

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

0. (a) Presvedčte sa, že naozaj platí rovnosť $200 \text{ MeV fm} = 2000 \text{ eV } 10^{-10} \text{ m}$.
Prečo nás tieto konštanty zaujímajú?

(b) Presvedčte sa, že vzťah Rayleigha a Jeansa pre spektrálnu hustotu energie žiarenia v dutine naozaj odpovedá Planckovmu výrazu v limite nízkych frekvencií. *Vzorce sú na konci tohto dnešného zadania.*

1. (a) Pomocou absolútnej hodnoty náboja elektrónu $e = |Q_e| = Q_p$ napíšte definíciu konštanty jemnej štruktúry α . *Je treba si ju pamätať a používať namiesto "Břr" konštanty $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.*

(b) Konštantu jemnej štruktúry α je bezrozmerná. *(Dokážete to na domácu úlohu.)* Akej číselnej hodnote je rovná?

(c) Čo je to α častica? Aký je jej elektrický náboj?

(d) Čo má α častica spoločné s $\alpha = 1/137$?

2. Relativita.

Tento semester sa budeme spolu učiť kvantovú mechaniku. Je dôležité mať celý čas na pamäti, že to je *nerelativistická* teória. Niekedy sa ukáže potrebné pridať aj relativistické korekcie. Treba základné porozumenie, kedy je častica relativistická a kedy nie. Pomôže k tomu tento príklad.

(a) Načrtnite si pravouhlý trojuholník s odvesnami v horizontálnom a vertikálnom smere zhruba rovnakej dĺžky. Uvažujme voľnú časticu s hmotnosťou m a hybnosťou p . Nech odteraz jedna odvesna vášho trojuholníka, povedzme horizontálna, odpovedá veličine mc^2 a druhá odvesna (vertikálna) odpovedá veličine pc . Aký je potom z Pytagorovej vety fyzikálny význam prepony trojuholníka?

(b) Načrtnite teraz opäť pravouhlý trojuholník, s pôvodnou horizontálnou odvesnou nezmenenou mc^2 a s vertikálnou odvesnou pc scvrknutou skoro až na nulu. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je častica s takouto hybnosťou nerelativistická alebo ultrarelativistická? Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu? Vieme, ako závisí energia od hybnosti pre $pc \ll mc^2$? *Táto závislosť sa nedá vyčítať z obrázka.*

(c) Opačná limita ako v (b): v trojuholníku teraz zväčšíte pôvodnú vertikálnu odvesnu $pc \gg mc^2$, ponechajúc horizontálnu odvesnu mc^2 pôvodnej dĺžky. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je takáto častica nerelativistická alebo ultrarelativistická?

Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu?

Ako je ešte významné, či je častica hmotná alebo nehmotná? *Ak má hmotná častica tak veľkú energiu, že jej hmotnosť sa stala bezvýznamnou a možno ju zanedbať, časticu voláme ultrarelativistickou. Jej kinematika (opis pohybu) sa stáva rovnaká ako kinematika fotónu, častice svetla s nulovou hmotnosťou. Napríklad rýchlosť ultrarelativistickej častice je už prakticky rovná c .*

3. Relativita - pokračovanie

(a) Koľko je mc^2 pre elektrón?

Koľko je mc^2 pre protón?

Koľko je mc^2 pre α časticu?

Stačia tu odpovede s presnosťou do 10%.

(b) Je alebo nie je relativistická α častica z Rutherfordovho experimentu, pri ktorom Rutherford objavil/odvodil, že v atóme je tvrdé jadro?

Je alebo nie je elektrón viazaný v atóme vodíka relativistický?

(c) LHC v tomto roku urýchľuje protóny na energiu 6.5 TeV. "T" je skratka pre "tera" a znamená tisíc Giga, resp. $\text{TeV} = 10^{12}$ eV. Sú tieto protóny nerenativistické, relativistické alebo ultrarelativistické?

Svoje odpovede zdôvodnite.

Dôležitá poznámka: V minulosti ste sa naučili, že či je častica relativistická, určíme porovnaním jej rýchlosti s rýchlosťou svetla. To je správne, ale v kvantovom svete máme problém hovoriť o rýchlosti častice, keďže princíp neurčitosti nedovoľí merať presne polohu a hybnosť. V kvantovom svete sa veľmi zide to, čo sme sa práve naučili: určovať, či je častica relativistická z jej energie, prípadne z jej hybnosti porovnaním s mc^2 .

4. Relativita - pokračovanie

(a) Elektrón urýchlíme z pokoja potenciálovým rozdielom

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) 1 MV = 1000 kV.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je elektrón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(b) Aká je v každom z týchto prípadov jeho kinetická energia?

(c) Stojaci nehybný protón urýchlíme potenciálovým rozdielom

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) 1 MV = 1000 kV.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je protón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(d) Od zhruba akého potenciálového rozdielu bude potrebné považovať urýchlený protón za relativistickú časticu? Asi aký dlhý tunel na to treba, ak sa protón pohybuje po priamke a prierné napätie vzduchu či vo vákuu je cca 1 MV/m?

Poznamenajme, že urýchľujúce elektrické pole generované ako maximum pulznej

elmag vlny dosahuje dnes hodnoty 35MV/m. Sofistikované lineárne urýchľovače teda nie sú limitované vyššie uvedenou hodnotou statického prierného napätia a sú / mohli by byť kratšie, ako by sme si mohli naivne myslieť.

(e) Čo myslíte, prečo sa plánujú stavať dlhokánske lineárne urýchľovače (zatiaľ len pre elektróny), keď môžeme nabitú časticu urýchľovať postupne počas ich periodického kruhového pohybu na cyklotróne, resp. synchrotróne oveľa menších rozmerov?

5. (a) Elektrón urýchlený potenciálovým rozdielom ΔV chceme napáliť do neutrálneho atómu vodíka a dosiahnuť pritom ionizáciu tohto atómu.

Musí byť pritom elektrón relativistický?

Čo je vlastne ionizácia a aké je minimálne ΔV , ktoré k nej treba?

(b) Podobný príklad, ale elektrónom chceme tentokrát rozbiť molekulu vodíka na dva (neutrálne) atómy vodíka. Tipnite si najprv, či k tomu bude treba väčšiu alebo menšiu energiu ako k ionizácii atómu H, otázka (a). Zíde sa k tomu vypočítať príklad B2 zo Zbierky na str.30. Tipli ste si správne? Ako sa odborne nazýva takéto rozbitie molekuly?

(c) Navrhните, ktorý atóm je ľahké, resp. ťažké ionizovať. Navrhните, ktorú molekulu je ľahké, resp. ťažké rozbiť.

(d) Keď už vieme, akú energiu treba v častiach (a) a (b), určte, akú maximálnu vlnovú dĺžku by malo mať svetlo, ktoré dokáže toto isté "rozbíjanie".

(Pokúste sa o čo najpresnejšiu odpoveď bez kalkulačky.)

Bude na to stačiť viditeľné svetlo? Rozbije slnečné svetlo vodíkové atómy či molekuly?

6. (a) Vychádzajúc zo zákonov zachovania energie a hybnosti ukážte, že voľný elektrón nemôže vyžiariť fotón.

(b) Podobne ukážte, že voľný fotón sa nemôže rozpadnúť na elektrón-pozitronový pár. *Inak by sme nevideli vzdialené hviezdy a galaxie.*

7. (a) Uvažujme namiesto atómu vodíka elektrón viazaný k jadrú s väčším atómovým číslom Z , napr. jadrú neónu ($Z = 10$), vápnika ($Z = 20$) alebo hoci uránu ($Z = 92$). Je naďalej korektné používať na rádové odvodenie veľkosti oblasti s elektrónom nerelativistickú fyziku? Odpoveď vysvetlite.

(b) Ak použijeme relativistickú fyziku, bude odhad veľkosti oblasti s elektrónom menší alebo väčší voči výsledku podľa nerelativistickej fyziky?

K príkladu 0. (b):

$$\rho_T(\nu) = k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad \text{Rayleigh - Jeans, z klasickej fyziky}$$

$$\rho_T(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad \text{Planck, z kvantovej fyziky}$$