.)

4. Vyuzite **3.** a **2.** na vypocet komutatora $[\hat{x},\, \hat{p}_x^n]$, kde $n \in N$. Najprv si tipnite, ako by mohol vysledok vyzerat a potom ho dokazte pomocou matematickej indukcie. Ak si neviete tipnut, pouzite **3.** a **2.** na vypocet $[\hat{x},\, \hat{p}_x^3]$, pripadne $[\hat{x},\, \hat{p}_x^4]$.

5. *jednoduche otazky*
(a) Vymenujte vlastnosti hermitovskych operatorov. *Ak niektoru zabudnete vymenovat, nevadi. Podstatne je vediet o vsetkych a rozumiet, co znamenaju.*

(b) Nech su dve vlnove funkcie (napr. $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$) navzajom ortogonalne. Ako je tato ortogonalita vyjadrena matematicky?

(c) Preco su vlnove funkcie stacionarnych stavov s roznymi energiami na seba vzdy ortogonalne?
Vysvetlite svoju odpoved na zaklade bezcasovej SchR.

(d) Ukazte, ze ak vlastna hodnota A hermitovskeho operatora $\hat{A}$ je dvakrat degenerovana, teda $\hat{A}\phi_1(x) = A\Phi_1(x)$ a $\hat{A}\Phi_2(x) = A\Phi_2(x)$ a $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ su linerane nezavisle funkcie, tak potom aj ich lubovolna superpozicia $\tilde{\Phi}(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$ je vlastnou funkciou $\hat{A}$ s vlastnou hodnotou A. c_1 a c_2 su lubovolne komplexne cisla.

(e) Co znamena, ze system vlastnych funkcii hermitovskeho operatora je uplny?

Co je to "baza" vo vektorovom priestore? Mozno povedat, ze vlastne funkcie hermitovskeho operatora tvoria ortonormovanu bazu v priestore vlnovych funkcii (kvadraticky integrovatelnych)?

(f) Nadvazuje na casti *(d)* a *(e)*: Ukazte, ze ak su $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ na seba ortogonalne (podla casti *(d)* im prisluchajuca vlastna hodnota je rovnaka dvakrat degenerovana), tak $\tilde{\Phi}_2(x) = -c_2^*\Phi_1(x) + c_1^*\phi_2(x)$ je ortogonalna na $\tilde{\Phi}(x)$. (Odteraz budeme oznacovat $\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}_1(x)$.)
Zaroven priamym dosadenim do normovacej podmienky ukazte, ze obidve nove vlnove funkcie $\tilde{\Phi}_1(x)$ a $\tilde{\Phi}_2(x)$ su spravne normovane, ak plati $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Znamena to, ze vyber dvojice funkcii $\Phi_1(x)$ a $\Phi_2(x)$ je rovnocenny vyberu dvojice $\tilde{\Phi}_1(x)$ a $\tilde{\Phi}_2(x)$ pri vybere bazy v priestore kvadraticky integrovatelnych vlnovych funkcii.

6. *operator parity*
Operator parity je mozno najjednoduchsi netrivialny operator kvantovej mechaniky. V jednom rozmere je definovany vztahom $\hat{P}\phi(x) = \phi(-x)$.
(a) Ukazte, ze $\hat{P}$ je hermitovsky. *Zacnite dokazom, ze je linearny.*
(b) Najdite vlastne hodnoty $\hat{P}$. *Trik: Aplikujte ho na vlastnu funkciu dvakrat. Ked je $\hat{P}$ hermitovsky, mali by byt realne. Su?*
(c) Ake su vlastne funkcie $\hat{P}$ prisluchajuce k najdenym vlastnym hodnotam? Je niektora z vlastnych hodnot degenerovana? Kolkokrat?
(d) Ked je $\hat{P}$ hermitovsky, vlastne funkcie prisluchajuce k jeho roznym vlastnym hodnotam by mali byt ortogonalne. Su?
(e) Ked je $\hat{P}$ hermitovsky, jeho vlastne funkcie by mali tvorit uplny system. Tvoria? *Pamatate si, co to znamena, ze maju tvorit "uplny system"?*
(f) Zjavne parita je fyzikalnou velicinou. Teda mozno ju merat. Nakolko ide o vlastnost vlnovej funkcie, v makroskopickom svete ju nemeriame a nemame pre nu vybudovanu intuiciu.
Pre kvantovu casticu viazanu na usecke ju mozeme definovat voci stredu usecky. Alebo ponechat definiciu z uvodu k tomuto prikladu a usecku zadefinovat na intervale $< -L/2, L/2 >$ namiesto $< 0, L >$. V ktorych stacionarnych stavoch na usecke ma castica ostru hodnotu parity? Comu je jej parita vtedy rovna?
(g) Rozsirte definiciu parity na 3-rozmerny svet.

7. Rozhodnite, ci na zaklade prikladov **5.** a **6.** mozno pre stacionarne stavy volnej castice s energiou $E = \frac{p^2}{2m}$ ekvivalentne pouzivat bud dvojicu vlnovych funkcii $(e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}, e^{-ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar})$ alebo dvojicu funkcii $(\sin(px/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}, \cos(px/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar})$ ako elementy bazy pre stavy volnej castice (napriklad vlnove baliky).