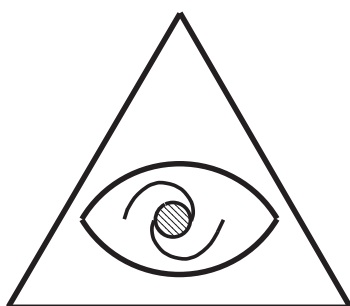


Kozmológia

(prednáška pre 5.roč. ftf)

Vladimír Balek



Obsah

1. Súčasná predstava o vesmíre
2. Robertsonova–Walkerova metrika
3. Hubblov zákon
4. Dynamika vesmíru
5. Modely vesmíru
6. Rozpínanie horúceho vesmíru
7. Časové škály
8. Neutrína a páry
9. Nukleosyntéza
10. Baryogenéza
11. Inflácia
12. Vznik galaxií

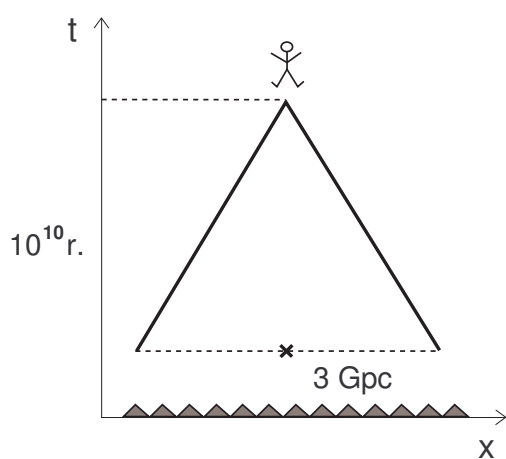
Príklady

1. Súčasná predstava o vesmíre

Predmetom kozmológie je vesmír čiže kozmos, v starom Grécku „poriadok“. V súčasnej kozmológii je poriadok homogenita a izotropia na najväčšej škále a štruktúra na menších škálach. Poriadok možno pochádza z chaosu. Predpokladá sa, že sa vytvoril tesne po Veľkom tresku z chaotického začiatočného stavu infláciou.

O b m e d z e n i a k o z m o l ó g i e

Kozmológia je „veda“ o „vesmíre“. O „vesmíre“: neskúma sa všetko, čo je, ale usťredňuje sa cez kocky s hranou cca 50 Mpc. (1 pc = vzdialenosť, z ktorej vidno úsečku Zem-Slnko postavenú kolmo na lúč pozorovania pod uhlom $1'' = 3,25$ sv. r.) „Veda“: (1) vesmír existuje v jedinom exemplári a



nemôžeme ho ovplyvniť (robiť s ním pokusy), (2) z vesmíru vidíme iba časť – minulý svetelný kužeľ s vrcholom na Zemi, siahajúci do vzdialenosti cca 3 Gpc. V tomto kuželi je 10 mld. galaxií (10^5 kociek $\times 10^5$ galaxií), na okraji sú *kvazary*. Keďže 3 Gpc je približne 10 mld. sv. r. a vek vesmíru je cca 10 mld. r., to, čo vidíme, je všetko, čo sa dá vidieť. Prekonanie obmedzení: (1) známa fyzika, (2) predpoklad, že vesmír vyzerá zovšadiaľ rovnako ako zo Zeme („nie sme stredom vesmíru“ – *Koperníkov princíp*).

Č o v i e m e z p o z o r o v a n i a

Vesmír sa rozpína. Platí *Hubbleov zákon*, podľa ktorého je rýchlosť galaxií úmerná ich vzdialenosti od Zeme. Konštanta úmernosti sa nazýva *Hubbleova konštanta* a má hodnotu $H \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Rozpínanie sa nedeje „od nás“, ale vyzerá z každého miesta rovnako (Koperníkov princíp!), vid' podobnosť trojuholníkov Zem-galaxia 1-galaxia 2 v rôznych časoch. Keby sa vesmír rozpínal rovnomerne, od Veľkého tresku dodnes by uplynul čas $1/H \sim 14$ mld. r.

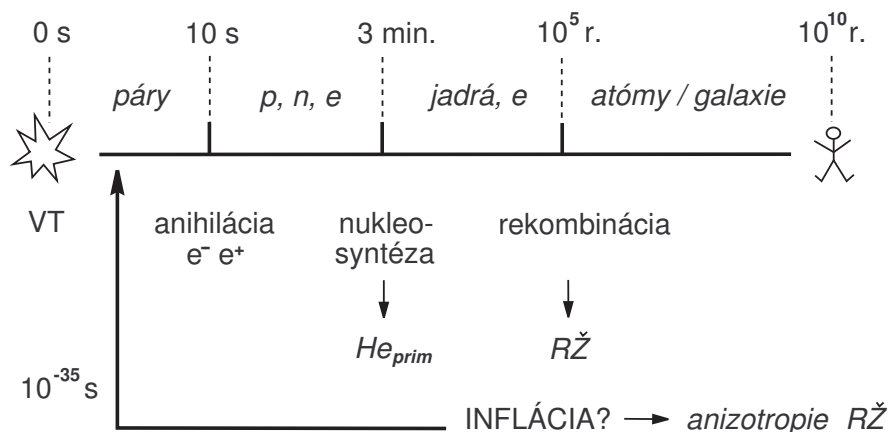
Vesmír sa zrýchľuje (NOVÉ!). Pozorovaná rýchlosť v_1 sa líši od súčasnej rýchlosti v_0 , pretože galaxiu pozorujeme v minulosti. Z pozorovania supernov plynie, že $v_1 < v_0$, takže rozpínanie vesmíru bolo v minulosti pomalšie než dnes. To sa dá vysvetliť ako dôsledok nenulovej hodnoty *kozmozologickej konštanty* Λ , zvanaj aj *tmavá energia*.

Vesmír sa skladá z látky, tmavej energie a žiarenia. Časť látky je sústredená vo hviezdnych ostrovoch – *galaxiách*, zvyšok je rozptýlený medzi nimi. Iné delenie: časť je *baryónová látka*, takmer všetka tmavá, zložená z atómov, a časť *nebaryónová látka*, výhradne tmavá, s neznámym zložením. Väčšina nebaryónovej látky asi pripadá na *chladnú tmavú látku* (cold dark matter, CDM). Ak zavedieme $\Omega = \rho/\rho_{krit}$, kde ρ je pozorovaná hustota a ρ_{krit} je hustota, pri ktorej by bol vesmír plochý (3-rozmerný priestor by bol euklidovský), platí $\Omega_b \doteq 0,04$ a $\Omega_l \sim 0,3$. Λ / tmavá energia prispieva k Ω hodnotou $\Omega_\Lambda \sim 0,7$. Žiarenie je tepelné, s teplotou 2,7 K. Nazýva sa *reliktové žiarenie* alebo *žiarenie kozmického pozadia* (cosmic microwave background, CMB). RŽ pozorujeme iba na Zemi, ale predpokladáme, že zapĺňa celý vesmír. Látka je na škálach väčších než 50 Mpc homogénna a izotropná, žiarenie je s veľkou presnosťou izotropné. Anizotropie sú rádu 10^{-5} , s hlavným maximom na uhlovej škále cca 20' a s vedľajšími maximami na menších uhlových škálach. Z polohy hlavného maxima plynie, že vesmír je plochý alebo blízky k plochému, $\Omega \doteq 1$.

Č o v i e m e z t e ó r i e

Budúcnosť vesmíru. Možnosť 1: vesmír sa zastaví a začne sa stláčať, až sa celý stlačí do bodu; možnosť 2: vesmír sa bude rozpínať donekonečna. Pri $\Lambda = 0$ je výber medzi možnosťami daný geometriou vesmíru (možnosť 1 nastane, ak je vesmír uzavretý, a možnosť 2, ak je otvorený alebo plochý), zatiaľ čo pri $\Lambda \neq 0$ závisí aj od veľkosti Λ (pri nadkritickej hodnote Λ možnosť 2 nastane, aj ak je vesmír uzavretý). V zrýchľujúcom sa vesmíre nutne nastáva možnosť 2, takže podľa našich súčasných vedomostí sa vesmír, v ktorom žijeme, bude rozpínať večne.

Minulosť vesmíru. Na začiatku bol Veľký tresk. Vesmír bol zložený z párov, tie sa anihilovali a vo vesmíre ostali iba p , n a e . Časť p sa spojila s n do jadier ľahkých prvkov (prevažne *primordiálne He*), jadrá sa spojili s e do atómov a z atómov vznikli galaxie. Vesmír obsahoval aj γ a ν , ktoré „prežili“ dodnes: γ tvoria RŽ a ν zrejme prispievajú k tmavej látke. Homogenita a izotropia vesmíru na najväčšej škále aj nehomogenita na menších škálach možno pochádza z exponenciálneho rozpínania vesmíru tesne po Veľkom tresku – *kozmoologickej inflácie*.



2. Robertsonova–Walkerova metrika

Podľa VTR vesmír môže byť uzavretý, plochý alebo otvorený a jeho rozpínanie je dané závislosťou škálovacieho parametra od času. Z vyjadrenia metriky plynie Hubblov zákon aj vzorec pre kozmologický červený posun.

Metrika a tenzor energie hybnosti

Galaxie sú usporiadané do kôp a kopy môžu byť usporiadané do väčších štruktúr (hovorí sa o „bunkových stenách”), ale rozdelenie galaxií ustrednené cez kocky s hranou zhruba 50 Mpc je podľa všetkého HOMOGENNÉ A IZOTROPNÉ. To znamená, že stredná hustota hmotnosti definovaná ako podiel hmotnosti a objemu kocky je všade rovnaká (homogenita) a najväčšie štruktúry v kockách sú naukladané vo všetkých smeroch s rovnakou hustotou (izotropia). Homogenitu a izotropiu látky spochybňujú niektoré pozorované útvary ako Veľký múr, veľké prázdna a vrstvy v úzkych kuželoch pozorovania, ale v jej prospech svedčí vysoká izotropia reliktového žiarenia.

Homogénny a izotropný vesmír má 3-geometriu S^3 (3-rozmerná sféra), E^3 (3-rozmerný euklidovský priestor) alebo H^3 (3-rozmerná hyperbolická sféra, „Lobačevského nadrovina”). Zavádza sa *parameter krivosti* k , ktorý sa rovná 1 pre S^3 , 0 pre E^3 a -1 pre H^3 . Vesmír s $k = 1$ je *uzavretý*, s $k = 0$ *plochý* a s $k = -1$ *otvorený*. Metrika homogénneho a izotropného vesmíru sa nazýva *Robertsonova–Walkerova metrika* a má tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2),$$

kde t je *kozmickej čas*, $a = a(t)$ je *škálovací parameter*, χ je bezrozmerná radiálna súradnica (vzdialenosť od počiatku v jednotkách a), $\Sigma = (\sin \chi, \chi, \text{sh}\chi)$ pri $k = (1, 0, -1)$, $d\Omega^2 = d\theta^2 +$

$\sin^2 \theta d\phi^2$ a (θ, ϕ) sú sférické uhly. Metrický tenzor je

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (-c^2, a^2, a^2\Sigma^2, a^2\Sigma^2 \sin^2 \theta).$$

Škálovací parameter je veličina s rozmerom dĺžky, ktorej sú úmerné všetky vzdialenosti galaxií v danom okamihu. Pri $k = 1$ je to polomer S^3 , pri $k = -1$ „polomer“ (vzdialenosť od počiatku v 4-rozmernom *pseudoeuklidovskom* priestore) H^3 a pri $k = 0$ vzdialenosť medzi dvoma ľubovoľne zvolenými bodmi priestoru. Zdôvodnenie tvaru metriky: (1) $g_{00} = -c^2$ plynie z homogenity vnorenia 3-priestoru do priestoročasu, (2) $g_{0i} = 0$ plynie z izotropie vnorenia 3-priestoru do priestoročasu, (3) tvar g_{ij} plynie z homogenity a izotropie priestoru.

Látka zaplňajúca vesmír sa dá po celý čas od Veľkého tresku opísať ako *ideálna kvapalina*. Tenzor energie-hybnosti ideálnej kvapaliny je

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

kde ρ je hustota, p tlak a u^μ 4-rýchlosť. Aby bolo rozdelenie látky vo vesmíre s homogénnou a izotropnou metrikou tiež homogénne a izotropné, musí platiť, že (1) hustota ani tlak nezávisia od miesta, $\rho = \rho(t)$ a $p = p(t)$, (2) látka sa nepohybuje vzhľadom na stojacich pozorovateľov, $u^\mu = (c, \mathbf{0})$. Druhá podmienka znamená, že súradnice (χ, θ, ϕ) sú *comoving* („pohybujúce sa spolu s“). Ak do $T_{\mu\nu}$ dosadíme RW metriku a u^μ z bodu (2), dostaneme

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} (\rho c^2, a^2 p, a^2 \Sigma^2 p, a^2 \Sigma^2 \sin^2 \theta p).$$

R o z b i e h a n i e g a l a x i í

Majme pozorovateľa v počiatku súradníc a galaxiu v mieste s comoving súradnicou χ_G . Vzdialenosť galaxie od pozorovateľa je $r = a\chi_G$, pre rýchlosť galaxie teda máme

$$\dot{r} = Hr, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

To je Hubblov zákon s Hubblovou konštantou vyjadrenou cez škálovací parameter. Táto „konštanta“ závisí vo všeobecnosti od času – je to konštanta len v priestore. Rozbiehanie galaxií stotožňujeme s rozpínaním vesmíru, takže RÝCHLOSŤ ROZPÍNANIA VESMÍRU JE ÚMERNÁ VZDIALENOSTI. Rýchlosť vystupujúca v H. z. môže byť nadsvetelná, čo zdanlivo protirečí ŠTR. Interpretácia: nie je to rýchlosť rozpínania látky do prázdneho priestoru, ale RÝCHLOSŤ ROZPÍNANIA PRIESTORU, a pre tento druh rýchlosti žiadne obmedzenie neexistuje. V plochom a

otvorenom vesmíre je rýchlosť galaxií neobmedzená, v každom okamihu však vidíme iba konečnú časť vesmíru, preto je pozorovateľná rýchlosť obmedzená zhora. Napr. vo vesmíre s $k = \Lambda = 0$ majú pozorovateľné galaxie po celý čas maximálnu rýchlosť $2c$. (NIE $c!$).

S v e t l o v r o z p í n a j ú c o m s a v e s m í r e

Pre svetelný signál postupujúci od zdroja s comoving súradnicou χ_G k pozorovateľovi v pozícii súradníc platí $ds^2|_{\theta,\phi} = -c^2 dt^2 + a^2 d\chi^2 = 0$, takže $d\chi = -cdt/a$ a

$$\chi_G = \int_{t_1}^t \frac{cd\bar{t}}{\bar{a}},$$

kde t_1 je čas vyslania signálu a t čas jeho prijatia. Dráhy signálu r a r_1 namerané v čase prijatia signálu a v čase jeho vyslania dostaneme, keď túto veličinu vynásobíme hodnotami a v časoch t a t_1 ,

$$r = a \int_{t_1}^t \frac{cd\bar{t}}{\bar{a}}, \quad r_1 = a_1 \int_{t_1}^t \frac{cd\bar{t}}{\bar{a}}.$$

Horizont častíc je sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od Veľkého tresku po čas t , a *horizont udalostí* sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od času t po nekonečný čas. Polomery horizontov sú

$$r_h = a \int_0^t \frac{cd\bar{t}}{\bar{a}}, \quad r_H = a \int_t^\infty \frac{cd\bar{t}}{\bar{a}}.$$

Význam: prvý horizont je hranica pozorovateľnej časti vesmíru a druhý hranica, spoza ktorej žiaden signál, ani svetelný, neprenikne k pozorovateľovi. Ak je polomer druhého horizontu konečný (čo nastáva, ak a rastie dostatočne rýchlo s t), pozorovateľ sa nachádza „vnútri čiernej diery”.

Červený posun sa definuje ako

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_1} - 1,$$

kde λ je vlnová dĺžka v mieste pozorovania a λ_1 je vlnová dĺžka v mieste vyslania svetla, prípadne vlnová dĺžka toho istého svetla pripraveného v laboratóriu. Ak rovnicu pre χ_G odčítame od tej istej rovnice zapísanej pre svetelný signál posunutý o jednu periódu, dostaneme

$$1 + z = \frac{a}{a_1}.$$

Veličina $1 + z$ je podiel vlnových dĺžok nameraných comoving pozorovateľmi v rôznych okamihoch, takže VLNOVÁ DĹŽKA JE ÚMERNÁ ŠKÁLOVACIEMU PARAMETRU. Elementárne vysvetlenie: majme stojatú vlnu obopínajúcu uzavretý vesmír. Pri rozpínaní vesmíru nikde nemôže pribudnúť uzol ani kmitňa, preto musí platiť $\lambda_{stoj} \propto a$; lenže stojatá vlna sa skladá z dvoch postupných vln, preto musí platiť aj $\lambda_{postup} \propto a$.

3. Hubblov zákon

Zo súvisu medzi červeným posunom galaxií a ich žiarivou vzdialenosťou sa dajú určiť parametre, ktoré charakterizujú rozpínanie vesmíru – Hubblova konštanta a deceleračný parameter.

H u b b l o v a k o n š t a n t a

V predchádzajúcej prednáške sme odvodili pre homogénny a izotropný vesmír „teoretický“ Hubblov zákon $\dot{r} = Hr$. V „pozorovateľnom“ H. z. vystupuje namiesto rýchlosti červený posun a namiesto vzdialenosti *žiarivá vzdialenosť*. Ak je priestoročas plochý a zdroj svetla stojí vzhľadom na pozorovateľa, intenzita svetla je

$$I = \frac{\text{výkon}}{\text{plocha sféry}} = \frac{L}{4\pi r^2},$$

kde L je svietivosť (žiarivý výkon) zdroja a r je vzdialenosť zdroja od pozorovateľa. Žiarivá vzdialenosť, ktorú označíme r_L , sa definuje rovnakým vzťahom so zámennou $r \rightarrow r_L$,

$$I = \frac{L}{4\pi r_L^2}.$$

Pre blízke galaxie $z \doteq \dot{r}_0/c$, $r_L \doteq r_0$, takže

$$r_L \doteq \frac{c}{H_0}z.$$

(Tu aj v ďalšom index 0 pri symbole veličiny znamená, že veličina sa vzťahuje k súčasnému okamihu.) Nájdený vzťah je „pozorovateľný“ H. z. pri malých vzdialenostiach. Pri súčasnej presnosti pozorovaní platí po $z \sim 0,3$, pri väčších z žiarivá vzdialenosť rastie so z rýchlejšie než lineárne. V astronómii sa namiesto r_L zavádza *magnitúda* \mathcal{M} , ktorá je lineárna v $\log I$, $\mathcal{M} = -2,5 \log I + \text{konšt.}$ Krivka $\mathcal{M}(\log z)$ vyzerá kvalitatívne rovnako ako krivka $r_L(z)$.

H. z. objavil Hubble r. 1929 na 2,5 m ďalekohľade observatória Mount Wilson. Mimogalaktické vzdialenosti sa zisťujú z intenzity objektov so známou svietivosťou v galaxiách a kopách galaxií – *štandardných sviečok*. Hubble pozoroval v blízkej oblasti *cefeidy* (špeciálny druh premenných hviezd) a v ďalekej oblasti najjasnejšie bodové zdroje v galaxiách, ktorých svietivosť kalibroval v blízkej oblasti. Dostal takmer $10\times$ väčšiu hodnotu H_0 než je dnešná, lebo (1) považoval cefeidy v blízkyh galaxiách za iné, menej jasné cefeidy, ktoré sa vyskytujú v halo Galaxie a preto sa ľahšie kalibrujú, (2) považoval oblasti III, čiže skupiny mladých hviezd obklopené oblakmi ionizovaného vodíka, za hviezdy. Dnes sa Hubblova konštanta určuje jednak priamo pozorovaním vzdialených objektov vo vesmíre, jednak nepriamo z tvaru anizotropií reliktového žiarenia. Priame metódy

zahŕňajú pozorovanie cefeíd, pozorovanie premenných dvojných kvazarov (meria sa časový posun medzi signálmi, ktoré putujú po rôznych dráhach okolo gravitujúceho telesa medzi kvazarom a Zemou – jav *gravitačnej šošovky*) a pozorovanie rentgenovských halo ďalekých kôp galaxií (zisťuje sa deformácia spektra RŽ – *Zel'dovičov-Suňajevov jav*). Hubblova konštanta sa zapisuje ako

$$H_0 = h \, 100 \, \text{km s}^{-1} \, \text{Mpc}^{-1}.$$

V minulosti sa uvádzalo $h = 0,5 \div 1$, podľa dnešných meraní

$$h = 0,71 \pm 0,02.$$

H. z. n a v e Ľ k ý c h v z d i a l e n o s t i a c h

Svetlo, ktoré galaxia vyslala v čase t_1 , má v čase t_0 celkový výkon $L/(1+z)^2$ (jeden súčiniteľ $1/(1+z)$ pochádza zo zníženia energie fotónov na ceste od zdroja k pozorovateľovi a druhý zo zväčšenia časových intervalov medzi fotónmi), a prechádza cez sféru s polomerom $r_0 = a_0\chi_G$, ktorej plocha je $4\pi a_0^2 \Sigma^2(\chi_G)$. Intenzita svetla teda je

$$I = \frac{\text{výkon prenesený cez sféru s polomerom } r_0}{\text{plocha sféry s polomerom } r_0} = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 a_0^2 \Sigma^2(\chi_G)}$$

a žiarivá vzdialenosť galaxie je

$$r_L = (1+z)a_0\Sigma(\chi_G).$$

Ak do tohto vzorca dosadíme integrálne vyjadrenie χ_G a prejdeme od t_1 k z , dostaneme r_L ako funkciu z , teda „pozorovateľný“ H. z. Zavedme *deceleračný parameter*

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}.$$

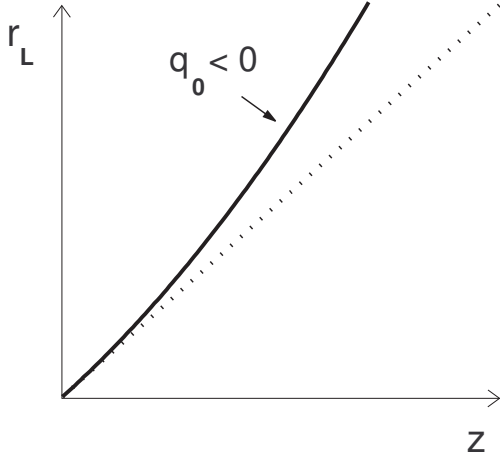
Funkcia $r_L(z)$ vo všeobecnosti závisí od tvaru funkcie $a(t)$ pri všetkých $t < t_0$ a od hodnoty k , ak sa však zaujímate iba o prvé 2 členy rozvoja v z , hodnotu k nepotrebujeme poznať vôbec a o funkcii $a(t)$ nám stačí vedieť, čomu sa rovná H_0 a q_0 . Približný tvar $r_L(z)$ nájdeme v dvoch krokoch. Krok 1: dosadíme do vzorca pre z vyjadrenie a_1 v tvare

$$a_1 = a_0 \left(1 - H_0 \Delta t - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \Delta t^2 \right)$$

a nájdeme $H_0 \Delta t$ ako funkciu z ; krok 2: rozvinieme $\Sigma(\chi_G) \doteq \chi_G$ do druhého rádu v $H_0 \Delta t$ a do získaného výrazu dosadíme $H_0 \Delta t$ z kroku 1. Výsledok je

$$r_L \doteq \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z \right).$$

D e c e l e r a č n ý p a r a m e t e r



Na kraji pozorovateľného vesmíru boli dlho štandardnými sviečkami galaxie ScI (špeciálny druh špirálnych galaxií). Údaje o tvare H. z. boli nepresné, namerané q_0 bolo z intervalu od 0 do 1. Uprostred 90-tych rokov sa začali využívať ako štandardné sviečky v tejto oblasti supernovy typu 1a (bieli trpaslíci v tesných 2-hviezdach, ktorí vybuchnú po tom, ako sa na nich nahromadí nadkritické množstvo látky z druhej hviezdy). Z tvaru H. z. zisteného pozorovaním supernov plynie $q_0 < 0$, takže VESMÍR SA ZRÝCHLUJE.

Presný tvar H. z. závisí od priebehu rozpínania od

Veľkého tresku podnes, a ten je daný súčasnou hustotou látky ρ_{t0} a kozmologickou konštantou Λ . Z pozorovaného tvaru H. z. plynie obmedzenie na tieto dve veličiny, z ktorého pri pozorovanej hodnote ρ_{t0} dostaneme $q_0 \simeq -0,6$.

4. Dynamika vesmíru

Pohybové rovnice vesmíru dostaneme, ak dosadíme Ansatz pre metriku a tenzor energie-hybnosti do Einsteinových rovníc. Dynamika, ktorá odtiaľ plynie, vedie k záveru o nenulovosti kozmologickej konštanty.

K o z m o l o g i c k é r o v n i c e

Budenie gravitačného poľa vo VTR opisujú Einsteinove rovnice

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa_E T_{\mu\nu},$$

kde $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor, R je skalárna krivosť a $\kappa_E = 8\pi\kappa/c^4$ je Einsteinova gravitačná konštantá. Ak sem dosadíme $g_{\mu\nu}$ a $T_{\mu\nu}$ z prednášky 2, dostaneme

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho a^2 - kc^2,$$

$$(\rho c^2 a^3) \cdot + p(a^3) \cdot = 0.$$

Interpretácia: vykrojme z vesmíru guľu s polomerom r (premenným) a hmotnosťou m (vo všeobecnosti tiež premennou), a zapíšme zákon zachovania energie pre časticu s hmotnosťou μ na

povrchu gule,

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{\kappa\mu m}{r} \propto \dot{r}^2 - \frac{8\pi\kappa}{3}\rho r^2 = \textit{konšt.}$$

Po dosadení $r \propto a$ dostaneme rovnicu 1 s neurčitou konštantou namiesto $-kc^2$. Ďalej, pre látku v guli zapíšme 1. vetu termodynamickú s $S = \textit{konšt}$ (predpoklad o adiabatickom vratnom deji). Keď prejdeme od r k a , dostaneme rovnicu 2. Rovnica 1 je teda ZÁKON ZACHOVANIA ENERGIE ČASTICE NA POVRCHU GULE VYKROJENEJ Z VESMÍRU a rovnica 2 ZÁKON ZACHOVANIA ENERGIE LÁTKY V GULI. Aby sa počet rovníc rovnal počtu neznámych, musíme pridať STAVOVÚ ROVNICU, čiže súvis medzi ρ a p . O vesmírnom prostredí môžeme takmer po celý čas predpokladať, že má len dve zložky, *nerelativistickú látku* a *kozmozologickú konštantu*. Výnimkou je krátke obdobie po Veľkom tresku, prípadne pred Veľkým drvením, keď dynamiku vesmíru určuje tretia zložka – *žiarenie*. Látka má $p \doteq 0$ (čím sa myslí $p \ll \rho c^2$), a keď túto stavovú rovnicu dosadíme do rovnice 2, dostaneme $\rho \propto a^{-3}$. Kozmozologická konštantka je súčiniteľ vo výraze $-\Lambda g_{\mu\nu}$, zvanom *kozmozologický člen*, ktorý sa pridáva na ľavú stranu Einsteinových rovníc pri zostrojovaní modelov vesmíru. (Pri menších objektoch než vesmír nehrá rolu.) Pridanie člena s Λ je ekvivalentné zavedeniu nového zdroja gravitačného poľa s tenzorom energie-hybnosti $T_{\Lambda,\mu\nu} = (\Lambda/\kappa_E)g_{\mu\nu}$. Príslušná energia sa nazýva *tmavá energia* a pripisuje *fyzikálnemu vákuu* – predpokladá sa, že pochádza z vákuových fluktuácií kvantových polí. Hustota a tlak príslúchajúce Λ sú $\rho_\Lambda = \Lambda/(\kappa_E c^2)$ $p_\Lambda = -\Lambda/\kappa_E$. Stavová rovnica je $p = -\rho c^2$, čo po dosadení do rovnice 2 dáva $\rho = \textit{konšt}$. Nech vesmír obsahuje látku aj kozmozologickú konštantu, $\rho = \rho_l + \rho_\Lambda$. Kozmozologická konštantka spĺňa *osobitne* rovnicu 2, preto ju spĺňa osobitne aj látka a môžeme písať $\rho_l \propto a^{-3}$ a $\rho_\Lambda = \textit{konšt}$ ako v jednozložkovom vesmíre.

Ak je vesmír zaplnený čistou látkou, pre guľu vykrojenú z vesmíru platí $m = \textit{konšt}$, takže úvaha o energii častice na povrchu gule obostojí. Pre všeobecné vesmírne prostredie je však hmotnosť m premenná, a tak vzniká otázka, ako sa môže energia častice na povrchu gule zachovávať. Derivujeme rovnicu 1 podľa t a do získanej rovnice dosadíme $\dot{\rho}$ z rovnice 2. Dostaneme

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi\kappa}{3}\rho_{ef}a, \quad \rho_{ef} = \rho + \frac{3p}{c^2}.$$

Odpoveď na pochybnosť ohľadne zachovania energie znie, že PLATÍ MODIFIKOVANÁ NEWTONOVA TEÓRIA GRAVITÁCIE, v ktorej je zdrojový člen v Poissonovej rovnici úmerný hustote ρ_{ef} . Gravitačná sila na povrchu rozpínajúcej sa gule je v modifikovanej teórii úmerná hmotnosti $m_{ef} = 4\pi\rho_{ef}r^3/3$, a z pohybovej rovnice, v ktorej vystupuje táto hmotnosť, obvyklým spôsobom dostaneme zákon zachovania energie, v ktorom vystupuje hmotnosť $m = 4\pi\rho r^3/3$. Newtonova

teória s jedinou malou modifikáciou sa dá použiť na opis vesmíru ako celku, lebo (1) rozpínanie vesmíru je zhodné s rozpínaním jeho ľubovoľnej časti, (2) na rozpínanie sféricky symetrickej časti vesmíru nemá vplyv látka mimo nej, a (3) ak je časť vesmíru dostatočne malá, gravitačné pole v nej je slabé. Pôvod modifikácie: Poissonova rovnica sa vo VTR odvodzuje z (00) zložky upravených Einsteinových rovníc, ktorá má na pravej strane výraz $T_{00} - g_{00}T/2$. Pri $p \ll \rho c^2$ (jeden z predpokladov newtonovskej limity) sa tento výraz redukuje na $\rho c^2/2$, ale vo všeobecnosti sa rovná $\rho_{ef}c^2/2$.

O b m e d z e n i a n a k a q₀ z d y n a m i k y

Ak v rovnici 1. rádu pre a prejdeme od \dot{a} k $H = \dot{a}/a$ a vydělíme obe strany H^2 , dostaneme

$$1 = \frac{\rho}{3H^2/8\pi\kappa} - k \times \text{kladné číslo.}$$

Zaveďme kritickú hustotu vzťahom

$$\rho_{krit} = \frac{3H^2}{8\pi\kappa}$$

a definujme parameter Ω ako pomer súčasnej hustoty k súčasnej kritickej hustote, $\Omega = \rho_0/\rho_{krit,0}$.

Potom platí

$$1 = \Omega - k \times \text{kladné číslo.}$$

Ako vidno, hodnota Ω súvisí s geometriou vesmíru: VESMÍR JE UZAVRETÝ, AK $\Omega > 1$, PLOCHÝ, AK $\Omega = 1$, A OTVORENÝ, AK $\Omega < 1$.

Efektívna hustota látky a Λ je ρ_l a $-2\rho_\Lambda$, takže rovnica 2. rádu pre a je

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi\kappa}{3}(\rho_l - 2\rho_\Lambda)a.$$

Ak výraz na pravej strane dosadíme do definície q , v ktorej prejdeme od \dot{a} k H , a získanú rovnicu vztiahneme k času t_0 , dostaneme

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_l - \Omega_\Lambda.$$

Ako vidno, pomer, v akom je Ω „namiešané“ z Ω_l a Ω_Λ , určuje charakter rozpínania vesmíru. Ak je Ω_Λ väčšie než $\Omega_l/2$, q_0 je záporné – pri dostatočne veľkom Λ SA VESMÍR ZRÝCHLUJE.

N e n u l o v o s ť Λ

Prvý relativistický model vesmíru zostrojil Einstein r. 1917. Bol to uzavretý statický model, ktorý Einstein získal tak, že do rovníc pridal „rukou“ člen úmerný Λ . Neskôr to vraj nazval „najväčšia chyba môjho života“. Modely rozpínajúceho sa vesmíru s $\Lambda = 0$ zostrojil Friedmann r. 1923

(6 rokov pred Hubbloom!). Po objave rozbiehania galaxií sa konštanta Λ stala nepotrebnou, preto sa všeobecne prijalo, že $\Lambda = 0$. S upresňovaním kozmologických parametrov sa začali hromadiť problémy: (1) pozorovaná krivosť vesmíru je blízka k nule, teda Ω by malo byť blízke k 1, ale Ω_l je len asi 0,3, (2) tvar H. z. pri veľkých vzdialenostiach vedie k $q_0 < 0$, ale teória s $\Lambda = 0$ dáva $q_0 > 0$, (3) pri najpravdepodobnejších hodnotách h a Ω_l je vek vesmíru, ktorý dostaneme z teórie, menší než vek guľových hviezdokop. Všetky problémy sa vyriešia, ak Λ do teórie vrátíme.

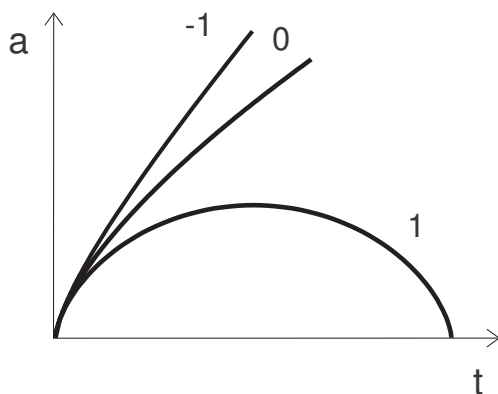
Pri hodnote Ω_Λ porovnateľnej s 1, ktorá plynie z pozorovaní, je kozmologická konštanta porovnateľná s $r_{p.v.}^{-2}$, kde $r_{p.v.} \sim 3 \text{ Gpc} \doteq 10^{26} \text{ m}$ je polomer pozorovateľného vesmíru. Na druhej strane, ak kozmologická konštanta pochádza z energie vákua, jej „prirodzená“ veľkosť je rádovo l_{Pl}^{-2} , kde $l_{Pl} \sim 10^{-35} \text{ m}$ je Planckova dĺžka. (Zavádza sa v prednáške 7.) Hodnota kozmologickej konštanty sa teda líši od „prirodzenej“ hodnoty zhruba o 120 rádov (!).

5. Modely vesmíru

Budúcnosť vesmíru je pri $\Lambda = 0$ jednoznačne daná geometriou, zatiaľ čo pri $\Lambda \neq 0$ závisí aj od hodnoty Λ . Pozorovania uprednostňujú plochý vesmír s $\Lambda > 0$, ktorého rozpínanie bude pokračovať donekonečna s exponenciálne rastúcou rýchlosťou.

R o z p í n a n i e s $\Lambda = 0$

Majme vesmír s $\Lambda = 0$ zaplnený ideálnou kvapalinou s $p = 0$. Takú kvapalinu si môžeme predstaviť zloženú zo zrníek prachu, ktoré pri zrážkach prechádzajú cez seba, preto sa nazýva *nekoherentný prach*. Je dobrým priblížením k nerelativistickej látke. Dynamika prachového vesmíru s



$\Lambda = 0$ je rovnaká ako v známej úlohe „zvislý vrh do veľkej výšky“, preto je priebeh rozpínania rovnaký ako pohyb kameňa v tejto úlohe. Ak $k = 1$, $a(t)$ je cykloida, ak $k = 0$, $a \propto t^{2/3}$, a ak $k = -1$, $a(t)$ je „hyperbolická cykloida“ (cykloida, ktorá má v definícii goniometrické funkcie nahradené hyperbolickými). Tieto riešenia sa nazývajú *Friedmannove modely vesmíru* a riešenie s $k = 0$ sa nazýva aj *Einsteinov-de Sitterov model*. Riešenie s $k = 1$ najprv rastie z 0 do

a_{max} a potom klesá naspäť do 0, zatiaľ čo riešenia s $k = 0$ a -1 rastú z 0 do ∞ , prvé s klesajúcou

rýchlosťou a druhé s rýchlosťou blížiacou sa k c (asymptotika $a(t)$ je $a = ct$). To znamená, že (1) ak je vesmír uzavretý, po čase sa zastaví a začne sa stláčať, zatiaľ čo ak je otvorený alebo plochý, bude sa rozpínať do ∞ , (2) v oboch prípadoch mal singularitu (bol stlačený do bodu) v čase 0, (3) v prvom prípade bude mať navyše singularitu v istom čase t_{max} . Začiatočná singularita sa nazýva *Veľký tresk* (Big Bang) a konečná singularita *Veľké drvenie* (Big Crunch). Obe ostanú v riešení aj v prípade, ak v silne stlačenej vesmíre nahradíme nekoherentný prach žiarením.

R o z p í n a n i e s $\Lambda > 0$

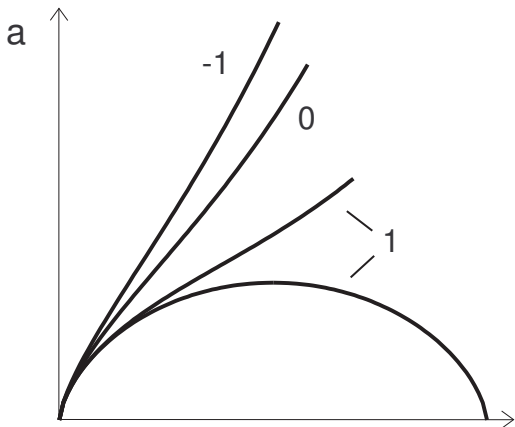
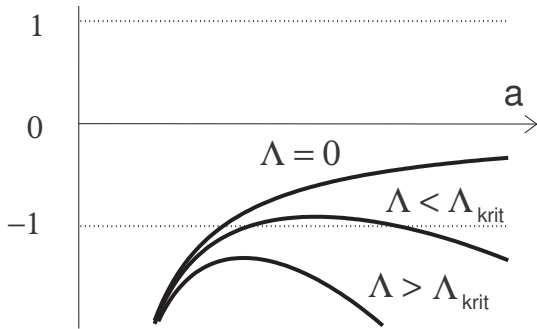
Rozpínanie prachového vesmíru s $\Lambda \neq 0$ opisujú rovnice

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho_l a^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a^2 - kc^2, \quad \rho_l \propto a^{-3}.$$

To sa dá chápať ako pohyb častice s energiou $-k$ v potenciáli

$$\mathcal{V} = -\frac{C}{a} - \frac{1}{3}\Lambda a^2, \quad C = \frac{8\pi\kappa}{3c^2}\rho_{l0}a_0^3.$$

Pozrime sa bližšie na modely s $\Lambda > 0$. Otvorený a plochý vesmír sa takisto ako predtým rozvíjajú z 0 do ∞ , ale teraz bude to isté platiť aj o uzavretom vesmíre, ak $\Lambda > \Lambda_{krit}$ = hodnota Λ , pri ktorej sa $|\mathcal{V}_{max}|$ rovná $1 = (3C/2)^{-2}$. (Ak $0 < \Lambda < \Lambda_{krit}$, uzavretý vesmír sa môže tiež rozvíjať do ∞ , lenže nie z 0 ale z istej hodnoty a_{min} , na ktorú sa predtým stlačil. Tento prípad v skutočnom vesmíre nemôže nastať kvôli veľkej hodnote a_{min} .) Pri dostatočne veľkých t je rozpínanie nezávislé od geometrie vesmíru exponenciálne. Prebieha podľa zákona $a \propto e^{Ht}$, kde $H = c(\Lambda/3)^{1/2}$. Ak $k = 1$ a $\Lambda = \Lambda_{krit}$, existuje statické riešenie s a_{stat} = hodnota a , pri ktorej má \mathcal{V} maximum = $\Lambda^{-1/2}$. To je *Einsteinov model vesmíru*. Keďže toto



riešenie zodpovedá častici umiestnenej na vrchole potenciálovej bariéry, je nestabilné. Ak $k = 1$ a Λ má hodnotu tesne nad Λ_{krit} , riešenie sa rozvíja z 0 do $a \simeq a_{stat}$, dlho „váha“ a potom sa rozvíja ďalej do ∞ (*Lemaitrov model vesmíru*). Existujú aj riešenia s $C = 0$ (*de Sitterove modely vesmíru*). Sú zaujímavé tým, že majú rovnako veľkú grupu symetrií ako plochý priestor.

P a r a m e t r e Ω , Ω_l a Ω_Λ

Hodnota Ω sa najľahšie zistí meraním krivosti vesmíru s využitím anizotropií RŽ. Postupuje sa tak, že sa zmeria, na akej uhlovej škále je hlavné maximum anizotropií, a získaná hodnota sa porovná s predpoveďou teórie. Posunutie smerom k väčším uhlom znamená kladnú krivosť a posunutie smerom k menším uhlom zápornú. (V prvom prípade sú lúče prichádzajúce z miestnych zhustení a zriedení látky zahnuté smerom von z pozorovaného priestorového uhla a v druhom prípade smerom dnu.) Ukazuje sa, že KRIVOSŤ VESMÍRU JE BLÍZKA K NULE, takže Ω je blízke k 1,

$$\Omega = 1,02 \pm 0,02.$$

Pri $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ máme $\rho_{krit,0} = 5,6$ atómov H v kocke s hranou 1 m, a z nameranej hodnoty Ω plynie, že približne rovnako veľké je aj ρ_0 .

Hodnoty Ω_l a Ω_Λ sa dajú zistiť, podobne ako hodnota h , buď pozorovaním vzdialených objektov alebo rozborom anizotropií RŽ. Pozrime sa bližšie, ako sa to robí prvým, „klasickým“ spôsobom. Veličina Ω_l sa rovná súčtu príspevkov svietiacej látky $\Omega_{sv.l.}$ a tmavej látky $\Omega_{tm.l.}$. Tmavá látka v galaxiách je sústredená v halo okolo viditeľnej časti galaxií, zatiaľ čo tmavá látka mimo galaxií je z veľkej časti rozptýlená medzi kopami galaxií a ovplyvňuje veľkoškálovú dynamiku. Príslušné Ω označíme Ω_{halo} a Ω_{dyn} . Hustota hmotnosti svietiacej látky aj látky v halo galaxií sa počíta ako súčin hustoty svietivosti a pomeru m/L , kde m je hmotnosť danej zložky galaxie a L je svietivosť galaxie. Hmotnosť špirálnych galaxií sa určuje z *rotačnej krivky*, teda zo závislosti rýchlosti hviezd od polomeru. Pozorované krivky sú ploché až po okraj disku, z čoho plynie, že na halo pripadá zhruba o rád vyššia hmotnosť než na svietiacu látku. (Svietiaca látka je sústredená v jadre galaxie, preto keby existovala iba ona, rýchlosť by klesala ako $(\text{polomer})^{-1/2}$.) Hmotnosť eliptických galaxií vrátane halo sa dá odhadnúť z rýchlosti obiehanie dvojných galaxií okolo spoločného hmotného stredu a pomer m/L vychádza zhruba rovnaký ako m_{halo}/L špirálnych galaxií. Hodnoty získané týmto spôsobom sú

$$\Omega_{sv.l.} = (0,002 \div 0,006) h^{-1}, \quad \Omega_{halo} = 0,03 \div 0,05.$$

(V druhom vzťahu nevystupuje h , lebo hustota určená z pomeru m/L je úmerná h^2 rovnako ako kritická hustota.) Tmavú látku v galaktických halo by mohli tvoriť tmavé alebo slabo svietiace kompaktné objekty, tzv. MACHOvia (massive compact halo objects). Vhodnými kandidátmi sú trpasličie hviezdy, vnútri ktorých je príliš nízka hustota a teplota na to, aby sa zapálili termojadrové reakcie. MACHOvia v našej Galaxii sa dajú pozorovať vďaka ich účinku na svetlo z blízkych

galaxií (meria sa krátkodobé zvýšenie intenzity svetla vyvolané gravitačným pôsobením MACHOV – jav *mikrošošovky*). Ukazuje sa, že nejakí v halo sú, ale je ich príliš málo na to, aby sa galaktická tmavá látka skladala len z nich. Podobne ako sa zisťuje hmotnosť galaxií z pohybu hviezd, dá sa zistiť hmotnosť kóp galaxií z pohybu galaxií. Príslušné Ω je asi 0,25, čiže takmer o rád vyššie než Ω_{halo} . Rádovo rovnaká hodnota Ω vychádza pre *všetku* dynamickú látku, vrátane tej medzi kopami. Najlepší odhad, založený na pozorovaní rentgenového žiarenia kóp galaxií, je

$$\Omega_{dyn} \text{ aj } \Omega_l = 0,2 \div 0,4.$$

Ak poznáme Ω_l , hodnotu Ω_Λ zistíme buď z H. z. na veľkých vzdialenostiach alebo z veku guľových hviezdokop. Z H. z. máme

$$\frac{4}{3}\Omega_l - \Omega_\Lambda \simeq -\frac{1}{3}.$$

Všimnime si, že v tejto podmienke nevystupuje q_0 , ale iná lineárna kombinácia Ω_l a Ω_Λ . To znamená, že údaje pozorovania sa neporovnávajú s približným vzorcom pre $r_L(z)$, platným do rádu z^2 , ale s presným vzorcom. (Pozorovania sa robia v natoľko ďalekej oblasti, že sa približný vzorec nedá použiť.) Pridanie kladnej konštanty Λ do teórie znamená prechod k modelom vesmíru, v ktorých sa rozpínanie spomaľuje menej, alebo sa dokonca zrýchľuje, takže vek vesmíru pri daných hodnotách H_0 a Ω_l je vyšší. Najstaršie známe objekty vo vesmíre, guľové hviezdokopy, majú podľa súčasných odhadov asi 13 mld. rokov. Keby bol vesmír rovnako starý, pre Ω_l a Ω_Λ by platila zhruba tá istá podmienka, aká plynie z H. z.; a keby bol starší, Ω_Λ pri danom Ω_l by muselo byť väčšie. Máme teda dve podmienky pre dva parametre Ω_l a Ω_Λ , a z oboch pri $\Omega_l \sim 0,3$ dostaneme $\Omega_\Lambda \sim 0,7$. Kombináciou „klasických“ metód s rozborom anizotropií RŽ dostaneme

$$\Omega_l = 0,26 \pm 0,02, \quad \Omega_\Lambda = 0,74 \pm 0,02.$$

6. Rozpínanie horúceho vesmíru

Minulosť vesmíru je zaujímavejšia než budúcnosť, pretože má dôsledky, ktoré môžeme porovnávať s pozorovaniami a overovať si správnosť našich predstáv o vesmíre aj mikroskopickej fyzike. Platí to predovšetkým o horúcom vesmíre prvom období po Veľkom tresku. Energie častíc boli vtedy porovnateľné s energiami dosahovanými na urýchľovačoch alebo vyššie, preto sa vesmír v tomto období nazýva aj „horúce laboratórium fyziky vysokých energií“. Ak chceme opísať fyzikálne deje, ktoré vtedy prebiehali, musíme najprv zistiť, ako sa vesmír rozpínal.

Látka zaplňajúca vesmír má dve zložky: látku v užšom zmysle a žiarenie. Prvú zložku tvoria nerelativistické častice a druhú častice s rýchlosťou c (fotóny) alebo s rýchlosťami blízkymi k c (ultrarelativistické časticovo-antičasticové páry a po väčšinu vývoja vesmíru aj neutrína). V súčasnosti látka = galaxie + tmavá látka vrátane neutrín a žiarenie = reliktové fotóny. Závislosť hustoty látky aj žiarenia od škálovacieho parametra sa dá zistiť z lokálneho zákona zachovania energie. Pre látku máme $p = 2u_k/3$, kde u_k je hustota kinetickej energie častíc, a keďže častice sú nerelativistické, u_k aj $p \ll \rho c^2$ a pre naše účely môžeme položiť $p = 0$. (Látka sa správa ako nekoherentný prach.) V tomto prípade, ako už vieme, $\rho \propto a^{-3}$. Pre žiarenie máme $p = u/3$, kde u je hustota energie žiarenia, a keďže $u = \rho c^2$, platí $p = \rho c^2/3$. Keď to dosadíme do lokálneho zákona zachovania energie, dostaneme $\rho \propto a^{-4}$. Elementárne objasnenie: majme guľu vykrojenú z vesmíru. Počet častíc žiarenia (fotónov, neutrín, párov) nachádzajúcich sa vnútri gule bol po celý čas konštantný. Koľko častíc vniklo do gule, toľko z nej uniklo, a koľko sa pohltilo, toľko sa vyžiarilo. Po oddelení žiarenia od látky sa častice šírili voľne, takže ich vlnová dĺžka rástla ako a . Pred oddelením na každú pohltenu časticu pripadala vyžiarená častica s rovnakou vlnovou dĺžkou a na každú rozptýlenú časticu s vlnovou dĺžkou zmenenou o $\Delta\lambda$ pripadala rozptýlená častica s vlnovou dĺžkou zmenenou o $-\Delta\lambda$, takže stredná vlnová dĺžka častíc tiež rástla ako a . Energia častice je úmerná λ^{-1} a hmotnosť častice je energia/ c^2 , preto energia aj hmotnosť častíc v guli po celý čas klesala ako a^{-1} a hustota hmotnosti klesala ako a^{-4} . (Vlnová dĺžka sa menila rovnako ako v nádobe s piestom, ale MIKROSKOPICKÝ MECHANIZMUS BOL INÝ. V nádobe s piestom vlnová dĺžka žiarenia rastie kvôli tomu, že častice pri posúvaní piesta konajú prácu, zatiaľ čo v rozpínajúcom sa vesmíre žiarenie „unášal priestor“ a jeho vlnová dĺžka rástla kvôli kozmologickému červenému posunu.)

V y r o v n a n i e h u s t ô t

Hustota vesmírneho prostredia sa rovná súčtu príspevkov látky, žiarenia a Λ , $\rho = \rho_l + \rho_z + \rho_\Lambda$, s $\rho_l \propto a^{-3}$, $\rho_z \propto a^{-4}$ a $\rho_\Lambda = \text{konšt.}$ Súčasný príspevok žiarenia je zanedbateľný, zatiaľ čo príspevky látky a Λ sú rádovo rovnaké. Preto V PRVOM OBDOBÍ URČOVALO DYNAMIKU VESMÍRU ŽIARENIE, V DRUHOM OBDOBÍ LÁTKA A DNES SA O TO DELÍ LÁTKA A Λ . Prvé obdobie sa nazýva *éra žiarenia* a druhé *éra látky*. Za hranicu medzi érami môžeme vziať čas $t_{rovň}$, keď sa ρ_z rovnalo ρ_l . Potom pomer ρ_z/ρ_l klesal ako a^{-1} , takže

$$\frac{a_0}{a_{rovň}} = \frac{\rho_{l0}}{\rho_{z0}}.$$

Súčasná hustota látky pri $h = 0,71$ a $\Omega_l = 0,26$ je 1,5 atóma H, alebo niečo vyše 1 GeV c^{-2} , na

1 m^{-3} . Tepelné žiarenie obsahuje zhruba jeden fotón s energiou $k_B T$ v kocke s hranou λ , preto v reliktovej žiareni pripadá energia 10^{-4} eV na 1 mm^3 , alebo 10^{-4} GeV na 1 m^3 . Odtiaľ dostaneme, že súčasný pomer hustôt žiarenia a látky je rádovo $1 : 10^4$ a v čase vyrovnania hustôt bol vesmír rádovo $10^4 \times$ menší než dnes. Presný výpočet, do ktorého sú zahrnuté aj neutrína, dáva

$$\frac{a_0}{a_{rovn}} = 24800 \Omega_l h^2,$$

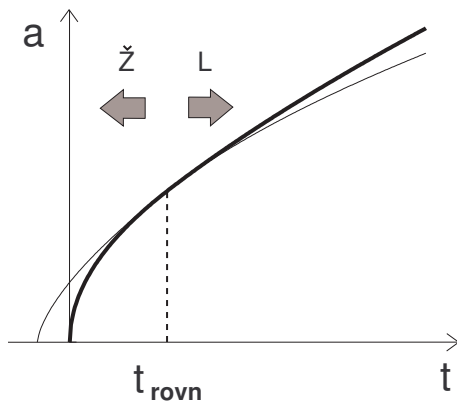
alebo, ak vezmeme $h = 0,71$ a $\Omega_l = 0,26$, $a_0/a_{rovn} = 3250$. V kozmológii sa okamihy v minulosti často charakterizujú červeným posunom svetla, ktoré vtedy vzniklo. Z definície kozmologického červeného posunu plynie $1 + z_{rovn} = a_0/a_{rovn}$, takže vo vesmíre s pozorovanými hodnotami h a Ω_l vyrovnanie hustôt nastalo pri $1 + z_{rovn} = 3250$.

R o z p í n a n i e v é r e ž i a r e n i a

Závislosť a od t je daná rovnicou pre a , kde na pravej strane vystupujú dva členy, člen úmerný ρ a člen $-kc^2$. Druhý člen pochádza z krivosti vesmíru a ak je nenulový, jeho relatívna veľkosť pri cúvaní v čase klesá. Aby sme zistili, či krivosť vesmíru môže mať vplyv na rozpínanie v ére žiarenia, z ρ vyčleníme ρ_Λ a budeme sa zaujímať o pomer druhého člena k členu úmernému $\rho_l + \rho_z$. Ten je v súčasnosti menší než zhruba 0,1. (Rovná sa $|1 - \Omega|/\Omega_l$, a pre výrazy v čitateli a menovateli máme $|1 - \Omega| \lesssim 0,04$ a $\Omega_l \sim 0,3$.) Keď cúvame v čase, pomer klesá ako a , takže v čase vyrovnania hustôt bol menší než 10^{-4} . Keď pokračujeme v cúvaní, klesá ešte rýchlejšie, ako a^2 . To znamená, že KRIVOSŤ VESMÍRU BOLA PO CELÚ ÉRU ŽIARENIA ZANEDBATEĽNÁ. Ako sme si už povedali, zanedbateľná bola aj kozmologická konštanta. Podľa inflačného scenára člen typu kozmologického určoval dynamiku vesmíru isté krátke obdobie tesne po Veľkom tresku. To nie je v spore s predchádzajúcim tvrdením, pretože vtedajšia hodnota Λ bola o mnoho rádov vyššia než dnešná.

Éra žiarenia nastala v prvom období po Veľkom tresku a môže nastať aj v poslednom období pred Veľkým drvením. Obmedzíme sa na prvú éru, pretože druhá prebehne rovnako, len s obráteným smerom plynutia času. Pri približnom riešení rovnice pre škálovací parameter môžeme vziať $\rho = \rho_z$ v ére žiarenia a $\rho = \rho_l$ v ére látky, a v oboch érach položiť $k = \Lambda = 0$. Riešenie v ére žiarenia je

$$a \propto t^{1/2}.$$



Na začiatku éry látky platilo $a \propto (t + t_*)^{2/3}$, a keďže exponenta v tomto výraze je väčšia než v tom, ktorý sme získali pre éru žiarenia, PRÍTOMNOSŤ ŽIARENIA V ČASE, KEĎ DÁVALO HLAVNÝ PRÍSPEVOK K HUSTOTE, URÝCHLILA ROZPÍNANIE VESMÍRU. Zošitím oboch riešení v čase t_{rovn} dostaneme, že čas, o ktorý sa skrátí vek vesmíru v dôsledku gravitačného pôsobenia žiarenia, je $t_* = t_{rovn}/3$. Po uplynutí niekoľkonásobku času t_{rovn} môžeme približne písať $a \propto t^{2/3}$, t. j. škálovací parameter bude rásť ako v plochom prachovom vesmíre. Neskôr začne na priebeh rozpínania vplývať aj Λ , a vesmír, ktorý sa dovtedy spomaľoval, sa začne zrýchľovať.

Každému dej v horúcom vesmíre prislúcha „jeho“ teplota daná typickou vymenenou energiou pri elementárnych procesoch. Preto ak zistíme závislosť teploty vesmírneho prostredia od času, môžeme nájsť pre ľubovoľný dej časovú škálu, na ktorej prebehol.

7. Časové škály

Každému dej v horúcom vesmíre prislúcha „jeho“ teplota daná typickou vymenenou energiou pri elementárnych procesoch. Preto ak zistíme závislosť teploty vesmírneho prostredia od času, môžeme nájsť pre ľubovoľný dej časovú škálu, na ktorej prebehol.

Teplota vesmírneho prostredia

Horúci vesmír charakterizuje okrem hustoty ρ a tlaku p aj teplota T . Typická energia častíc je $k_B T$, preto hodnota T určuje, aké deje prebiehali vo vesmíre v danom okamihu: pri $T \sim 10^4$ K, keď $k_B T \sim 1$ eV, to boli procesy na atómovej škále, pri $T \sim 10^9$ K, keď $k_B T \sim 0,1$ MeV, jadrové reakcie, atď.

Pridanie teploty k charakteristikám vesmíru znamená, že o vesmírnom prostredí predpokladáme, že bolo v prvom období po Veľkom tresku V TEPELNEJ ROVNOVÁHE. Treba rozlišovať dva druhy rovnováhy: globálnu „rovnováhu“ spočívajúcu v tom, že hustota aj teplota boli všade približne rovnaké (úvodzovky preto, že nejde o skutočnú rovnováhu – prostredie sa nehomogenizovalo vďaka mikroskopickým interakciám), a lokálnu rovnováhu spočívajúcu v tom, že všetky zložky prostredia v ľubovoľnom objemovom elemente mali rovnakú teplotu závisiacu iba od celkovej energie, prípadne entropie, v danom elemente. Prvý druh rovnováhy vysvetľuje inflácia a druhý plynie z krátkosti relaxačných časov v horúcom vesmíre v porovnaní s charakteristickým časom rozpínania vesmíru (čo je to isté ako čas, ktorý uplynul od Veľkého tresku). Lokálna rovnováha nebola úplná, lebo neutrína sa postupne oddeľovali od zvyšku prostredia a nezohrievali

sa pri nasledujúcich anihiláciach.

Nájdeme závislosť T od a za predpokladu, že jediným druhom žiarenia vo vesmíre boli fotóny. (Výsledky, ktoré takto získame, sa nebudú príliš líšiť od výsledkov úplnej teórie, ktorá zahŕňa aj neutrína a páry.) Pred oddelením od látky malo žiarenie po celý čas charakter *žiarenia čierneho telesa*, s hustotou energie $u \propto T^4$ (*Stefanov-Boltzmannov zákon*), a keďže táto hustota bola, rovnako ako hustota hmotnosti, úmerná a^{-4} , platilo

$$T \propto a^{-1}.$$

Po oddelení od látky sa žiarenie šírilo v priestore voľne a menila sa iba jeho vlnová dĺžka. Keď sa škálovací parameter zväčšil $n\times$, vlnová dĺžka každého fotónu sa zväčšila $n\times$ a energia každého fotónu sa zmenšila $n\times$, a keďže pôvodná rozdeľovacia funkcia závisela iba od pomeru energia/teplota, nová rozdeľovacia funkcia mala rovnaký tvar, ale s $n\times$ nižšou teplotou. V predchádzajúcej prednáške sme videli, že hustota hmotnosti žiarenia sa menila po oddelení od látky rovnako ako pred ním; teraz vidíme, že to isté platí o teplote. Žiarenie si ponechalo charakter žiarenia čierneho telesa a TEPLOTA ĎALEJ KLESALA AKO a^{-1} . Žiarenie pochádzajúce z horúceho vesmíru dnes pozorujeme ako mikrovlnné žiarenie s teplotou $T_0 = 2,73$ K.

R e k o m b i n á c i a

Fotóny intenzívne interagovali s ultrarelativistickými pármami a menej, ale stále dosť intenzívne s elektrónmi, ktoré ostali v prostredí po anihilácii párov. Keď sa látka ochladila natoľko, že prebehla *rekombinácia*, teda elektróny sa spojili s jadrami, interakcia prakticky prestala. Označme príslušný čas t_{re} . V skutočnosti šlo o časový *interval*, počas ktorého teplota klesla cca na $2/3$ pôvodnej hodnoty. Ako reprezentatívnu môžeme vziať teplotu $T_{re} = 3000$ K. (Tomu zodpovedá energia častíc približne 0,4 eV, čo je podstatne menej než ionizačná práca atómov H tvoriacich väčšinu látky, ktorá je 13,6 eV. Teplota bola nízka kvôli veľkému počtu fotónov pripadajúcich na jeden elektrón.) Keďže $T \propto a^{-1}$, platí

$$\frac{a_0}{a_{re}} = \frac{T_{re}}{T_0} = 1100$$

a príslušný červený posun je $1 + z_{re} = 1100$. Pomer a_0/a_{re} pri $h = 0,71$ a $\Omega_l = 0,26$ vychádza zhruba $3\times$ menší než pomer a_0/a_{rovn} , čo znamená, že rekombinácia nastala zhruba $5\times$ neskôr než vyrovnanie hustôt. Blízkosť oboch časových škál je pozoruhodná črta vesmíru, ktorá hrala dôležitú úlohu pri vzniku galaxií.

S ú v i s m e d z i t e p l o t o u a č a s o m

Keďže v ére žiarenia $a \propto t^{1/2}$ a $T \propto a^{-1}$, platí

$$T \propto t^{-1/2}.$$

FYZIKÁLNE DEJE V RANOM VESMÍRE

škála	dej	$k_B T$	t
Planckova	QTG \rightarrow VTR	10^{19} GeV	10^{-43} s
Veľkého zjednotenia	{ baryogenéza inflácia	10^{15} GeV	10^{-35} s
Salamova– Weinbergova	generácia m_W, m_Z	100 GeV	10^{-9} s
uväznenia	q \rightarrow h	100 MeV	10^{-3} s
poslednej anihilácie	anihilácia e^+e^-	1 MeV	10 s
nukleosyntézy	p, n \rightarrow jadrá	0,1 MeV	10^3 s
rekombinácie	jadrá, e \rightarrow atómy	1 eV	10^5 r.

Tým sú dané relatívne časové škály. Ak chceme poznať aj absolútne, musíme sa vrátiť k rovnici pre škálovací parameter a prepísať ju na rovnicu pre teplotu. Predpokladajme opäť, že jediným druhom žiarenia vo vesmíre boli fotóny. Hustota energie žiarenia čierneho telesa je

$$u = a_{SB} T^4,$$

kde a_{SB} je *Stefanova-Boltzmannova konštanta*,

$$a_{SB} = \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^3}.$$

Ak do rovnice pre škálovací parameter s $k = \Lambda = 0$ dosadíme toto u deleno c^2 a využijeme $\dot{T}/T = -\dot{a}/a$, dostaneme

$$\frac{\dot{T}}{T^3} = - \left(\frac{8\pi\kappa a_{SB}}{3c^2} \right)^{1/2}.$$

Riešenie je $T = (2Ct)^{-1/2}$, kde C je konštanta na pravej strane rovnice so znamienkom plus. Aby sme získali časové škály, stačí zistiť hodnotu T pri jednej hodnote t . Zaveďme *Planckove veličiny* ako veličiny s rozmerom dĺžky, času atď. zostavené z *fundamentálnych konštánt* c , \hbar a κ ; napr. $l_{Pl} \doteq 2 \cdot 10^{-35}$ m, $t_{Pl} \doteq 5 \cdot 10^{-44}$ s a $E_{Pl} \doteq 10^{19}$ GeV. V rovnici pre $k_B T$ vystupuje konštanta $C' = C/k_B^2$, ktorá je kombináciou fundamentálnych konštánt s bezrozmerným súčiniteľom rádu 1, a keďže riešenie tejto rovnice je $k_B T = (2C't)^{-1/2}$, ENERGIJA V ČASE t_{Pl} BOLA RÁDOVO E_{Pl} . Časovú škálu prislúchajúcu ľubovoľnej inej energii nájdeme podľa pravidla, že ak energia klesne o 1 rád, časová škála narastie o 2 rády.

8. Neutrína a páry

Pri odhade časových škál sme predpokladali, že horúci vesmír bol zaplnený čistým elektromagnetickým žiarením. Pri podrobnejšom opise rozpínania vesmíru musíme vziať do úvahy aj ďalšie zložky vesmírneho prostredia – neutrína a (vo veľmi ranom vesmíre) ultrarelativistické časticovo-antičasticové páry.

E n e r g i a p l y n u f o t ó n o v

Skôr ako pristúpime k opisu neutrín a párov, pripomeňme si, ako sa odvodzuje vzorec pre energiu žiarenia čierneho telesa. Žiarenie ČT je plyn fotónov – neutrálnych bozónov s pokojovou hmotnosťou $m_0 = 0$ a spinom $s = 1$. Počet fotónov je premenný, teda žiarenie má nulový chemický potenciál. (Chemický potenciál je lagranžovský multiplikátor pri celkovom počte častíc vo variačnom princípe pre entropiu, preto ak počet častíc nemá vopred zadanú hodnotu, chemický potenciál musí byť 0.) Rozdeľovacia funkcia v ideálnom plyne s teplotou T a chemickým potenciálom μ je

$$n_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} \pm 1},$$

kde ϵ_i je energia v i -tom stave, znamienko $+$ platí pre fermióny a znamienko $-$ pre bozóny. Energia plynu s rozdeľovacou funkciou n_i je

$$E = \sum n_i \epsilon_i$$

a počíta sa tak, že položíme $\epsilon = (\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2}$, kde \mathbf{p} je hybnosť častice, a urobíme zámenu

$$\sum \rightarrow \int g \frac{V d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

kde g je počet polarizácií častice a V je objem plynu. Častice s $m_0 = 0$ a $s > 0$ majú dve polarizácie, pravotočivú a ľavotočivú; prvej zodpovedá *helicita* (priemet spinu do smeru pohybu) $+s$ a druhej $-s$. Pre bozóny s $m_0 = 0$, $g = 2$ a $\mu = 0$ dostaneme

$$E = a_{SB}VT^4,$$

kde a_{SB} sa vyjadruje cez \hbar , c a k_B podľa vzorca z predchádzajúcej prednášky.

E n e r g i a p l y n u n e u t r á l n y c h f e r m i ó n o v

Majme plyn úplne neutrálnych fermiónov (takých, ktoré sú identické so svojimi antičasticami) s $m_0 = 0$ a $s = 1/2$, a predpokladajme, že počet častíc v plyne je premenný, takže plyn má $\mu = 0$. Energia plynu sa líši od energie žiarenia ČT iba v tom, že v nej vystupuje integrál

$$I_+ = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1}$$

namiesto integrálu

$$I_- = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Platí

$$I_\pm = \int_0^\infty x^3 (e^{-x} \mp e^{-2x} + e^{-3x} \mp \dots) dx = 3! \left(1 \mp \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} \mp \dots \right),$$

takže

$$I_+ = I_- - \frac{2}{2^4}I_- = \frac{7}{8}I_-,$$

a energia plynu neutrálnych fermiónov je

$$E_{neutr.f.} = \frac{7}{8}E_{EM},$$

kde E_{EM} je energia žiarenia ČT, ktoré má tú istú teplotu a zaberá ten istý objem ako plyn fermiónov. Predpokladajme teraz, že fermióny nie sú úplne neutrálne, a označme veličiny vzťahujúce sa k časticiam indexom $+$ a veličiny vzťahujúce sa k antičasticiam indexom $-$. V plyne, v ktorom sa môžu vznikať časticovo-antičasticové páry, je prebytok častíc nad antičasticami ΔN daný, ale počet párov $N_{pár}$ premenný. Pre chemické potenciály odtiaľ dostaneme

$$\mu_- = -\mu_+.$$

(Vo variačnom princípe vystupuje iba lagranžovský multiplikátor pri $\Delta N = N_+ - N_-$.) Veľkosť μ_\pm nájdeme zo vzťahu

$$\Delta N = \sum \left[\frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu_+)/k_B T} + 1} - \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu_-)/k_B T} + 1} \right].$$

Ak $\Delta N = 0$, teda ak sa plyn skladá výhradne z párov, μ_{\pm} musia byť rovnaké, a keďže majú opačné znamienka, musia byť nulové,

$$\mu_{\pm}(\Delta N = 0) = 0.$$

Pre neutrína máme $m_0 c^2 \ll k_B T$ po celé obdobie horúceho vesmíru a pre páry máme tú istú silnú nerovnosť po väčšinu obdobia pred anihiláciou (ktorá nastáva pri $T_{krit} \sim m_0 c^2 / k_B$). Ďalej, pre neutrína máme $\Delta N \lesssim 0,01 N_{pár}$ z nukleosyntézy a pre páry máme $\Delta N \sim (10^{-8} \div 10^{-10}) N_{pár}$ zo súčasnej hodnoty N_b / N_{γ} . K druhému vzťahu: (1) v čase, keď boli páry prítomné v látke, platilo $\Delta N \sim N_b$ a $N_{pár} \sim N_{\gamma}$, a hodnota N_b v guľi rozpínajúcej sa spolu s vesmírom ostala rovnaká dodnes, zatiaľ čo hodnota N_{γ} sa kvôli anihiláciám postupne zvyšovala, pričom pôvodne bola o jeden až dva rády menšia než dnes, (2) v súčasnosti pripadá na kocku s hranou 1 m³ zhruba 1/10 nukleónu a 10⁹ fotónov, takže hodnota $(N_b / N_{\gamma})_0$ je zhruba 10⁻¹⁰. Ako vidno, LÁTKA JE STOPOVÁ PRÍMES VESMÍRNEHO PROSTREDIA; a keďže súčasný počet častíc látky je daný prebytkami častíc nad antičasticami v prvom období po Veľkom tresku, AJ PREBYTKY ČASTÍC BOLI STOPOVOU PRÍMESOU VESMÍRNEHO PROSTREDIA. Z odhadov $m_0 c^2 / (k_B T)$ a $\Delta N / N_{pár}$ plynie, že pre neutrína aj páry môžeme položiť $m_0 = \mu_{\pm} = 0$. Ak ešte využijeme, že neutrína majú $g = 2$ (ν sú ľavotočivé a $\bar{\nu}$ pravotočivé) a páry $g = 4$, dostaneme

$$E_{\nu} = \frac{7}{8} E_{EM}, \quad E_{pár} = \frac{7}{4} E_{EM}.$$

T e p l o t a n e u t r í n p o a n i h i l á c i a c h

Žiarenie ČT má entropiu

$$S = \frac{4}{3} a_{SB} V T^3.$$

Tento vzťah získame z 1. vety termodynamickéj, ak ju prepíšeme do tvaru $dS = (dE + pdV)/T$ a dosadíme $p = E/(3V)$ a $E = a_{SB} T^4$. (Všimnime si, že z $S = konšt$ vnútri guľe rozpínajúcej sa spolu s vesmírom plynie $T \propto a^{-1}$, čiže vzťah, ktorý sme pôvodne odvodili z $u \propto T^4$, $u = \rho c^2$ a $\rho \propto a^{-4}$.) Rovnakým postupom pre neutrína a páry dostaneme

$$S_{\nu} = \frac{7}{8} S_{EM}, \quad S_{pár} = \frac{7}{4} S_{EM}.$$

Majme guľu rozpínajúcu sa s vesmírom, ktorá mala pred anihiláciou $e^+ e^-$ teplotu T_0 a objem V_0 a po anihilácii teplotu T a objem V . Entropia guľe bola

$$S_0 = \frac{4}{3} a_{SB} \left(1 + \frac{7}{4}\right) V_0 T_0^3 + S_{\nu 0}.$$

Neutrína sa na začiatku anihilácie oddelili od zvyšku prostredia, takže ich entropia počas anihilácie bola konštantná a ich teplota klesala podľa zákona $T \propto a^{-1}$. Zároveň z prostredia mizli páry. Entropia gule po anihilácii teda bola

$$S = \frac{4}{3}a_{SB}VT^3 + S_\nu.$$

Ak do S dosadíme $VT_\nu^3 = V_0T_0^3$ a $S_\nu = S_{\nu 0}$ a položíme $S = S_0$, dostaneme

$$\frac{T_\nu}{T} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}.$$

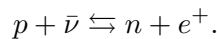
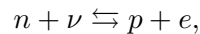
Obe teploty v ďalšom klesali podľa zákona $T \propto a^{-1}$, takže ich pomer sa nemenil. Keby tento zákon platil až do súčasného okamihu, dnešná teplota neutrín by bola približne 2,1 K. Z pozorovania neutrínových oscilácií však plynie, že je pokojová energia neutrín aspoň o dva rády vyššia než $k_B \times$ táto teplota, čo je asi 10^{-4} eV. Neutrína sa preto v minulosti spomalili na nerelativistické rýchlosti a dnes prispievajú k tmavej látke.

9. Nukleosyntéza

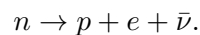
Vnútri hviezd sa vodík premieňa hélium a ťažšie prvky, ktoré sa pri výbuchoch supernov dostávajú do medzihviezdneho priestoru. Lenže týmto spôsobom mohla vzniknúť iba časť pozorovaného hélia. Zvyšok, tzv. *prvotné hélium*, pochádza z času niekoľko minút po Veľkom tresku, keď vo vesmíre prebehla nukleosyntéza.

„Z m r a z e n i e ” p o m e r u n e u t r ó n o v k p r o t ó n o m

Protóny a neutróny vznikli z prebytku kvarkov nad antikvarkami v ére uväznenia (pri prechode kvarky \rightarrow hadróny). V prvom období prebiehali reakcie, pri ktorých sa protóny menili na neutróny a neutróny na protóny. Boli to reakcie



Obrátené reakcie sa zastavili po anihilácii e^+e^- , a ako sme videli v minulej prednáške, priame reakcie prestali prebiehať zhruba v tom istom čase. Premena neutrónov na protóny nastáva aj pri *rozpade neutrónu*



Túto reakcia treba pri presných výpočtoch tiež vziať do úvahy, hoci *kvalitatívne* nemení výsledky, pretože je príliš pomalá. (Počas rozpadu neutrónu je približne 10 min. a nukleosyntéza sa skončila

po niekoľkých minútach.) Pokým boli neutróny a protóny v chemickej rovnováhe, ich koncentrácie boli úmerné boltzmannovským súčiniteľom

$$p \propto e^{-m_p c^2 / k_B T}, \quad n \propto e^{-m_n c^2 / k_B T},$$

kde m_p je pokojová hmotnosť protónu a m_n je pokojová hmotnosť neutrónu. (Dôkaz: $N \doteq \sum e^{(\mu - \epsilon_i) / k_B T}$, kde $\epsilon \doteq m_0 c^2 + \mathbf{p}^2 / (2m)$, a chemické potenciály častíc, ktoré sa menia jedny na druhé, sú v chemickej rovnováhe rovnaké, $\mu_n = \mu_p + \mu_e \doteq \mu_p$.) Pomer počtu neutrónov a protónov teda bol

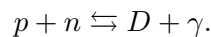
$$\frac{n}{p} = e^{-\Delta m c^2 / k_B T},$$

kde $\Delta m \doteq 1,5 \text{ MeV} / c^2$ je rozdiel pokojových hmotností neutrónu a protónu. Na začiatku obsahovalo prostredie približne rovnako veľa neutrónov ako protónov, potom pomer n/p klesal. Keď sa protóny prestali meniť na neutróny a naopak, pomer sa „zmrazil“. Vzájomná premena protónov a neutrónov prestala zhruba pri teplote $0,8 \text{ MeV} / k_B$, takže výsledná hodnota pomeru n/p bola

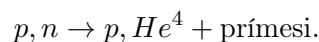
$$\frac{n}{p} \sim e^{-1,5 \text{ MeV} / 0,8 \text{ MeV}} \doteq 0,15.$$

P r i e b e h n u k l e o s y n t é z y

Keď sa vo vesmírnom prostredí objavili protóny a neutróny, začali prebiehať reakcie



V dôsledku toho prostredie v každom okamihu obsahovalo istú rovnovážnu koncentráciu deutéria. Táto koncentrácia bola spočiatku zanedbateľná, ale pri znižovaní teploty rástla a pri teplote okolo $0,1 \text{ MeV} / k_B$ už bolo jadier deutéria toľko, že sa začali spájať s protónmi, neutrónmi aj inými jadrami deutéria do ťažších jadier. Nasledoval reťazec reakcií, v ktorom boli jadrá vytvorené pri každej reakcii „materiálom“ pre ďalšie reakcie. (V prvom článku na túto tému, ktorý uverejnili Wagoner, Fowler a Hoyle v r. 1969, sa berie do úvahy 144 reakcií!) Konečným produktom boli jadrá He^4 a stopové množstvá jadier D, T, He^3 , Li^7 a Be^7 . V ďalšom sa T rozpadlo na He^3 a Be^7 na Li^7 , takže v prostredí ostali iba protóny, jadrá He^4 a stopové množstvá jadier D, He^3 a Li^7 . Symbolicky:



P o r o v n a n i e s p o z o r o v a n i a m i

Syntéza jadier je citlivá na teplotu, preto sa protóny a neutróny v ranom vesmíre spájali iba v úzkom intervale teplôt blízkych k $T_{nukl} = 0,1 \text{ MeV}/k_B$. Priebeh nukleosyntézy závisel od dvoch veličín: od časovej škály t_{nukl} prislúchajúcej teplote T_{nukl} a od hustoty počtu nukleónov pri tejto teplote $n_{N,nukl}$. Čím dlhšie nukleosyntéza trvala, tým viac neutrónov sa stihlo spojiť s protónmi a tým viac jadier He^4 vzniklo; čím väčšia bola hustota počtu nukleónov, tým rýchlejšie reakcie prebehli a tým menej medziproduktov (jadier D a He^3) ostalo v prostredí.

Chemické zloženie prostredia je dané hmotnostnými koncentraciami (pomermi hmotností jednotlivých prvkov k celkovej hmotnosti látky v danom objeme). Ak sa všetky neutróny pri nukleosyntéze spojili s protónmi, vzniknuté hélium malo koncentráciu

$$Y = \frac{2n}{p+n} \sim 0,26.$$

Pozorovaná stredná koncentrácia hélia v atmosférach hviezd a medzihviezdnej látky je $Y \sim 0,3$. Keď odtiaľ odčítame príspevok hélia, ktoré podľa teórie vzniklo vnútri hviezd, dostaneme zhruba maximálnu koncentráciu prvotného hélia odhadnutú vyššie. To znamená, že NUKLEOSYNTÉZA MUSELA PREBEHNÚŤ DO KONCA (do spojenia všetkých neutrónov s protónmi). Časové škály vo vesmíre závisia od počtu druhov neutrín. Z podmienky úplnosti nukleosyntézy dostaneme $\mathcal{N}_\nu \lesssim 3$ až 4, čo je v zhode s tvrdením, ktoré plynie z experimentálnych údajov o rozpade Z bozónu, že počet druhov neutrín je 3.

Hustota počtu nukleónov bola po celý čas od poslednej anihilácie úmerná hustote počtu fotónov, teda veličine T^3 . (Vid' $N = \sum n_i \propto VT^3$.) Súčasná teplota T_0 aj teplota v čase nukleosyntézy T_{nukl} sú známe, preto neurčitost' $n_{N,nukl}$ pochádza iba toho, že nepoznáme presnú hodnotu n_{N0} . Platí

$$n_{N0} = \frac{1}{m_N} \rho_{N0} = \frac{1}{m_N} \Omega_b \rho_{krit} \propto \Omega_b h^2,$$

takže

$$n_{N,nukl} \propto \Omega_b h^2.$$

Z údajov pozorovania o koncentráciách ľahkých prvkov, predovšetkým D, plynie

$$\Omega_b h^2 \doteq 0,02,$$

čiže Ω_b pri $h = 0,71$ je 0,04. Táto hodnota je o rád menšia než Ω_l a pozoruhodne dobre sa zhoduje s Ω_{halo} , čo je však asi náhoda. Pozorovaním rentgenového žiarenia veľkých kóp galaxií sa dá získať odhad miestneho ρ_N a pozorovaním rýchlostí galaxií odhad miestneho ρ_l . Keď odtiaľ vypočítame

hodnotu miestneho pomeru ρ_l/ρ_N a vynásobíme ňou globálne ρ_N zistené z nukleosyntézy, prideme k najlepšiemu súčasnému odhadu globálneho ρ_l , o ktorom bola reč v prednáške 5.

10. Baryogenéza

Látka vo vesmíre – naša Galaxia aj ostatné galaxie zaplňajúce vesmír – sú malou prímесou („znečistením“) vesmírneho prostredia. Vzniká otázka, odkiaľ sa táto prímес vzala. Čím dôkladnejšie chceme spoznať podstatu vesmíru, tým ďalej musíme postúpiť naspäť v čase. Zatiaľ čo pri objasňovaní pôvodu reliktového žiarenia sme sa museli vrátiť do času 100 000 rokov po Veľkom tresku a pri objasňovaní pôvodu prvotného hélia do času 1 min. po Veľkom tresku, na to, aby sme pochopili pôvod látky, musíme „cúvnuť“ až do éry Veľkého zjednotenia, čiže do času 10^{-35} s po Veľkom tresku.

T e ó r i e V e ľ k é h o z j e d n o t e n i a

Štandardný model elementárnych častíc je *kalibračná teória* s grupou symetrie $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ („grupa 3–2–1“). Táto teória sa skladá z dvoch častí: zo Salamovej–Weinbergovej teórie s grupou symetrie $SU(2) \times U(1)$, ktorá opisuje elektroslabé interakcie, a z kvantovej chromodynamiky s grupou symetrie $SU(3)$, ktorá opisuje silné interakcie. V kalibračných teóriach interakcie sprostredkujú bezhmotové častice so spinom 1 – *kalibračné bozóny*. Dôležitou vlastnosťou SW teórie je *spontánne narušenie symetrie*: SYMETRIU INTERAKCIÍ NARUŠUJE VÁKUUM (základný stav systému kvantových polí). V dôsledku toho sa grupa $SU(2) \times U(1)$ redukuje na grupu $U(1)_{EM}$ prislúchajúcu elektromagnetickým interakciám a v teórii ostáva jediný kalibračný bozón – *fotón*. Namiesto ďalších 3 kalibračných bozónov máme častice s hmotnosťou $\sim 100 \text{ GeV}/c^2$ a spinom 1 sprostredkujúce slabé interakcie – *W a Z bozóny*. V prostredí s teplotou podstatne prevyšujúcou $100 \text{ GeV}/k_B$ mechanizmus narušenia symetrie nefunguje a „nenarušená“ teória platí presne. Odtiaľ plynie význam Salamovej–Weinbergovej škály v ranom vesmíre. Pôvodne boli *W a Z bozóny* bezhmotové a slabé interakcie zjednotené s elektromagnetickými, lenže v čase 10^{-9} s po Veľkom tresku, keď teplota vesmírneho prostredia klesla na $100 \text{ GeV}/k_B$, *W a Z bozóny* získali nenulovú hmotnosť a slabé interakcie sa oddelili od elektromagnetických.

Silu interakcie zadáva *väzbová konštanta* závisiaca od energetickej škály (typickej prenesenej energie pri skúmanom procese). Pri energii 100 GeV majú štvorce väzbových konštánt elektroslabých interakcií α_1 a α_2 hodnoty zhruba 1/60 a 1/30 a štvorec väzbovej konštanty silných interakcií α_S hodnotu zhruba 1/10. (Pri energiách menších než 100 GeV elektroslabé interakcie charakte-

rizuje namiesto konštánt α_1 a α_2 konštanta jemnej štruktúry $\alpha = 1/137$ a Fermiho konštanta $G_F \approx (100 \text{ GeV})^{-2}$.) Ak sa nad energiou 100 GeV nikde neobjavia nové častice (je tam „púšť“), krivky $\alpha_1(E)$, $\alpha_2(E)$ (stúpajúce) a krivka $\alpha_S(E)$ (klesajúca) sa minú. V supersymetrických teóriach, ktoré predpovedajú veľký počet nových častíc pri energii vyššej než 1 TeV, sa krivka $\alpha_2(E)$ obráti a všetky 3 krivky sa stretnú pri energii okolo 10^{15} GeV. To vedie k domnienke, že ŠTANDARDNÝ MODEL JE NÍZKOENERGETICKOU LIMITOU JEDNOTNEJ TEÓRIE VŠETKÝCH TROCH INTERAKCIÍ. Táto teória by mala mať istú „veľkú“ grupu symetrie G obsahujúcou grupu 3–2–1 a pri energii okolo 10^{15} GeV by v nej malo nastať spontánne narušenie symetrie, pri ktorom by časť kalibračných bozónov mala nadobudnúť hmotnosti $\sim 10^{15} \text{ GeV}/c^2$ a grupa G by sa mala zredukovať na grupu 3–2–1. Zjednotenie fundamentálnych interakcií sa nazýva *Veľké zjednotenie*. Podľa teórií Veľkého zjednotenia okrem kalibračných bozónov štandardného modelu existujú aj tzv. X bozóny sprostredkujúce superslabé interakcie, pri ktorých sa leptóny menia na kvarky a kvarky na leptóny. Z analógie medzi teóriami Veľkého zjednotenia a SW teóriou je zrejmé, že časovú škálu Veľkého zjednotenia môžeme interpretovať podobne ako SW škálu. Pôvodne boli X bozóny bezhmotové a silné interakcie zjednotené s elektroslabými, lenže v čase 10^{-35} s po Veľkom Tresku, keď teplota vesmírneho prostredia klesla na $10^{15} \text{ GeV}/k_B$, X bozóny získali nenulovú hmotnosť a superslabé interakcie sa oddelili od silných a elektroslabých.

Teórie Veľkého zjednotenia predpovedajú *rozpad protónu* s polčasom rozpadu 10^{32} rokov alebo väčším. Najkratší polčas rozpadu, ktorý dáva tzv. minimálna teória Veľkého zjednotenia s grupou symetrie SU(5), experiment už vylúčil.

V z n i k p r e b y t k u č a s t í c

Produkcja prebytku častíc s nenulovým B (baryónovým číslom) v nábojovo symetrickom prostredí sa nazýva *baryogenéza*. Aby taký dej mohol nastať, musia byť splnené tri podmienky, ktoré formuloval r. 1961 Andrej Sacharov: (1) nesmie sa zachovávať B , (2) musí byť narušená C aj CP symetria, (3) dej musí byť nevratný. V štandardnom modeli je narušená P a C symetria a *veľmi slabo* aj CP symetria. (Narušenie P a nepriamo aj C symetrie sa pozoruje pri β rozpade v magnetickom poli a narušenie CP symetrie pri rozpade K mezónov.) Teórie Veľkého zjednotenia „dedia“ narušené symetrie od štandardného modelu a zároveň umožňujú procesy s nezachovaním B . Sú to jednak rozpady X a \bar{X} bozónov na leptóny a kvarky

$$X \rightarrow qq \text{ alebo } \bar{l}\bar{q},$$

$$\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q} \text{ alebo } lq,$$

jednak obrátené procesy, t.j. vznik X a \bar{X} bozónov pri zrážkach leptónov a kvarkov. Z narušenia C a CP symetrie plynie, že rozpady líšiac sa zámenou častíc na antičastice a antičastíc na častice môžu byť rôzne pravdepodobné: prvý kanál rozpadu X môže byť o niečo pravdepodobnejší než prvý kanál rozpadu \bar{X} a druhý o niečo menej pravdepodobný. (Keby bola narušená C a P symetria, ale nie CP symetria, rozpady s rovnakými helicitami častíc by síce mohli mať rôzne pravdepodobnosti, ale rozpady s opačnými helicitami by ich nutne mali rovnaké, takže celkové pravdepodobnosti by tiež museli byť rovnaké.) X a \bar{X} bozóny sa začali rozpadáť na začiatku éry Veľkého zjednotenia, keď nadobudli nenulovú hmotnosť. Zároveň prebiehala kreácia a anihilácia $X\bar{X}$ párov a vznik X a \bar{X} bozónov z kvarkov a leptónov. Keďže relaxačný čas týchto procesov bol väčší než charakteristický čas rozpínania, anihilácia nestihla znižovať koncentráciu X a \bar{X} bozónov tak rýchlo, ako by zodpovedalo klesaniu teploty (Sacharovova podmienka č. 3), a časť bozónov „prežila“ do okamihu, keď sa anihilácia zastavila. ROZPADOM TÝCHTO BOZÓNŮV VZNIKOL PREBYTOK KVARKOV NAD ANTIKVARKAMI A LEPTÓNŮV NAD ANTILEPTÓNMI. Opísaný mechanizmus dáva správny prebytok častíc nad antičasticami, t.j. 1 prebytočnú časticu na 10^{10} párov. V súčasnosti sa za najpravdepodobnejšiu považuje dvojstupňová baryogéneza, pri ktorej sa najprv vytvoril (rozpadom ťažkých neutrín) prebytok leptónov, a až z neho vznikol prebytok kvarkov.

11. Inflácia

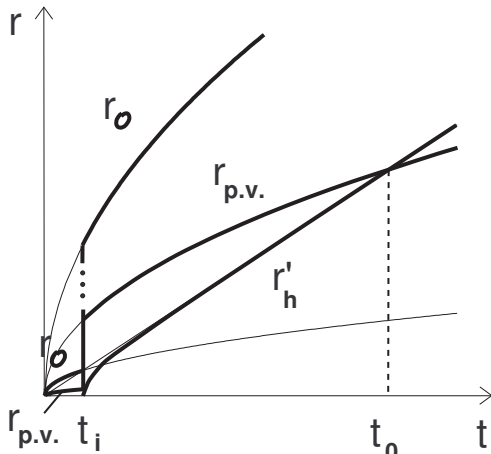
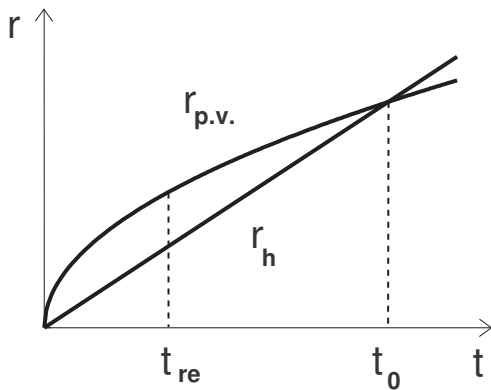
Dve otázky, o ktorých zatiaľ nebola zmienka, sú: (1) prečo je vesmír s veľkou presnosťou homogénny a izotropný, a (2) odkiaľ sa vzali malé nehomogenity, z ktorých neskôr vznikli galaxie. Odpoveď na obe otázky dostaneme, ak budeme predpokladať, že pozorovateľná časť vesmíru vznikla z veľmi malej oblasti zaplnenej horúcou látkou, ktorá sa exponenciálne rozšírila („nafúkla“). Tento dej sa nazýva *kozmozologická inflácia* alebo krátko *inflácia*.

H o r i z o n t o v ý p r o b l é m

Inflácia je exponenciálne rozpínanie vesmíru tesne po Veľkom tresku, zapríčinené „zmrazením“ skalárneho poľa v stave s nenulovou hustotou hmotnosti. Skalárne pole poháňajúce infláciu sa nazýva *inflatón*. Na konci inflácie sa energia inflatónu odovzdala žiareniu a vývoj vesmíru pokračoval ako vo Friedmannovom modeli. S myšlienkou inflácie prišiel r. 1981 Alan Guth a rozpracovali ju viacerí kozmológovia, predovšetkým Andrej Linde.

Inflácia vyriešila viaceré problémy kozmológie, ako *horizontový problém*, *problém krivosti* a

monopólový problém. Najdôležitejší z nich je horizontový problém, ktorý spočíva v tom, že HOMOGENNÉ ROZLOŽENIE LÁTKY NEMOHLO VZNIKNÚŤ Z NEHOMOGENNEHO PREMIEŠANÍM. Inými slovami, ak bola geometria aj rozloženie látky pôvodne silne nehomogénne („na začiatku bol chaos“), a látka sa potom iba premiešavala, nehomogenity sa nestihli vyhladiť do oddelenia žiarenia od látky, keď, ako vieme z pozorovania reliktového žiarenia, už bola látka rozložená homogénne. Premiešavanie sa totiž dialo nanajvyš rýchlosťou svetla, zatiaľ čo vesmír sa rozpínal väčšou rýchlosťou. Zaveďme *horizont* ako plochu, do ktorej sa rozšíri svetlo od Veľkého tresku po daný okamih, a *horizontovú dĺžku* ako jej polomer. V homogénnom a izotropnom vesmíre s $\Lambda = 0$



je horizontová dĺžka po celý čas $r_h \sim t$, zatiaľ čo polomer pozorovateľného vesmíru je najprv (pri $t < t_{rovn}$) $r_{p.v.} \propto t^{1/2}$ a potom (pri $t > t_{rovn}$) $r_{p.v.} \propto t^{2/3}$. A keďže v súčasnosti $r_h = r_{p.v.}$ (definícia $r_{p.v.}$!), v minulosti muselo byť $r_h < r_{p.v.}$. V čase t_{re} platilo $r_h \sim 0,03r_{p.v.}$. (Dôkaz: od času t_{re} dodnes platilo $r_h/r_{p.v.} \propto t^{1/3} \propto a^{1/2}$ a pomer škálovacích parametrov je $a_{re}/a_0 = T_0/T_{re} \sim 10^{-3}$.) Do vzniku RŽ sa teda stihli vyhladiť iba oblasti s rozmerom 30krát menším, než bol rozmer plochy, z ktorej k nám toto žiarenie prichádza. RIEŠENIE: pozorovateľný vesmír je časť oblasti \mathcal{O} , ktorá vošla pod horizont v čase t_i tesne po Veľkom tresku a potom sa „nafúkla“ do rozmerov, porovnateľných s vtedajšími rozmermi pozorovateľného vesmíru alebo väčších. Rozlišuje sa *nová inflácia* na škále Veľkého zjednotenia ($t_i \sim t_{VZ}$) a *chaotická inflácia* na Planckovej škále ($t_i \sim t_{Pl}$). V čase t_{VZ} platilo $r_h \sim 3 \cdot 10^{-26} r_{p.v.}$. (Dôkaz: od času t_{VZ} zhruba do času t_{re} platilo $r_h/r_{p.v.} \propto t^{1/2} \propto a$ a pomer škálovacích parametrov je $a_{VZ}/a_{re} = T_{re}/T_{VZ} \sim 10^{-24}$. To treba vynásobiť pomerom $r_h/r_{p.v.}$ v čase t_{re} , ktorý je zhruba 0,03.) Pri novej inflácii sa teda vesmír musel „nafúknuť“ aspoň $3 \cdot 10^{25}$ krát. Časový úsek, počas ktorého sa rozmery vesmíru zväčšili e krát, sa nazýva *e-folding*. Pri novej inflácii stačilo 60 *e-foldingov* ($\ln 3 \cdot 10^{25} \sim 60$), ale v typickom scenári ich nastalo 2000, zatiaľ čo pri chaotickej inflácii stačilo 70 *e-foldingov* a v typickom scenári ich nastalo 10^7 až 10^{14} . Veľké „nafúknutie“

vesmíru znamená, že súčasná hustota musí byť veľmi blízka ku kritickej, $|\Omega - 1| \ll 1$.

R o z p í n a n i e v e s m í r u p r i i n f l á c i i

Majme homogénny a izotropný vesmír s $\Lambda = 0$ zaplnený žiarením, ktorý navyše obsahuje makroskopické skalárne pole ϕ . (Stačí riešiť túto úlohu, lebo oblasť \mathcal{O} v nehomogénnom vesmíre sa po premiešaní rozpína rovnako, ako keby bola súčasťou homogénneho vesmíru.) Predpokladajme, že v čase t_i , keď malo žiarenie hustotu $\rho_{z,i}$, sa hustota hmotnosti poľa „zmrazila“ na hodnote $\rho_0 \sim \rho_{z,i}$, a člen pochádzajúci z krivosti v rovnici pre škálovací parameter, ak bol nenulový, bol porovnateľný s členom úmerným hustote. Keďže hustota žiarenia v ďalšom klesala ako a^{-4} a relatívna veľkosť krivostného člena ako a^{-2} , rovnica pre a zakrátko prešla do tvaru

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho_0 a^2.$$

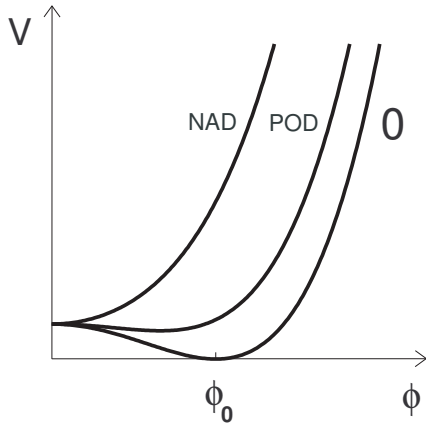
Riešenie tejto rovnice je

$$a \propto e^{Ht},$$

kde H je „Hubbleova konštanta, ktorá je naozaj konštantná“, $H = (8\pi\kappa\rho_0/3)^{1/2}$. Vidíme, že „ZMRAZENIE“ INFLATÓNOVÉHO POĽA V STAVE S NENULOVOU HUSTOTOU HMOTNOSTI VIEDLO K EXPONENCIÁLNEMU ROZPÍNANIU VESMÍRU. Pri „zmrazení“ hustoty na hodnote ρ_0 vesmír získal efektívnu kozmologickú konštantu $\Lambda_{ef} = 8\pi\kappa\rho_0/c^2$, ktorá bola o mnoho rádov väčšia než súčasná. Mechanizmus, ktorým sa urýchlil vesmír pri inflácii, bol teda rovnaký ako pri urýchlňovaní, ktoré pozorujeme dnes, len bol „nastavený“ na vtedajšiu podstatne vyššiu energetickú škálu. Čas trvania e -foldingu je $\tau = H^{-1} \sim t_i$. (Dôkaz: pred t_i platilo $\rho_\phi \sim \rho_z \propto a^{-4}$, takže platilo aj $(8\pi\kappa\rho/3)^{1/2} \doteq \dot{a}/a = 1/(2t)$ a $H \sim (8\pi\kappa\rho_i/3)^{1/2} \sim 1/t_i$.) Počet e -foldingov sa teda rovná trvaniu inflácie v násobkoch času, v ktorom inflácia začala.

M e c h a n i z m y i n f l á c i e

Skalárne pole má dynamiku danú *efektívnym potenciálom* $V(\phi)$, čo je príspevok k hustote energie, ktorý závisí iba od poľa v danom bode a nie od jeho derivácií. V kalibračných teóriach hrá dôležitú úlohu *Higgsovo pole*, ktorého efektívny potenciál má globálne minimum („vákuum“) pri $\phi = \phi_0 > 0$. (V štandardnom modeli je ϕ komplexné dvojjložkové pole, takže namiesto ϕ treba v tomto vzťahu písať $|\phi| = (\phi^+\phi)^{1/2}$.) Vákuová hodnota poľa dodáva kalibračným bozónom hmotnosť $M \sim \hbar^{1/2}c^{-3/2}\phi_0$ a narúša tak kalibračnú symetriu. V SW teórii je $V(\phi)$



funkcia typu „sombbrero” resp. „fľaša”, vid' krivka označená „0” na obrázku. Tento tvar $V(\phi)$ sa vzťahuje k $T \ll T_{krit} \sim Mc^2/k_B$. Pri $T \gtrsim T_{krit}$ je $V(\phi)$ funkcia typu „miska”, vid' krivky označené „pod” (s $T = \frac{3}{4}T_{krit}$) a „nad” (s $T = \frac{3}{2}T_{krit}$). Zmena tvaru efektívneho potenciálu pri ochladení vesmíru pod T_{krit} vedie k zmene charakteru interakcií, o ktorej bola reč v predchádzajúcej prednáške. Pri $T \gtrsim T_{krit}$ bolo pole nulové a symetria interakcií bola narušená, ale keď sa teplota znížila pod T_{krit} , pole prešlo do

stavu s hodnotou ϕ_0 a symetria sa narušila.

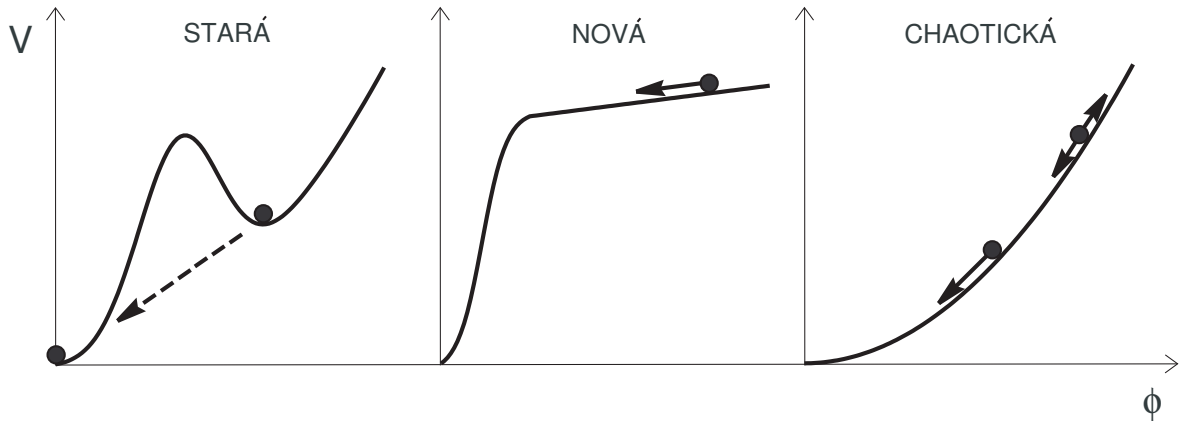
V teóriach Veľkého zjednotenia môže mať potenciál pri $T = 0$ aj zložitejší tvar než „sombbrero”. Pri špeciálnom výbere potenciálu HIGGSOVO POLE OSTANE PO POKLESE TEPLoty POD T_{krit} V STAVE, V KTOROM BOLO PRI $T > T_{krit}$, podobne ako podchladená para ostáva v plynnom skupenstve. Pritom bude mať konštantné alebo pomaly sa meniace $V > 0$ a $\rho \doteq V/c^2$. Pri *starej inflácii* je pole zadržané v lokálnom minime funkcie $V(\phi, T = 0)$ („falošnom vákuu”), ktoré je oddelené od globálneho minima („pravého vákuu”) bariérou. Pole prejde z jedného vákuu do druhého kvantovomechanickým tunelovaním, pri ktorom vznikajú bubliny pravého vákuu rozvíjajúce sa do falošného vákuu rýchlosťou c . Energia poľa je sústredená v stenách bublín, takže infláciou vznikne silne nehomogénny vesmír, ktorý sa v ďalšom nestihne premiešať. Pri *novej inflácii* pole ostane dlho blízko lokálneho maxima funkcie $V(\phi, T = 0)$, pretože funkcia je tam plochá (blízka ku konštante). Pole sa dostane do globálneho minima *potomým rolovaním* – postupným vzdľavovaním sa od lokálneho maxima podľa klasickej pohybovej rovnice

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_{\phi}Vc^2 = 0.$$

Tento dej prebieha v doménach, ktoré sú dostatočne veľké na to, aby obsahovali celý pozorovateľný vesmír. *Chaotická inflácia* nastáva pri „spúšťaní sa” poľa s konečnou rýchlosťou. Stačí na ňu napr. voľné pole s nenulovou hmotnosťou ($V \propto \phi^2$). Pole v oblasti s rozmerom l_{Pl} koná vákuové fluktuácie, ale keď sa dostatočne priblíži k $V = 0$, začne sa vyvíjať podľa klasickej pohybovej rovnice a poháňať infláciu. Keďže ide o náhodný dej, nastáva v stále nových oblastiach. Vesmír, v ktorom sa deje takáto nepretržitá inflácia, sa nazýva *samoreprodukujúci sa*.

Fluktuácie skalárneho poľa

Vákuum podľa súčasných predstáv nie je prázdny priestor, ale priestor, ktorý zaplňujú *vákuové*



fluktuácie kvantových polí. Tieto fluktuácie majú podobný pôvod ako kmity LHO v základnom stave: vznikajú preto, lebo podľa princípu neurčitosti sa pole a jeho derivácia podľa času nemôžu súčasne rovnať nule. Zavedme *horizont udalostí* ako plochu, spoza ktorej sa nedostanú žiadne signály, ani svetelné, k pozorovateľovi. Vo vesmíre s $a \propto e^{Ht}$ je to sféra s polomerom $r_H = cH^{-1}$. Vlnová dĺžka fluktuácie λ rastie úmerne a , a keď fluktuácia prejde cez horizont udalostí ($\lambda \sim$ niekoľko r_H), stane sa z nej porucha makroskopického poľa. Tento dej opisuje rovnica pre časový vývoj fluktuácií

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + c^2a^{-2}\Delta\delta\phi = 0,$$

kde $a = a_i e^{H(t-t_i)}$. (Z rovnice sme vynechali člen úmerný $\partial_\phi^2 V$, ktorý je pri $\lambda \lesssim$ niekoľko r_H zanedbateľný.) Ak prejdeme ku konformnému času $\tau = \int ca^{-1}dt = r_H a^{-1}$ a k preškálovanej fluktuácii poľa $\delta\phi_{nové} = a\delta\phi$, rovnica prejde na vlnovú rovnicu s disperzným zákonom

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\tau^{-2} \propto \mathbf{k}^2 - 2r_H^{-2},$$

kde ω je frekvencia, κ je vlnový vektor vzhľadom na comoving súradnice a $\mathbf{k} = a^{-1}\kappa$ je vlnový vektor vzhľadom na fyzikálne súradnice. Pri $k \sim r_H^{-1}$, teda $\lambda = 2\pi/k \sim r_H$, ω^2 zmení znamienko, čo má za následok, že príslušný mód $\delta\phi$ prejde po niekoľkých e -foldingoch zo základného stavu do stavu opísaného kváziklasickým vlnovým balíkom. Na konci inflácie, keď inflatónové pole odovzdá energiu žiareniu, z takýchto balíkov vzniknú malé nehomogenity v ináč homogénnom rozdelení látky.

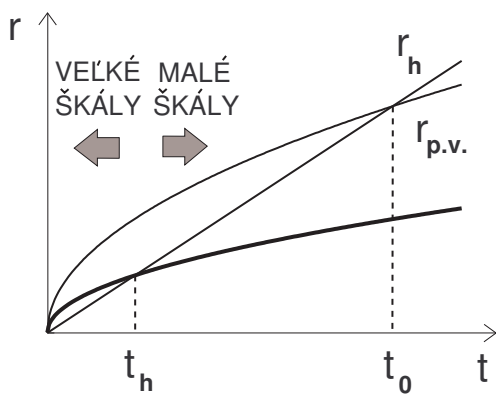
12. Vznik galaxií

Po tom, ako prebehla rekombinácia a žiarenie sa oddelilo od látky, sa malé nehomogenity začali stláčať pôsobením vlastnej gravitácie. Tak vznikli protogalaxie a v nich tým istým procesom na

menšej škále hviezdy. Porovnanie teórie s údajmi pozorovania o anizotropiach reliktového žiarenia vedie k záveru, že značnú časť vesmírneho prostredia tvorí chladná tmavá látka.

V ý v o j n e h o m o g e n í t

Keď sa vesmír rozpína, rozmer nehomogenít rastie podľa zákona $r \propto a$. To znamená, že ak bola nehomogenita pôvodne nad horizontom (bola „veľkoškálová“), časom sa dostane pod horizont (stane sa „maloškálovou“). Čas t_h , v ktorom sa to udeje, je daný podmienkou $r(t_h) = r_h(t_h)$. Vývoj



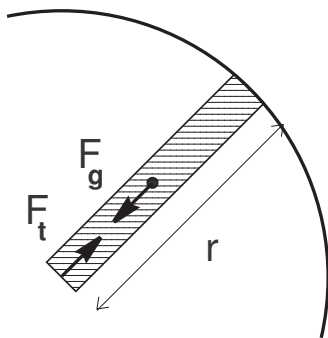
nehomogenít opisuje teória, ktorú sformuloval r. 1946 Jevgenij Lifšic. Z tejto teórie plynie, že PRED REKOMBINÁCIOU SA VEĽKOŠKÁLOVÉ NEHOMOGENITY STLÁČALI A MALOŠKÁLOVÉ OSCILOVALI, ZATIAĽ ČO PO NEJ SA MALOŠKÁLOVÉ NEHOMOGENITY ZAČALI TIEŽ STLÁČAŤ. Elementárne vysvetlenie: (1) vo veľkoškálových nehomogenitách pôsobí iba gravitácia, pretože informácia o tlaku látky sa nestihla preniesť zo

stredy nehomogenity na povrch, (2) v maloškálových nehomogenitách pred t_{re} účinok gravitácie ruší tlak žiarenia, (3) v maloškálových nehomogenitách po t_{re} gravitácia opäť prevládne, pretože tlak nerelativistickej látky, ktorý pôsobí proti nej, je príliš malý na to, aby ju vykompenzoval. Nehomogenity, z ktorých neskôr vznikli galaxie, mali v čase t_{re} rozmer zhruba $0,01r_h$. To znamená, že po väčšinu času, pokým žiarenie interagovalo s látkou, oscillovali, a až keď sa interakcia zastavila a proti gravitácii prestal pôsobiť tlak žiarenia, začali sa stláčať. (Väčšie nehomogenity oscillovali kratšie a ešte väčšie sa stláčali po celý čas, ale pretože mali menšie ZAČIATOČNÉ prevýšenie hustoty, boli v čase t_{re} stlačené menej než nehomogenity, o ktorých je reč.) Veľkosť nehomogenity charakterizuje *kontrast hustoty* $\delta = \delta\rho/\rho$. V prvom období po t_{re} , pokým platila linearizovaná teória, táto veličina rástla podľa zákona $\delta \propto a$, viď ďalej. Keď sa priblížila k 1, začala sa nelineárna fáza stláčania, počas ktorej vznikli galaxie a hviezdy. Túto fázu skúmajú kozmológovia simuláciami na veľkých počítačoch. Aby sa vytvorila pozorovaná štruktúra vesmíru, veličina δ musela dosiahnuť hodnotu ~ 1 – hustota látky v nehomogenitách musela narásť na dvojnásobok okolitej hustoty – zhruba 1 mld. rokov po Veľkom Tresku. Vesmír bol vtedy zhruba 5krát menší než dnes ($a_{gal} \sim 0,2a_0$), čiže zhruba 200krát väčší než pri rekombinácii ($a_{gal} \sim 200a_{re}$). Z tohto odhadu a zo vzťahu $\delta \propto a$ dostaneme, že nehomogenity, z ktorých vznikli galaxie, museli mať δ v čase $t_{re} \sim 0,005$. Tieto nehomogenity môžeme pozorovať aj priamo, keďže zanechali odtlačok v

reliktovej žiareni. Ale keď porovnáme teóriu s pozorovaním, prideme k sporu: typická hodnota $\delta T/T$, čo je veličina, ktorá charakterizuje anizotropie optie RŽ a o ktorej by sme predpokladali, že sa bude zhodovať s δ_{re} , je iba 10^{-5} („desať dielikov z milióna“). CHÝBAJÚ DVA RÁDY. Spor odstránime, ak si všimneme, že na anizotropie RŽ vplýva iba taká látka, ktorá interaguje so žiarením. Baryónová látka to spĺňa. (Interagujú elektróny a jadrá to „cítia“ vďaka coulombovským silám.) Ale väčšina látky je nebaryónová. Predpokladajme, že celý zvyšok je *chladná tmavá látka*, ktorá so žiarením neinteraguje. Nehomogenity takej látky na dostatočne malých škálach (menších než 10-násobok škály „galaktických semien“) sa do okamihu t_{re} stihnú stlačiť natoľko, že sú práve o chýbajúce dva rády väčšie než baryónové. Tak vzniknú „gravitačné pasce“, do ktorých popadajú baryóny nachádzajúce sa v ich blízkosti, a kontrast hustoty baryónových nehomogenít sa zvýši na požadovanú hodnotu.

J e a n s o v a n e s t a b i l i t a

Stláčanie nehomogenít v rozpínajúcom sa vesmíre je analogické stláčaniu medzihviezdnej látky pri vzniku hviezd. Kritickú veľkosť oblaku medzihviezdnej látky, pri ktorej gravitácia prevládne nad tlakom a oblak sa začne stláčať, našiel r. 1902 James Jeans. Majme plynný oblak s hmotnosťou m a polomerom r . Na stĺpec s podstavou S , začínajúci v strede oblaku a končiaci na jeho povrchu, pôsobí gravitačná sila $F_g \sim \kappa m_{stĺpec} m/r^2 = \kappa \rho S m/r$, kde $\rho \sim m/r^3$ je stredná hustota oblaku, a tlaková sila $F_t \sim pS$, kde p je tlak vnútri oblaku. Ak zavedieme rýchlosť zvuku v oblaku $v_{zv} = \sqrt{\partial p/\rho} \sim \sqrt{p/\rho}$, dostaneme, že sily sa rušia pri



$$r \sim \frac{v_{zv}}{\sqrt{\kappa \rho}} = r_J.$$

Veličina r_J sa nazýva *Jeansov polomer*. Ak má oblak rozmer väčší než r_J , gravitačná sila preváži nad tlakovou a oblak sa začne stláčať – vznikne *Jeansova nestabilita*. Pre oblak plynného vodíka máme $p = \rho k_B T/m_p$, kde T je teplota plynu a m_p je hmotnosť protónu. Odtiaľ plynie $r_J = \sqrt{k_B T/(\kappa m_p \rho)}$, a ak za ρ a T dosadíme typické hodnoty pre medzihviezdnu látku a prejdeme od polomeru k hmotnosti, dostaneme, že Jeansova nestabilita vzniká pri hmotnosti oblaku $\sim 10^5 M_\odot$.

N e h o m o g e n i t y v n e w t o n o v s k e j k o z m o l ó g i i

Pozrime sa, ako sa vyvíjajú malé nehomogenity v rozpínajúcom sa vesmíre podľa Newtonovej

teórie gravitácie. Majme ideálnu kvapalinu s hustotou ρ , rýchlosťou \mathbf{v} a gravitačným potenciálom Φ . Kvapalina môže byť relativistická, s $p \sim \rho c^2$. Rovnice pre ρ , \mathbf{v} a Φ sú:

$$\text{rovnica kontinuity: } \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{p}{c^2} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{Eulerova rovnica: } \rho_{tlak} [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Phi] + \nabla p = 0,$$

$$\text{Poissonova rovnica: } \Delta \Phi = 4\pi\kappa\rho_{grav},$$

kde ρ_{tlak} a ρ_{grav} je hustota zotrvačnej hmotnosti so zahrnutím príspevku od tlaku a hustota gravitačnej hmotnosti, $\rho_{tlak} = \rho + p/c^2$ a $\rho_{grav} = \rho + 3p/c^2$. Ide o nerelativistické rovnice, ktoré získame z relativistických pri $v \ll c$ a $|\Phi| \ll c^2$. (Prvá rovnica je lokálny zákon zachovania energie, čiže rovnica kontinuity pre entropiu. V plne nerelativistickej teórii, kde aj $p \ll \rho c^2$, prejde na obyčajnú rovnicu kontinuity.) Nájdeme riešenie pre homogénny a izotropný vesmír. Predpokladajme, že (1) kvapalina sa rozpína podľa Hubblovho zákona, teda $\mathbf{v} = H\mathbf{r}$, kde $H = H(t)$ je Hubblova konštanta, a (2) hustota a tlak kvapaliny závisia iba od času, $\rho = \rho(t)$ a $p = p(t)$. Vlastnosť (1) je ekvivalentná tomu, že polohové vektory objemových elementov kvapaliny sa škálujú podľa vzťahu $\mathbf{r} = a\boldsymbol{\chi}$, kde $a = a(t)$ je škálovací parameter a $\boldsymbol{\chi}$ je konštantný bezrozmerný vektor. Odtiaľ pre Hubblovu konštantu dostaneme $H = \dot{a}/a$ ako vo VTR. Po dosadení z (1) a (2) prvá rovnica prejde na $\dot{\rho} + 3H\rho_{tlak} = 0$ a druhé 2 rovnice prejdú na $\dot{H} + H^2 = -4\pi\kappa\rho_{grav}/3$. Tieto rovnice tiež poznáme z VTR. Ak má kvapalina únikovú rýchlosť, čo zodpovedá plochému vesmíru vo VTR, riešenie je $\rho \propto a^{-3}$, $a \propto t^{-2/3}$ pre látku a $\rho \propto a^{-4}$, $a \propto t^{-1/2}$ pre žiarenie. Nový oproti VTR je iba vzorec pre gravitačný potenciál $\Phi = 2\pi\kappa\rho_{grav}r^2/3$. Naložme na veličiny ρ , \mathbf{v} a Φ poruchu typu rovinnej vlny, $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$ a $\delta\Phi \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, kde $k \propto a^{-1}$. Z východiskových rovníc dostaneme:

$$\text{rovnica kontinuity: } \delta\dot{\rho} + 3H\delta\rho_{tlak} + i\rho_{tlak}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} = 0,$$

$$\text{Eulerova rovnica: } \rho_{tlak}(\delta\dot{\mathbf{v}} + H\delta\mathbf{v} + i\mathbf{k}\delta\Phi) + ikv_{zv}^2\delta\rho = 0,$$

$$\text{Poissonova rovnica: } \delta\Phi = -4\pi\kappa k^{-2}\delta\rho_{grav},$$

kde bodka označuje deriváciu podľa času v zadanom objemovom elemente. (Nederivuje sa súčiniteľ $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ závisiaci od času cez \mathbf{k} .) Ak v prvej rovnici prejdeme od $\delta\rho$ k δ a skombinujeme ju s druhými 2 rovnicami, dostaneme

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + (k^2v_{zv}^2 - 4\pi\kappa\alpha\beta\rho)\delta = 0,$$

kde $\alpha = \rho_{tlak}/\rho$ a $\beta = \rho_{grav}/\rho$. (Pri odvodení sme využili, že v prípade s čistou látkou aj čistým žiarením $\delta\rho_{tlak}/\rho_{tlak} = \delta\rho_{grav}/\rho_{grav} = \delta$). Výraz v zátvorkách sa rovná nule pri vlnovom čísle

$k \sim \sqrt{\kappa\rho}/v_{zv} = r_J^{-1}$ a rozmere nehomogenity $r \sim k^{-1} \sim r_J$. Pred t_{rovn} platí $v_{zv} = c/\sqrt{3}$, a ak to skombinujeme so vzorcami $H^2 = 8\pi\kappa\rho/3$ a $H \sim t^{-1}$, dostaneme $r_J \sim cH^{-1} \sim r_h$, teda JEANSOV POLOMER SA PRED t_{rovn} PRIBLIŽNE ROVNÁ HORIZONTOVEJ DĹŽKE. Medzi t_{rovn} a t_{re} veličina v_{zv} mierne klesá, ale potom klesne prakticky okamžite na hodnotu $\ll c$. To znamená, že JEANSOV POLOMER JE PO t_{re} ZANEDBATEĽNÝ. A pretože δ rastie, ak $r > r_J$ ($k < r_J^{-1}$, výraz v zátvorkách < 0), a osciluje, ak $r < r_J$ ($k > r_J^{-1}$, výraz v zátvorkách > 0), vývoj nehomogenít prebieha tak, ako sme si povedali na začiatku prednášky. Nájdeme závislosť δ od a pri $r > r_J$. Pre vesmír zaplnený žiarením nie je v tomto režime splnené obmedzenie na Φ , ale to nevadí, lebo v rovniciach pre poruchu Φ nevystupuje. Ak v rovnici pre δ zanedbáme člen úmerný v_{zv}^2 a ρ vyjadríme zo vzorca $H^2 = 8\pi\kappa\rho/3$, dostaneme

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}\alpha\beta H^2\delta = 0.$$

Sem musíme dosadiť $\alpha = \beta = 1$, $H = 2/(3t)$ pre látku a $\alpha = 4/3$, $\beta = 2$, $H = 1/(2t)$ pre žiarenie. Riešenie je $\delta \propto t^n$, kde $n = 2/3, -1$ v prvom prípade a $n = 1, -1$ v druhom prípade. Rastúce riešenie, v ktorom prejdeme od t k a , je

$$\delta \propto \begin{cases} a & \text{pre látku} \\ a^2 & \text{pre žiarenie} \end{cases}.$$

Objasníme si mechanizmus, ktorým sa nehomogenity chladnej tmavej látky podstatne stlačili predtým, ako sa žiarenie oddelilo od baryónovej látky. Medzi t_{rovn} a t_{re} sa tieto nehomogenity stlačili len zhruba 3krát (lebo $\delta_l = \delta\rho_l/\rho_l \propto a$), čo je málo. Pred t_{rovn} musíme vziať do úvahy *Silkovo tmenie* – vyhladzovanie maloškálových nehomogenít žiarenia spôsobené difúziou fotónov. Kvôli nemu sa nehomogenity chladnej tmavej látky vyvíjajú vo svojom vlastnom potenciáli, aj keď dominantný príspevok k hustote dáva žiarenie. Pravda, výraz $4\pi\kappa\rho_l$ (súčiniteľ pri δ_l) nie je v tejto ére $\sim t^{-2}$ ale $\sim t_{rovn}^{1/2}t^{-3/2}$, preto δ_l rastie pomalšie než mocninne. Aj tak však stačí do t_{re} narásť zhruba 50krát, a keďže chladná tmavá látka má hustotu zhruba 10krát väčšiu než baryónová, po páde baryónov do „gravitačných pascí“ sa baryónové δ zvýši zhruba 500krát. Vďaka tomu vzniknú galaxie dostatočne skoro po Veľkom tresku, aby sme ich mohli pozorovať, a aby sme ešte predtým v jednej z nich mohli vzniknúť aj my.

Príklady

I. Robertsonova–Walkerova metrika

1. *Vek vesmíru.* Nájdite súčiniteľ, ktorým musíme prenásobiť Hubblov čas $t_{H_0} = 1/H_0$, aby sme dostali (a) vek plochého prachového vesmíru ($a \propto t^{2/3}$), (b) vek uzavretého prachového vesmíru so súčasnou hustotou rovnou dvojnásobku kritickej hustoty ($a = a_0(1 - \cos \eta)$, $ct = a_0(\eta - \sin \eta)$), (c) vek plochého vesmíru so súčasnou hustotou rozdelenou napoly medzi látku a kozmologickú konštantu ($a = a_0 \text{sh}^{2/3} [3/(2\sqrt{2})H_0 t]$). RIEŠENIE: (a) $2/3$, (b) $\pi/2 - 1$, (c) $0,83$.

2. *Rovnomerné rozpínanie vo VTR.* Presvedčte sa, že v rovnomerne sa rozpínajúcom vesmíre ($a \propto t$) majú galaxie po celý čas rovnakú rýchlosť, a určte pre galaxiu s ľubovoľným červeným posunom, čomu sa rovná (a) súčasná vzdialenosť, (b) vzdialenosť v čase vyslania svetla, a (c) čas vyslania svetla. Nájdite hodnoty týchto veličín pre vesmír s rovnkou hodnotou H_0 , akú má náš, $H_0 = (13,7 \text{ mld. r.})^{-1}$, a kvazar so $z = 6,4$. RIEŠENIE: (a) $ct_0 \ln(1+z)$, $27,4 \text{ mld. sv. r.}$, (b) $ct_0 \ln(1+z)/(1+z)$, $3,7 \text{ mld. sv. r.}$, (c) $t_0/(1+z)$, $1,85 \text{ mld. r.}$ Správne hodnoty sú: (a) $22,0 \text{ mld. sv. r.}$, (b) $3,0 \text{ mld. sv. r.}$, (c) $2,0 \text{ mld. r.}$

3. *Horizonty.* Horizont častíc je sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od Veľkého tresku po čas t , a horizont udalostí sféra, do ktorej sa rozšíri svetlo od času t po nekonečný čas. Nájdite (a) polomer horizontu častíc pre plochý vesmír zaplnený prachom ($a \propto t^{2/3}$) a žiarením ($a \propto t^{1/2}$), (b) polomer horizontu udalostí pre plochý vesmír bez látky a s nenulovou kozmologickou konštantou ($a \propto e^{Ht}$). RIEŠENIE: (a) $3ct$ a $2ct$, (b) cH^{-1} .

4. *Plocha posledného rozptylu.* Plocha posledného rozptylu je sféra, z ktorej k nám prichádza reliktové žiarenie. V skutočnosti je to guľová vrstva s konečnou hrúbkou, ktorú v približných výpočtoch zamieňame sférou. Žiarenie malo pri rekombinácii teplotu 900 až 1200 krát súčasná teplota, takže jeho červený posun je $1+z = 900 \div 1200$. Ako reprezentatívnu môžeme vziať hodnotu $1+z = 1100$. Nájdite pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{2/3}$) (a) ako ďaleko je v súčasnosti zdroj svetla s daným $1+z$, (b) ako ďaleko je v súčasnosti plocha posledného rozptylu, (c) koľkokrát je táto plocha ďalej než najvzdialenejší známy kvazar so $z = 6,4$. Vzdialenosti v bodoch (a) a (b) vyjadrite v násobkoch polomeru pozorovateľného vesmíru. (Podľa výsledku z bodu (a) predchádzajúceho príkladu sa tento polomer rovná trojnásobku veku vesmíru prepočítaného na svetelné roky.) RIEŠENIE: (a) $(1 - 1/\sqrt{1+z})r_{p.v.}$, (b) $0,97r_{p.v.}$, (c) $1,53$.

5. *Ešte plocha posledného rozptylu.* Odhadnite, koľko horizontov by sa zmestilo na p. p. r. v čase rekombinácie, keby sme ich poukladali vedľa seba na rovník. (Keď sa povie „horizont“ bez bližšieho určenia, myslí sa „horizont častíc“.) Polomer p. p. r. zrátajte pre prachový vesmír a polomer horizontu pre vesmír zaplnený čistým žiarením. RIEŠENIE: $3\pi(\sqrt{1+z}-1)/2 = 152$.

6. *Nadsvetelné rýchlosti.* Nájdite rýchlosť rozpínania vesmíru na horizonte (a) pre plochý vesmír zaplnený prachom ($a \propto t^{2/3}$) a žiarením ($a \propto t^{1/2}$), (b) pre uzavretý vesmír zaplnený prachom vo fáze rozpínania ($a = (a_M/2)(1 - \cos \eta)$, $ct = (a_M/2)(\eta - \sin \eta)$, $0 < \eta < \pi$). V prípade (b) určte, pri akej hodnote a klesne rýchlosť rozpínania pod c . Čo možno povedať o horizonte ako hranici pozorovateľného vesmíru v uzavretom vesmíre vo fáze stlačania? RIEŠENIE: (a) $2c$ a c , (b) $c\eta \sin \eta / (1 - \cos \eta)$, $0,84a_M$, horizont neexistuje – pozorovateľný je celý vesmír.

7. *Hubbllov zákon na veľkých vzdialenostiach.* Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{2/3}$). Zistite, čomu sa v tomto prípade rovná q , a overte, či má nájdená funkcia správnu asymptotiku pri malých z . RIEŠENIE: $2cH_0^{-1}(1+z)(1-1/\sqrt{1+z})$, $1/2$, $cH_0^{-1}z(1+z/4)$ – súhlasí.

II. Ešte Robertsonova–Walkerova metrika

1. *Vektor separácie geodetík.* Dokážte z variačného princípu, že vektor separácie geodetík, vyslaných z daného bodu a parametrizovaných dĺžkou, je kolmý na referenčnú geodetiku. Návod (očividný): zapíšte variáciu dĺžky prvej geodetiky ako lineárnu časť rozdielu dĺžok prvej a druhej geodetiky, a položte ju rovnú nule.

2. *Ešte vektor separácie geodetík.* Ukážte, že vektor separácie geodetík, vyslaných z daného bodu a parametrizovaných dĺžkou, sa pozdĺž referenčnej geodetiky neotáča, ak je priestor izotropný vzhľadom na daný bod. Metrika izotropného priestoru je $g = d\lambda^2 + r^2(\lambda)g_s$, kde s je jednotková sféra.

3. *Vonkajšia krivosť geodetických plôch.* Ukážte, že vonkajšia krivosť geodetických plôch preložených stredom symetrie izotropného priestoru je nulová. Geodetická plocha preložená bodom P je 2D plocha, ktorá pozostáva z geodetík vedených dotyčnicovo k danej rovine tangenciálneho priestoru. Metrika izotropného priestoru je uvedená v predchádzajúcom príklade, vonkajšia krivosť sa definuje vzťahom $K(u, v) = (\nabla_u v)_\perp$.

4. *Kozmologický červený posun.* Odvodte vzorec pre kozmologický červený posun z toho, že vlnový 4-vektor k je úmerný vektoru u dotyčnicovému k nulovej geodetike, t. j. spĺňa $\nabla_k k = 0$ a $k^2 = 0$.

Návod: umiestnite pozorovateľa do počiatku a využite zákon zachovania. Odkiaľ plynie úmernosť medzi k a u ? Ako je to s červeným posunom de Broglieho vln látkových častíc (elektrónov, jadier, atómov)?

5. *Približný vzorec pre žiarivú vzdialenosť.* Nájdite asymptotiku $r_L(z)$ do druhého rádu v z , ak je daná súčasná hodnota deceleračného parametra q_0 . Návod: učebný text *Kozmológia*, kap. 3. RIEŠENIE: $r_L \doteq cH_0^{-1}z[1 + (1 - q_0)z/2]$.

6. *Žiarivá vzdialenosť v rovnomerne sa rozpínajúcom vesmíre.* Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre Milneho vesmír (otvorený vesmír s $a \propto t$) a presvedčte sa, že má správnu asymptotiku pri malých z . RIEŠENIE: $r_L = cH_0^{-1}z(1 + z/2) -$ súhlasí (q je nulové).

7. *Súvis medzi rýchlosťou a červeným posunom.* Nájdite rýchlosti galaxie v_1 a v_0 v okamihu vyžiarenia a prijatia svetla v_0 ako funkcie červeného posunu galaxie z pre plochý prachový vesmír ($a \propto t^{2/3}$). Porovnajme získané funkcie, rozvinuté do rádu z^2 , s funkciami, ktoré dostanete (a) zo vzorca pre Dopplerov jav nerelativistického zdroja v prípade, že sa zdroj pohybuje a pozorovateľ stojí ($z = v/c$), a (b) zo vzorca pre relativistický Dopplerov jav ($z = \sqrt{(c+v)/(c-v)} - 1$). Pri výpočte v_0 v prípadoch (a) a (b) zohľadnite, že rýchlosť galaxie sa medzi vyslaním a prijatím signálu zmenšila. Tento jav opíšte spôsobom, ktorý zodpovedá výpočtu z , teda z predstavy, že galaxie sa rozbiehajú a svetlo sa šíri v globálnej inerciálnej sústave. RIEŠENIE: $v_1 = 2c(\sqrt{1+z} - 1)$, $v_0 = 2c(1 - 1/\sqrt{1+z})$, (a) obe rýchlosti sú $1 + z/4$ krát väčšie, (b) obe rýchlosti sú $1 + z/4$ krát menšie. (Dôvod, prečo sú dané pomery pre v_1 a v_0 rovnaké: podiel v_1/v_0 v globálnej inerciálnej sústave je $(1 + 3z/2)^{1/3}$, čo sa do rádu z zhoduje so vzorcom, ktorý vyjde z VTR.)

III. Friedmannove modely

1. *Rozpínanie vesmíru v jednoduchých prípadoch.* Overte vzorce pre rozpínanie plochého vesmíru zaplneného prachom a žiarením a uzavretého vesmíru zaplneného prachom, uvedené v príklade I.1. Pri uzavretom vesmíre overte najprv všeobecný vzorec z príkladu I.6 a potom jeho špeciálny tvar z príkladu I.1, a to tak, že vyjadríte maximálny polomer vesmíru a_M cez parameter Ω a dosadíte $\Omega = 2$. RIEŠENIE: $(\Omega - 1)^{-1}\Omega a_0$, $2a_0$ pre $\Omega = 2$ - súhlasí.

2. *Polomer vesmíru.* Vyjadríte a_0 cez H_0 a Ω pre zakrivený (uzavretý alebo otvorený) vesmír. Zistite, koľkokrát by bol polomer pozorovateľnej časti vesmíru $r_{p.v.}$ menší než súčasný polomer vesmíru a_0 (polomer 3-sféry reprezentujúcej priestor, v ktorom žijeme), keby mal parameter Ω

najväčšiu hodnotu, aká je ešte v súlade s pozorovaniami, $\Omega = 1,04$. Za $r_{p.v.}$ vezmite vzdialenosť kvazara so $z = 6,4$, uvedenú v príklade I.2. RIEŠENIE: $a_0 = |\Omega - 1|^{-1/2} cH_0^{-1}$, 3,1 krát.

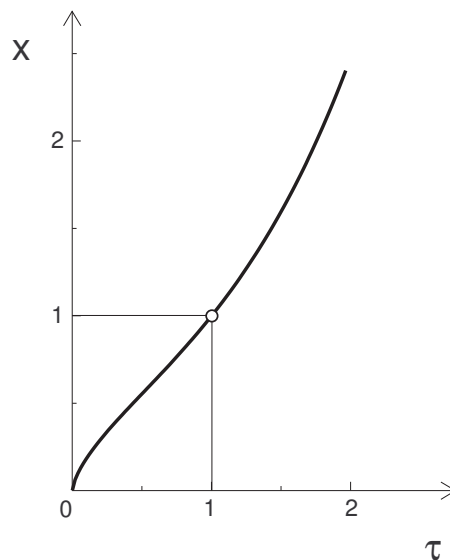
3. *Ešte Hubbleov zákon na veľkých vzdialenostiach.* Nájdite funkciu $r_L(z)$ pre ľubovoľný homogénny a izotropný vesmír vyhovujúci Einsteinovým rovniciam. Návod: využite rovnicu pre $x = a/a_0$ ako funkciu $\tau = H_0 t$,

$$x'^2 = \Omega_l x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + 1 - \Omega.$$

(Overte!) RIEŠENIE: $cH_0^{-1}(1+z) \times \begin{cases} |1 - \Omega|^{-1/2} \Sigma(|1 - \Omega|^{1/2} F), & \text{ak } \Omega \neq 1 \\ F, & \text{ak } \Omega = 1 \end{cases}$, kde $F = \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x\sqrt{f}}$

a f je výraz na pravej strane rovnice pre x'^2 .

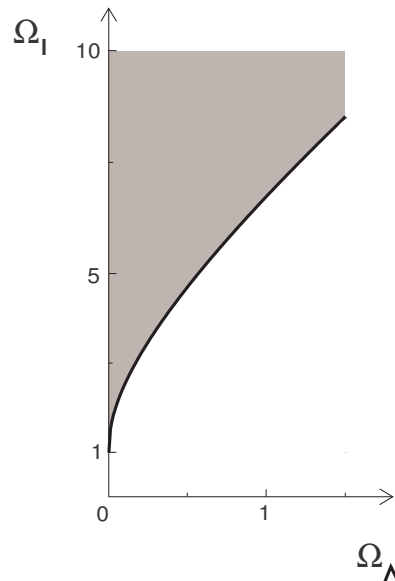
4. *Rozpínanie nášho vesmíru.* Podľa súčasných pozorovaní je náš vesmír s veľkou presnosťou plochý, s $\Omega_l = 0,26$ a $\Omega_\Lambda = 0,74$. Nájdite funkciu $x(\tau)$ pre prachový vesmír s ľubovoľnými Ω_l a Ω_Λ spĺňajúcimi $\Omega_l + \Omega_\Lambda = 1$ a presvedčte sa, že v špeciálnom prípade, ktorý sa uvažuje v príklade I.1, je závislosť $a(t)$ taká, aká je uvedená v zadaní. Určte, koľkokrát väčší je vek vesmíru než Hubbleov čas, ak majú parametre Ω_l a Ω_Λ pozorované hodnoty. RIEŠENIE: $x = (\Omega_l/\Omega_\Lambda)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left[(3/2)\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau \right]$, 1,003 – vek vesmíru sa prakticky zhoduje s Hubbleovým časom (efekty spomaľovania vesmíru v ére s prevládajúcou látkou a zrýchľovania vesmíru v ére s prevládajúcou kozmologickou konštantou sa kompenzujú).



5. *Asymptotiky rozpínania.* Určte približný tvar riešenia z predchádzajúceho príkladu pri malých a veľkých časoch a zistite, akým súčiniteľom sa líši približné a_0 od presného, ak majú Ω_l a Ω_Λ

pozorované hodnoty. RIEŠENIE: $x_{asym} = (3/2)^{2/3}\Omega_l^{1/3}\tau^{2/3}$ a $(1/2)^{2/3}(\Omega_l/\Omega_\Lambda)^{1/3}\exp(\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau)$, 0,84 a 1,05.

6. *Vesmír s návratom.* Zistite, v akej oblasti parametrov Ω_l a Ω_Λ sa vesmír po čase zastaví a začne sa stláčať. Návod: aby vesmír prešiel od rozpínania k stláčaniu, musí mať funkcia $f(x)$ z príkladu III.3 minimum pod osou x (prečo?). RIEŠENIE: $(\Omega - 1)^3 > (27/4)\Omega_\Lambda\Omega_l^2$.



7. *Vesmír s odrazom.* Určte, pri akých hodnotách bezrozmerného škálovacieho parametra $x_{od} = a_{od}/a_0$ sa vesmír môže „odraziť“ – prejsť od stláčania k rozpínaniu –, ak poznáme Ω_l a predpokladáme, že Ω_Λ je nadkritické (také, že odraz môže nastať). Vypočítajte minimálne x_{od} v prípade, keby vesmír obsahoval iba svietiacu látku, teda keby platilo $\Omega_l = 0,004$. Presvedčte sa, že také Ω_l je najpriaznivejšie v tom zmysle, že pri väčšom Ω_l sa zúži interval možných hodnôt x_{od} . RIEŠENIE: $x_{od}^3(1 - \Omega_l) + \frac{3}{2}\Omega_l x_{od}^2 - \frac{1}{2}\Omega_l > 0$, 0,124.

IV. Horúci vesmír

1. *Rozpínanie v blízkosti rovnosti hustôt.* Nájdite súvis medzi $x = a/a_0$ a $\tau = H_0 t$ v prvom období po Veľkom tresku, keď sa dá zanedbať vplyv krivosti aj kozmologickej konštanty na dynamiku vesmíru, ale zato treba vziať do úvahy vplyv žiarenia. Predpokladajte, že vesmír neobsahuje páry, takže žiarenie sa skladá iba z fotónov a neutrín. Návod:

$$x'^2 = \Omega_l x^{-1} + \Omega_z x^{-2}.$$

Určte, aké veľké je τ v okamihu rovnosti hustôt ($x = \Omega_z/\Omega_l \equiv \alpha$) a v okamihu rekombinácie

($x = 1/1100$), ak majú oba parametre Ω pozorované hodnoty, $\Omega_l = 0,26$ a $\Omega_z = \Omega_l/3250$. Prepočítajte oba časy na roky, ak viete, že Hubblov čas (a zároveň vek vesmíru, viď príklad III.4) je približne 13,7 mld. r. RIEŠENIE: $(x - 2\alpha)\sqrt{x + \alpha} + 2\alpha^{3/2} = (3/2)\sqrt{\Omega_l}\tau$, $4,1 \cdot 10^{-6}$ a $2,75 \cdot 10^{-5}$, 57 000 r. a 377 000 r.

2. *Asymptotiky ďaleko od rovnosti hustôt.* Určte približný tvar riešenia z predchádzajúceho príkladu pri malých a veľkých časoch a zistite, akým súčiniteľom sa líši približné a v okamihu rekombinácie od presného, ak majú Ω_l a Ω_z pozorované hodnoty. RIEŠENIE: $x_{asym} = 2^{1/2}\Omega_z^{1/4}\tau^{1/2}$ a $(3/2)^{2/3}\Omega_l^{1/3}\tau^{2/3} + \alpha$, 0,77 a 1,17.

3. *Opravená horizontová dĺžka.* Určte, čomu sa rovná horizontová dĺžka (polomer horizontu častíc) v jednotkách cH_0^{-1} pri rozpínaní, o ktorom sa píše v príklade IV.1, a zistite, koľkokrát je táto dĺžka v okamihu oddelenia žiarenia väčšia než horizontová dĺžka vo vesmíre zaplnenom čistým žiarením. Pri výpočte využite pomer x_{asym}/x z predchádzajúceho príkladu. RIEŠENIE: $(2/\sqrt{\Omega_l})x(\sqrt{x + \alpha} - \sqrt{\alpha})$, 1,12. Opravený polomer plochy posledného rozptylu, zrátaný numericky pri pozorovaných hodnotách parametrov Ω_l , Ω_z a Ω_Λ , je 1,16krát väčší než približný, takže počet horizontov, ktoré sa dajú vtesnať na p. p. r., je o niečo väčší, než vyšiel v príklade I.5 – nerovná sa 152 ale 156.

4. *Vlnová dĺžka reliktového žiarenia.* Nájdite typickú vlnovú dĺžku reliktového žiarenia, ak viete, že teplota reliktového žiarenia je 2,73 K. Návod: $\hbar c = 200$ eV nm, $k_B = 0,86 \cdot 10^{-4}$ eV K⁻¹. Koľkokrát väčšia je vlnová dĺžka λ_m , na ktorú pripadá maximum intenzity žiarenia? Akú má táto vlnová dĺžka hodnotu? Návod: $I_\lambda \propto \lambda^{-5}(e^{-2\pi\lambda^*/\lambda} - 1)^{-1}$, kde λ_* je odhadnutá typická vlnová dĺžka (odvoďte zo vzorca pre I_ω !). RIEŠENIE: 0,85 mm, 1,27 ($= 2\pi/x$, kde x je riešenie transcendentnej rovnice $xe^x = 5(e^x - 1)$), 1,08 mm.

5. *Energia a počet fotónov reliktového žiarenia.* Odhadnite strednú energiu fotónu reliktového žiarenia a počet fotónov reliktového žiarenia v kocke s hranou jeden meter, zistíte príslušné opravné koeficienty a zrátajte presné hodnoty oboch veličín. Návod k odhadu počtu fotónov: v žiarení čierneho telesa pripadá na jeden fotón zhruba kocka s hranou rovnou strednej vlnovej dĺžke (prečo?). Návod k výpočtu opravných koeficientov: integrály $I_n = \int_0^\infty x^n (e^x - 1)^{-1} dx = n! \sum_{k=1}^\infty k^{-n-1}$ sa rovnajú $\pi^2/6$, 2,404, $\pi^4/15$... pre $n = 1, 2, 3$... RIEŠENIE: $2,3 \cdot 10^{-4}$ eV, 2,70 ($= I_3/I_2$), $6,3 \cdot 10^{-4}$ eV; $1,6 \cdot 10^9$ m⁻³, 0,244 ($= I_2/\pi^2$), $3,9 \cdot 10^8$ m⁻³.

6. *Entropia reliktového žiarenia.* Vyjadrite entropiu žiarenia čierneho telesa S cez enegiu žiarenia

E a teplotu žiarenia T . Návod: (1) $dE = pdV + TdS$, (2) $p = 1/3 \cdot E/V$, (3) $E = \epsilon(T)V$. V predchádzajúcom príklade sa dokazuje, že v žiarení čierneho telesa s teplotou T majú fotóny strednú energiu $E_1 = 2,7k_B T$. Určte, koľkokrát je bezrozmerná entropia $\bar{S} = S/k_B$ väčšia než počet fotónov N a nájdite hodnotu bezrozmernej entropie v kocke s hranou 1 m, ak viete, že v kocke je $3,9 \cdot 10^8$ fotónov. RIEŠENIE: $S = 4/3 \cdot E/T$, $3,6$, $1,4 \cdot 10^9$.

7. *Príspevok neutrín k žiareniu.* Začínajúc poslednou anihiláciou, žiarenie vo vesmíre pozostávalo z fotónov s klesajúcou teplotou T a z troch druhov neutrín s takisto klesajúcou teplotou $T_\nu = (4/11)^{1/3}T$. Určte počet kvánt žiarenia na fotón a pomer energie žiarenia k energii fotónov. Návod: integrály $I_n^\pm = \int_0^\infty x^n (e^x \pm 1)^{-1} dx$ súvisia vzťahom $I_n^+ = (1 - 2^{-n}) I_n^-$ (overtle!). Poznámka 1: vzorec pre T_ν v skutočnosti platí iba pre elektrónové neutrína. Teplota druhých dvoch druhov neutrín je o niečo nižšia, lenže to nemá prakticky žiadny vplyv na výsledky. Poznámka 2: z experimentálnych dolných ohraničení na rozdiely štvorcov neutrínových hmotností plynie, že prinaajmenšom dva z troch druhov neutrín sú v súčasnosti nerelativistické, takže neprispievajú k žiareniu, ale k látke. Na druhej strane, všetky tri druhy neutrín mohli byť, a pravdepodobne boli, súčasťou žiarenia v ére, keď žiarenie určovalo dynamiku vesmíru. RIEŠENIE: $1 + 3 \cdot 3/4 \cdot (T_\nu/T)^3 = 1,81$, $1 + 3 \cdot 7/8 \cdot (T_\nu/T)^4 = 1,68$.